

defect 0 の blocks について

小樽商大 和田 俱幸

§ 1 G を有限群, p を素数とする.

問題, G が defect 0 の p -block を持つ為の条件は何か?

今迄に知られている結果として、次の環論的あるいは表現論的なものがある.

1) (Tsushima, [3]). K を標数 0 の G の分解体, $\mathfrak{p}$ を p の prime ideal divisor, R を $\mathfrak{p}$ -adic integer の ring, $R/\mathfrak{p}$ を F とする. $c := \sum_{x: p\text{-elements}} x$, $e_1, \dots, e_t \in FG$ の defect 0 の block idempotents 全体とすると, $c^2 = e_1 + \dots + e_t$ となる.

2) (Gizuka-Watanabe, [1]) F は 1) にあける F とする. $K_1, \dots, K_s$ を G の defect 0 の conjugate classes 全体とし, $M := \sum_{i=1}^s F \hat{K}_i$ とする. $\hat{K}_i$ は class sum. すると FG の defect 0 の p -blocks の数 $= \dim_F M^2$.

一方群の構造に関する条件としては $O_p(G) = 1$ が G が defect 0 の p -block を持つ為には必要であるが、一般には

十分らしい. solvable group に 関する N. Ito の反例は $C_p(G)=1$ であり, G は defect 0 の class を含んでいない ([2]).
 それより G が defect 0 の element を含む場合. この様な時に G は defect 0 の p -block を含むか. 我々は次の様な群を考える.

Def. G is a (p, q) -group $\stackrel{\text{def.}}{\iff} p, q \in \pi(G)$, G does not contain an element of order pq .

Theorem A. Let G be a $(2, p)$ -group. Suppose $G \geq H \cong D_n$: dihedral of order 2^n with $|C_G(x)| = 2^{n-1} \times \text{odd}$, where $x \in H$, $|x| = 2^{n-1}$. Then G possesses a p -block of defect 0.

Theorem B. Let G be a (p, q) , $(2, p)$ and $(2, q)$ -group.

Then 1) G possesses a p -block of defect 0, or

2) G possesses a q -block of defect 0.

§ 2 Proofs of Theorems

Remark 1. G が p -solvable (p, q) -group であるとは, $C_p(G)=1$ かつ, G が defect 0 の p -block を含むことはやはり十分条件にはなっていないという事がわかる. それは次の事実による.

Lemma 1. $C_p(G) \geq K$: conjugate class of defect 0 of G

$\Rightarrow G$ は defect 0 の p -block を含む.

∴) 後の Lemma 4 の Corollary.

Lemma 1 から " G が p -solvable $(p, 2)$ -group ならば $|O_2(G)| \not\equiv 0 \pmod{p}$ ならば G は defect 0 の p -block を持つ." は trivial. $|O_2(G)| \not\equiv 0 \pmod{p}$ ならば $O_p(G) = 1$ であるから, "... " は $O_p(G) = 1$ の時には, やはり正しい. 実際, 9to の反例の index 2 の拡大で involution が p -Sylow 群に fixed point free に働く群を考えれば, $O_p(G) = 1$ で defect 0 の p -block を持つ solvable $(2, p)$ -group である.

Remark 2. G が 2-rank 1 の $(2, p)$ -group ならば, p -solvable であるから Remark 1 で述べたようになる. Theorem A は G の 2-rank = 2 の場合で, 特に 2-Sylow 群が dihedral な $(2, p)$ -group は defect 0 の p -block を持つ. 同様の証明で, G の 2-Sylow 群が 4-group, semi-dihedral の場合も $(2, p)$ -group は defect 0 の p -block を持つ. 証明は involution の数を数えるという方法のみによる.

Theorem A の証明.

$K_1, \dots, K_s \in G$ の conjugate class 全体としたとき, a_{ijk} を

$$\hat{K}_i \cdot \hat{K}_j = \sum_{k=1}^s a_{ijk} \hat{K}_k$$

とする. 次の Lemma を使う.

Lemma 2. 次は同値

1) G は defect 0 の p -block を持つ.

2) $\exists \{K_i, K_j, K_k\}$: defect 0 の G -conjugate class, s.t. $a_{ijk} \not\equiv 0 \pmod{p}$.

∴) 1) $\rightarrow$ 2) は §1 の 2) より明らか.

2) $\rightarrow$ 1) $|C_G(x_i)| a_{ijk} = \sum_{x \in \mathcal{C}_G(x_i)} \chi(x_i) \omega_\chi(x_j) \overline{\chi(x_k)}$, 但し $x_i \in K_i$, $x_j \in K_j$, $x_k \in K_k$ 且 $\omega_\chi(x_j) := |G : C_G(x_j)| \chi(x_j) / \chi(1)$, 2) があるから
 仮定から左辺は p と素, 故に $\exists \chi \in \mathcal{C}_G(G)$ s.t. $\omega_\chi(x_j) \not\equiv 0 \pmod{p}$
 2) がある. K_j が defect 0 であるから χ は defect 0 の p -block に属する.

Lemma 3. G は $(2, p)$ -group, G の defect 0 の p -block χ に対して
 $\chi \neq 1 \Rightarrow |N_G(P)| = \text{even}$ for $P \in \text{Syl}_p(G)$, かつ G の involutions は
 1-class

$\therefore$) 後の Lemma 4 より, strongly real p -element が存在するから.

定理 A の証明に必要. G の defect 0 の p -block χ に対して $\chi \neq 1$ とする. Lemma 3 より involutions は 1-class K_1 . $x \in K_j$ とする. a_{ij} を調べる.

$$a_{ij} = \# \{ y : \text{involution} \mid x^y = x^{-1} \}$$

$$= \# \{ y : \text{involution} \mid y \in C_G^*(x) - C_G(x) \}$$

仮定から $|C_G^*(x)/\langle x \rangle| = 2 \times \text{odd}$ であるから $\overline{C_G^*(x)} = C_G^*(x)/\langle x \rangle$ の
 involutions は 1-class $\overline{K}$. $\overline{y} \in \overline{K}$ のとき coset $y\langle x \rangle$ の各元は
 involution であるから

$$a_{ij} = |x| \cdot |\overline{K}| = |x| \cdot |\overline{C_G^*(x)}| = |C_{\overline{C_G^*(x)}}(\overline{y})| \not\equiv 0 \pmod{p}$$

これは Lemma 2 に矛盾.

Theorem B の証明.

次の Lemma を使う.

Lemma 4. $\exists K_i$ defect 0 α G -conjugate class, s.t. $a_{ii^*k} = 0$
for $\forall K_k$: conjugate class of p -elements of $G \Rightarrow G$ is defect 0 α
 p -block $\notin \mathcal{B}$. $\therefore \sum K_i^* = K_i^{-1}$.

∴) [4] に見よ.

定理 B の証明に $t \in Z$. G の defect 0 の p -block $e \in P = P_1$ として仮定する. $K_1 \in G$ の involution の class, $K_j \in$ 任意の q -elements の class である. G は $(2, p)$, (p, q) -group である Lemma 2 により

- 1) $a_{ij} \equiv 0 \pmod{p}$.

$\not\in \cup a_{ij} \neq 0$ for $\exists K_j$: class of q -elements of G . $\bar{1} \notin \bar{1}^*$.
 $a_{ij} \mid |C_G(x_j)|$, $x_j \in K_j$. 2. $\bar{1} \notin \bar{1}^*$ 4. $\bar{1} \notin \bar{1}^*$ 5. $\bar{1} \notin \bar{1}^*$. ($\because$) G is
 (2, q)-group). $|C_G(x_j)| \not\equiv 0 \pmod{p}$ 5. 矛盾. 従って $\bar{1} \notin \bar{1}^*$ の
 q -elements の class K_j 1: $\bar{1} \notin \bar{1}^*$ 2. $a_{ij} = 0$ と $\bar{1} \notin \bar{1}^*$ Lemma 4
 から G は defect 0 の q -block $e \notin \bar{1}^*$.

References.

- [1] Higuka - Watanabe : On the number of blocks of irreducible characters of a finite group with a given defect group, Kumamoto J. Sci. (Math.), vol. 9, 55 - 61 (1973).
- [2] N. Ito : Note on the characters of solvable groups, Nagoya Math. J. 39 (1970), 23 - 28.

- [3] Tsushima : On the block of defect 0, Nagoya M. J. 44 (1971), 57-59.
- [4] Wada : On the existence of p -blocks with given defect groups, Hokkaido M. J. 6 (1977), 243-248.