

基本 LUL 分解とその応用

早大理工 石渡恵美子 (Emiko Ishiwata)

早大理工 室谷義昭 (Yoshiaki Muroya)

最近、SOR 法を一般化し実用的にした順序付き改良 SOR 法を提案し、三重対角行列に対する改良 SOR 行列のスペクトル半径を 0 とする n 通りの緩和係数の選び方を与え、これを拡張した UL 分解に対応する改良反復法を提案した ([3] 参照)。

ここでは、[3] の結果を一般化するために基本 LUL 分解を定義し、それに対応する改良反復法を提案する。特に行列が上 Hessenberg 行列の場合はこの改良反復法は順序付き改良 SOR 法となり、改良 SOR 行列のスペクトル半径を 0 とする n 通りの緩和係数の選び方を与える。一般に正方行列は適当な変換 ([8] の Householder 法参照) により上 Hessenberg 行列に変換されるので、これらの結果は実際の計算に有効である。

最後に非線形方程式への応用と得られた収束定理を示す。

1 行列の $1 \leq k \leq n$ となる k に対応する基本 LUL 分解と改良反復法

$n \times n$ 行列 A と $1 \leq k \leq n$ となる k に対し、下三角行列 L_1, L_2 と上三角行列 $\bar{U}$ を次の形に分割する。

$$L_1 = \begin{bmatrix} L_{1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{U} = \begin{bmatrix} \bar{U}_{1,1} & \bar{U}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \bar{U}_{2,2} \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ L_{2,1} & L_{2,2} \end{bmatrix}$$

ここに $L_{1,1}$ と $\bar{U}_{1,1}$ は $k \times k$ 小行列、 $L_{2,2}$ と $\bar{U}_{2,2}$ は $(n-k) \times (n-k)$ 小行列で対角成分はすべて 1 と表され、 I_1 は $k \times k$ 単位小行列、 I_2 は $(n-k) \times (n-k)$ 単位小行列とする。

対角行列 Φ に対し、 $\Phi A = L_1 \bar{U} L_2$ を k に対応する A の基本 LUL 分解とする。

ここで $A = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{bmatrix}$, $\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Phi_2 \end{bmatrix}$ $A_{1,1}$ と Φ_1 は $k \times k$ 小行列で、 $A_{2,2}$ と Φ_2 は $(n-k) \times (n-k)$ 小行列である。

特に、 $k = n$ のとき $\Phi A = \bar{L} \bar{U}$ を A の基本 LU 分解といい、 $k = 1$ のとき $\Phi A = \bar{U} \bar{L}$ を A の基本 UL 分解という。ここに $\bar{L} = L_1 L_2$ である。

定理 1.1 $n \times n$ 行列 A と $1 \leq k \leq n$ に対し、 k に対応する A の基本 LUL 分解 $\Phi A = L_1 \bar{U} L_2$ は唯一通りである。

(証明)

$$\Phi A = \begin{bmatrix} L_{1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_{1,1} & \bar{U}_{1,2} \\ \mathbf{0} & \bar{U}_{2,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ L_{2,1} & L_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{1,1}(\bar{U}_{1,1} + \bar{U}_{1,2} L_{2,1}) & L_{1,1} \bar{U}_{1,2} L_{2,2} \\ \bar{U}_{2,2} L_{2,1} & \bar{U}_{2,2} L_{2,2} \end{bmatrix}$$

これより $\Phi_1 A_{1,1} = L_{1,1}(\bar{U}_{1,1} + \bar{U}_{1,2} L_{2,1})$, $\Phi_1 A_{1,2} = L_{1,1} \bar{U}_{1,2} L_{2,2}$ となる。そこで $\Phi_2 A_{2,1} = \bar{U}_{2,2} L_{2,1}$, $\Phi_2 A_{2,2} = \bar{U}_{2,2} L_{2,2}$

$\Phi_2 A_{2,2} = \bar{U}_{2,2} L_{2,2}$ の UL 分解より $\Phi_2, \bar{U}_{2,2}, L_{2,2}$ が定まり、 $\Phi_2 A_{2,1} = \bar{U}_{2,2} L_{2,1}$ より $L_{2,1}$ が定まる。 $A_{1,1} - A_{1,2} L_{2,2}^{-1} L_{2,1} = \Phi_1^{-1} L_{1,1} \bar{U}_{1,1}$ の LU 分解より $\Phi_1, L_{1,1}, \bar{U}_{1,1}$ が定まり、最後に $\bar{U}_{1,2} = L_{1,1}^{-1} \Phi_1 A_{1,2} L_{2,2}^{-1}$ より $\bar{U}_{1,2}$ が定まる。

Φ_2 と Φ_1 は $\bar{U}_{2,2}, L_{2,2}, L_{1,1}$ と $\bar{U}_{1,1}$ の対角成分がすべて 1 となるように選ぶ点に注意。ゆえに k に対応する A の基本 LUL 分解は唯一通りである。 $\square$

定理 1.2 $n \times n$ 三重対角行列 $A = [-l_i, p_i, -u_i]$ に対する $1 \leq k \leq n$ についての基本 LUL 分解 $\Phi A = L_1 \bar{U} L_2$ の各行列と $\Phi = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ の各成分は次の通りである。

$$\begin{cases} \omega_i = \frac{1}{p_i - l_i \omega_{i-1} u_{i-1}}, & i = 1, 2, \dots, k-1 \\ \omega_i = \frac{1}{p_i - u_i \omega_{i+1} l_{i+1}}, & i = n, n-1, \dots, k+1 \\ \omega_k = \frac{1}{p_k - l_k \omega_{k-1} u_{k-1} - u_k \omega_{k+1} l_{k+1}}, & \omega_0 = \omega_{n+1} = 0 \end{cases}$$

$$L_1 = \begin{bmatrix} L_{1,1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{U} = \begin{pmatrix} 1 & -\omega_1 u_1 & & 0 \\ & 1 & -\omega_2 u_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 & -\omega_{n-1} u_{n-1} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} I_1 & \mathbf{0} \\ L_{2,1} & L_{2,2} \end{bmatrix}$$

$$L_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -\omega_2 l_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\omega_k l_k & 1 \end{pmatrix}, \quad L_{2,2} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -\omega_{k+2} l_{k+2} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\omega_n l_n & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_{2,1} = \begin{pmatrix} & -\omega_{k+1} l_{k+1} \\ 0 & \end{pmatrix}, \quad \bar{L} = L_1 L_2 = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -\omega_2 l_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & -\omega_n l_n & 1 \end{pmatrix} = I - \Phi \tilde{L}$$

ここで $\tilde{L} = [l_i, 0, 0]$ は $n \times n$ 狭義下三角行列である。

k に対応する A の基本 LUL 分解 $\Phi A = L_1 \bar{U} L_2$ に基づく改良反復法は任意の出発ベクトルに対し、次のように表される。ここで $\bar{L} = L_1 L_2$ である。

$$\mathbf{x}^{(m+1)} = \mathbf{x}^{(m)} - \bar{L}^{-1} \Phi (A \mathbf{x}^{(m)} - \mathbf{b}), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

定理 1.3 $n \times n$ 行列 A に対する $1 \leq k \leq n$ についての基本 LUL 分解 $\Phi A = L_1 \bar{U} L_2$ は以下の順序を考慮すると基本 LU 分解または基本 UL 分解とみなせる。

i) $\tilde{A} = \tilde{P}_k A \tilde{P}_k^T$ に対して、

$$\tilde{P}_k = \left[\begin{array}{c|ccc} & & & & \\ & & & & 1 \\ & & & \ddots & \\ & & & 1 & \\ \hline & & & & \\ 1 & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \bar{P}_{n-k} \\ I_1 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

を $n \times n$ 置換行列とすると、 $\tilde{A}$ の基本 LU 分解は $\tilde{\Phi} \tilde{A} = \tilde{L} \tilde{U}$ となる。ただし

$$\tilde{\Phi} = \tilde{P}_k \Phi \tilde{P}_k^T, \quad \tilde{L} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{n-k} \bar{U}_{2,2} \bar{P}_{n-k}^T & \mathbf{0} \\ L_{1,1} \bar{U}_{1,2} \bar{P}_{n-k}^T & L_{1,1} \end{bmatrix}, \quad \tilde{U} = \begin{bmatrix} \bar{P}_{n-k} L_{2,2} \bar{P}_{n-k}^T & \bar{P}_{n-k} L_{2,1} \\ \mathbf{0} & \bar{U}_{1,1} \end{bmatrix}$$

(証明) $1 \leq k \leq n$ となる k に対し、行列 A の基本 LUL 分解は定理 1.1 により唯一通り定まる。[3] の Theorem 4 の証明と同様にして $\tilde{L} = I - \Phi \tilde{L}$ となると、かつそのときに限り $H_\Phi = \mathcal{L}_\Phi$ が示せる。

$A = I - \tilde{L} - \tilde{U}$ に対し、 $\tilde{L} = \begin{bmatrix} \tilde{L}_{1,1} & 0 \\ \tilde{L}_{2,1} & \tilde{L}_{2,2} \end{bmatrix}$ は狭義下三角行列、 $\tilde{L}_{1,1}$ は $k \times k$ 小行列で $\tilde{L}_{2,2}$ は $(n-k) \times (n-k)$ 小行列、 $\tilde{U}$ は上三角行列とすると、 A の k に対応する基本 LUL 分解は $\Phi A = L_1 \bar{U} L_2$ である。このとき、 A が上 Hessenberg 行列ならば、

$$L_{1,1} = I_1 - \Phi_1 \tilde{L}_{1,1}, \quad L_{2,1} = \bar{U}_{2,2} L_{2,1} = \Phi_2 A_{2,1} = -\Phi_2 \tilde{L}_{2,1}, \quad L_{2,2} = I_2 - \Phi_2 \tilde{L}_{2,2}$$

となる。ここに、 $I = \text{diag}(I_1, I_2)$ で I_1 は $k \times k$ 単位行列かつ I_2 は $(n-k) \times (n-k)$ 単位行列である。従って $\tilde{L} = I - \Phi \tilde{L}$ となるので、 $H_\Phi = \mathcal{L}_\Phi$ かつ $\rho(\mathcal{L}_\Phi) = 0$ となる。□

注意 1.1 [3] で述べた順序付き改良反復法は $n \times n$ 行列 A と置換行列 P, Q に対する $\tilde{A} = PAQ^T$ の基本 UL 分解に対応する改良反復法である。このとき、 A が三重対角行列であっても [3] で定義される置換行列 P_k に対し、 $P = Q = P_k$, $2 \leq k \leq n-1$ の場合には $\tilde{A}$ は上 Hessenberg 行列でない。しかしながら、対応する改良反復行列 H_Φ と改良 SOR 行列 $\tilde{\mathcal{L}}_\Phi$ に対し、 $H_\Phi = \tilde{\mathcal{L}}_\Phi$ かつ $\rho(\tilde{\mathcal{L}}_\Phi) = 0$ となっている ([3] 参照)。

2 Hessenberg 行列を係数行列とする連立方程式に対する順序付き改良 SOR 法

次に $n \times n$ 上 Hessenberg 行列 A を $A = I - \tilde{L} - \tilde{U}$ と分解し、 $\tilde{U}$ は上三角行列、 $\tilde{L}$ は狭義下三角行列とし、 A に対する改良 SOR 行列 $\mathcal{L}_\Phi = (I - \Phi \tilde{L})^{-1} \{ (I - \Phi) + \Phi \tilde{U} \}$ に対し、 $\rho(\mathcal{L}_\Phi) = 0$ となる緩和係数行列 $\Phi = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ の選び方を調べよう。

$\tilde{U} = [u_{i,j}]$ を

$$\tilde{U} = (I - D) + \tilde{U}_1 + \tilde{U}_2 + \dots + \tilde{U}_{n-1}$$

と分解する。ここで $D = \text{diag}(p_1, p_2, \dots, p_n)$ は A の対角成分をその成分とする対角行列、

$$\tilde{U}_l = [u_{i,j}^l], \quad u_{i,j}^l = \begin{cases} 0, & j \neq i+l \\ u_{i,j}, & j = i+l \end{cases} \quad 1 \leq l \leq n-1, \quad \tilde{L} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ l_2 & 0 & \\ & \ddots & \ddots \\ 0 & & l_n & 0 \end{pmatrix}$$

とする。簡単のため、 $p_1, p_2, \dots, p_n \neq 0$, $l_{i+1} u_{i,i-1} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ と仮定し、以下に表れる式の分母は 0 でないと仮定する。

1) 定理 1.3 において $k = n$ の場合

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi &= (I - \Phi \tilde{L})^{-1} \{ (I - \Phi) + \Phi \tilde{U} \} \\ &= \Phi \tilde{U}_1 + (I + \Phi \tilde{L}) \Phi \tilde{U}_2 + \{ I + \Phi \tilde{L} + (\Phi \tilde{L})^2 \} \Phi \tilde{U}_3 + \dots \\ &\quad + \{ I + \Phi \tilde{L} + (\Phi \tilde{L})^2 + \dots + (\Phi \tilde{L})^{n-2} \} \Phi \tilde{U}_{n-1} \\ &\quad + (I - \Phi \tilde{L})^{-1} \{ (I - \Phi D) + \Phi \tilde{L} \Phi \tilde{U}_1 + (\Phi \tilde{L})^2 \Phi \tilde{U}_2 + \dots + (\Phi \tilde{L})^{n-1} \Phi \tilde{U}_{n-1} \} \end{aligned}$$

ここで $(I - \Phi D) + \Phi \tilde{L} \Phi \tilde{U}_1 + (\Phi \tilde{L})^2 \Phi \tilde{U}_2 + \cdots + (\Phi \tilde{L})^{n-1} \Phi \tilde{U}_{n-1} = \mathbf{0}$ ならば、 $\mathcal{L}_\Phi = I - \bar{U}$ となる。ここに

$$\bar{U} = I - [\Phi \tilde{U}_1 + (I + \Phi \tilde{L}) \Phi \tilde{U}_2 + \cdots + \{I + \Phi \tilde{L} + (\Phi \tilde{L})^2 + \cdots + (\Phi \tilde{L})^{n-2}\} \Phi \tilde{U}_{n-1}]$$

は対角成分が 1 の上三角行列で、次式から緩和係数が具体的に定められる。

$$(1 - \omega_i p_i) + \omega_i l_i \omega_{i-1} u_{i-1,i} + \omega_i l_i \omega_{i-1} l_{i-1} \omega_{i-2} u_{i-2,i} + \cdots \\ + \omega_i l_i \omega_{i-1} l_{i-1} \cdots \omega_2 l_2 \omega_1 u_{1,i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Case II_n)

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \frac{1}{p_1}, \quad \omega_i = \frac{1}{p_i - l_i \omega_{i-1} u_{i-1,i} - l_i \omega_{i-1} l_{i-1} \omega_{i-2} u_{i-2,i} - \cdots - l_i \omega_{i-1} l_{i-1} \cdots \omega_2 l_2 \omega_1 u_{1,i}}, \\ i = 2, 3, \dots, n \end{array} \right.$$

2) 定理 1.3 において $k = 1$ の場合

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\Phi &= (I - \Phi \tilde{L})^{-1} \{(I - \Phi) + \Phi \tilde{U}\} \\ &= (I - \Phi \tilde{L})^{-1} [\Phi \tilde{U}_1 + \Phi \tilde{U}_2 (I + \Phi \tilde{L}) + \Phi \tilde{U}_3 \{I + \Phi \tilde{L} + (\Phi \tilde{L})^2\} + \cdots \\ &\quad + \Phi \tilde{U}_{n-1} \{I + \Phi \tilde{L} + (\Phi \tilde{L})^2 + \cdots + (\Phi \tilde{L})^{n-2}\} (I - \Phi \tilde{L}) \\ &\quad + (I - \Phi \tilde{L})^{-1} \{(I - \Phi D) + \Phi \tilde{U}_1 \Phi \tilde{L} + \Phi \tilde{U}_2 (\Phi \tilde{L})^2 + \cdots + \Phi \tilde{U}_{n-1} (\Phi \tilde{L})^{n-1}\} (I - \Phi \tilde{L}) \end{aligned}$$

ここで $(I - \Phi D) + \Phi \tilde{U}_1 \Phi \tilde{L} + \Phi \tilde{U}_2 (\Phi \tilde{L})^2 + \cdots + \Phi \tilde{U}_{n-1} (\Phi \tilde{L})^{n-1} = \mathbf{0}$ とおくと、 $\mathcal{L}_\Phi = (I - \Phi \tilde{L})^{-1} (I - \bar{U}) (I - \Phi \tilde{L})$ となる。ここに、

$$\bar{U} = I - [\Phi \tilde{U}_1 + \Phi \tilde{U}_2 (I + \Phi \tilde{L}) + \cdots + \Phi \tilde{U}_{n-1} \{I + \Phi \tilde{L} + (\Phi \tilde{L})^2 + \cdots + (\Phi \tilde{L})^{n-2}\}]$$

は対角成分が 1 の上三角行列となる。これより緩和係数が次のように定められる。

Case II₁)

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_n = \frac{1}{p_n}, \quad \omega_i = \frac{1}{p_i - u_{i,i+1} \omega_{i+1} l_{i+1} - u_{i,i+2} \omega_{i+2} l_{i+2} \omega_{i+1} l_{i+1} - \cdots - u_{i,n} \omega_n l_n \cdots \omega_{i+1} l_{i+1}}, \\ i = n-1, n-2, \dots, 1 \end{array} \right.$$

3) 定理 1.3 において $1 \leq k \leq n$ の場合

Case II_k)

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = \frac{1}{p_1}, \quad \omega_i = \frac{1}{p_i - l_i \omega_{i-1} u_{i-1,i} - l_i \omega_{i-1} l_{i-1} \omega_{i-2} u_{i-2,i} - \cdots - l_i \omega_{i-1} l_{i-1} \cdots \omega_2 l_2 \omega_1 u_{1,i}}, \\ i = 2, 3, \dots, k-1 \\ \omega_n = \frac{1}{p_n}, \quad \omega_i = \frac{1}{p_i - u_{i,i+1} \omega_{i+1} l_{i+1} - u_{i,i+2} \omega_{i+2} l_{i+2} \omega_{i+1} l_{i+1} - \cdots - u_{i,n} \omega_n l_n \cdots \omega_{i+1} l_{i+1}}, \\ i = n-1, n-2, \dots, k+1 \end{array} \right. \quad (1)$$

残る ω_k は $\Phi_1 A_{1,1} = L_{1,1} \bar{U}_{1,1} + \Phi_1 A_{1,2} L_{2,2}^{-1} L_{2,1}$ の両辺の第 (k, k) 成分より

$$\omega_k p_k = (1 + \omega_k l_k \omega_{k-1} u_{k-1,k} + \cdots + \omega_k l_k \omega_{k-1} l_{k-1} \cdots \omega_2 l_2 \omega_1 u_{1,k}) + \omega_k u_{k,k+1} \omega_{k+1} l_{k+1} \\ + \omega_k u_{k,k+2} \omega_{k+2} l_{k+2} \omega_{k+1} l_{k+1} + \cdots + \omega_k u_{k,n} \omega_n l_n \omega_{n-1} l_{n-1} \cdots \omega_{k+1} l_{k+1}$$

から

$$\omega_k = \frac{1}{p_k - \bar{P}_{k-1} - P_{k+1} - P_{k+2} - \cdots - P_n} \quad (2)$$

$$\text{ここで} \quad \begin{cases} \bar{P}_{k-1} = l_k \omega_{k-1} u_{k-1,k} + \cdots + l_k \omega_{k-1} l_{k-1} \cdots \omega_2 l_2 \omega_1 u_{1,k} \\ P_{k+1} = u_{k,k+1} \omega_{k+1} l_{k+1} \\ P_{k+2} = u_{k,k+2} \omega_{k+2} l_{k+2} \omega_{k+1} l_{k+1} \\ \vdots \\ P_n = u_{k,n} \omega_n l_n \omega_{n-1} l_{n-1} \cdots \omega_{k+1} l_{k+1} \end{cases}$$

このとき、定理 1.1 及び定理 1.4 の証明により、 k に対応する A の基本 LUL 分解 $\Phi A = L_1 \bar{U} L_2$ に対し、

$$\mathcal{L}_\Phi = L_2^{-1} (I - \bar{U}) L_2, \quad L_2 = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ -\Phi_2 \tilde{L}_{2,1} & I_2 - \Phi_2 \tilde{L}_{2,2} \end{bmatrix}$$

となる。よって、次の定理を得る。

定理 2.1 $n \times n$ 上 Hessenberg 行列 A と $1 \leq k \leq n$ となる k に対応する A の基本 LUL 分解 $\Phi A = L_1 \bar{U} L_2$ に基づく改良 SOR 行列を $\mathcal{L}_\Phi$ とおく。このとき $\rho(\mathcal{L}_\Phi) = 0$ である。ここに、 $\Phi = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ は (1), (2) で定まる。

注意 2.1 $1 \leq k \leq n$ に対するこれらの場合、 $(I - \bar{U})^m = 0$, $m \geq n$ であるが、一般に $(I - \bar{U})^m \neq 0$, $1 \leq m \leq n-1$ となる。これは三重対角行列の場合に [6] の定理 4.2 で取り扱われた順序付き改良 SOR 法の反復行列の性質についての結果と異なる。

Case II_k) の $\omega_i p_i$, $1 \leq i \leq n$ が実際に定義でき、しかも有界となる条件として次の定理を得る。([3] の 3 節と [4] の Theorem 3.1 参照)

定理 2.2 Case II_k), $1 \leq k \leq n$ を考える。 $2 \leq i \leq n$, $i \neq k$ に対し、

$$\bar{l}_i = \begin{cases} \frac{l_i}{p_i}, & 2 \leq i \leq k-1 \\ \frac{l_{i+1}}{p_{i+1}}, & k+1 \leq i \leq n-1 \end{cases} \quad \bar{u}_i = \begin{cases} \max_{1 \leq j \leq i-1} \left| \frac{u_{j,i}}{p_j} \right|, & 2 \leq i \leq k-1 \\ \frac{\max_{i+1 \leq j \leq n} |u_{i,j}|}{|p_i|}, & k+1 \leq i \leq n-1 \end{cases}$$

かつ $\bar{l} = \max_{\substack{2 \leq i \leq n-1 \\ i \neq k}} \bar{l}_i$ とする。ただし $u_{i,j} = 0$, $i+2 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq n-2$ のときは $\bar{l} = 0$ とする。このとき、 $\bar{l} < 1$ かつ $0 < 4 \max_{\substack{2 \leq i \leq n-1 \\ i \neq k}} (\bar{l}_i \bar{u}_i) \leq (1 - \bar{l})^2$ ならば、

$$0 < \omega_i p_i \leq \frac{1}{1 - \frac{\bar{\omega} \bar{l}_i \bar{u}_i}{1 - \bar{\omega}}} < \bar{\omega}, \quad i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, k+2, \dots, n$$

となる。ここに $1 < \bar{\omega} = \frac{2}{(1+\bar{l}) + \sqrt{(1-\bar{l})^2 - 4 \max_{\substack{2 \leq i \leq n-1 \\ i \neq k}} (\bar{l}_i \bar{u}_i)}} < 2$ である。

さらに $\bar{l}_k = \left| \frac{l_k}{p_k} \right| \max_{1 \leq j \leq k-1} \left| \frac{u_{j,k}}{p_j} \right| + \left| \frac{l_{k+1}}{p_{k+1}} \right| \frac{\max_{k+1 \leq j \leq n} |u_{k,j}|}{|p_k|}$ に対し、 $\bar{\omega}(\bar{l} + \bar{l}_k) < 1$ のとき

$$0 < \omega_k p_k \leq \frac{1 - \bar{\omega} \bar{l}}{1 - \bar{\omega}(\bar{l} + \bar{l}_k)}$$

(証明) まず、Case II_n) の場合を考える。 $\bar{\omega}$ は $\{\bar{l} + \max_{2 \leq i \leq n-1} (\bar{l}_i \bar{u}_i)\} \bar{\omega}^2 - (1 + \bar{l}) \bar{\omega} + 1 = 0$ の小さい方の実根となる。しかも $1 < \bar{\omega} < 2$ かつ

$$\bar{\omega} \leq \frac{2}{1 + \bar{l}} = \frac{2(1 + \bar{l})}{(1 + \bar{l})^2} < \frac{4}{(1 + \bar{l})^2} \leq \frac{1}{\bar{l} + \max_{2 \leq i \leq n-1} (\bar{l}_i \bar{u}_i)}$$

より $\bar{\omega} \bar{l} \leq 2 - \bar{\omega} < 1$ となる。明らかに $0 < \omega_1 p_1 = 1 < \bar{\omega}$ が成り立つ。いま、 $0 < \omega_1 p_1, \omega_2 p_2, \dots, \omega_{i-1} p_{i-1} < \bar{\omega}$, $2 \leq i \leq n-1$ と仮定すると $\omega_i p_i = \frac{1}{q_i}$, ただし

$$q_i = 1 - \frac{l_i}{p_i} (\omega_{i-1} p_{i-1}) \frac{u_{i-1,i}}{p_{i-1}} - \frac{l_i}{p_i} (\omega_{i-1} p_{i-1}) \frac{l_{i-1}}{p_{i-1}} (\omega_{i-2} p_{i-2}) \frac{u_{i-2,i}}{p_{i-2}} - \dots \\ - \frac{l_i}{p_i} (\omega_{i-1} p_{i-1}) \frac{l_{i-1}}{p_{i-1}} (\omega_{i-2} p_{i-2}) \dots \frac{l_2}{p_2} (\omega_1 p_1) \frac{u_{1,i}}{p_1}$$

より、 $0 < \omega_i p_i \leq \frac{1}{1 - \frac{\bar{\omega} l_i \bar{u}_i}{1 - \bar{\omega} \bar{l}}} = \frac{1 - \bar{\omega} \bar{l}}{1 - \bar{\omega} \{ \bar{l} + \max_{2 \leq j \leq n-1} (\bar{l}_j \bar{u}_j) \}} = \bar{\omega}$ を得る。

ここで $\omega_i p_i = \bar{\omega}$ と仮定すると $\bar{l}_i \bar{u}_i = \max_{2 \leq j \leq n-1} (\bar{l}_j \bar{u}_j) > 0$ となるので $\omega_i p_i = \frac{1}{q_i} < \frac{1}{1 - \frac{\bar{\omega} l_i \bar{u}_i}{1 - \bar{\omega} \bar{l}}} = \bar{\omega}$ となり矛盾する。ゆえに $0 < \omega_i p_i < \bar{\omega}$ である。

よって数学的帰納法により $0 < \omega_i p_i < \bar{\omega}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ となる。さらに、 $\bar{\omega}(\bar{l} + \bar{l}_n) < 1$ のとき $0 < \omega_n p_n \leq \frac{1}{1 - \frac{\bar{\omega} l_n}{1 - \bar{\omega} \bar{l}}} = \frac{1 - \bar{\omega} \bar{l}}{1 - \bar{\omega}(\bar{l} + \bar{l}_n)}$ となり、同様にして他の Case II_k), $1 \leq k \leq n-1$ の場合も証明できる。□

系 2.1 Case II_k), $1 \leq k \leq n$ において $\frac{l_i}{p_i} > 0$, $2 \leq i \leq n$ とするとき

i) 定理 2.2 の条件の下で $\frac{u_{i,j}}{p_i} \geq 0$, $i+1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq n-1$ ならば、

$1 \leq \omega_i p_i < 2$, $i = 1, 2, \dots, k-1, k+1, k+2, \dots, n$ である。

ii) $\frac{u_{i,j}}{p_i} \leq 0$, $i+1 \leq j \leq n$, $1 \leq i \leq n-1$ ならば $0 < \omega_i p_i \leq 1$, $i = 1, 2, \dots, n$ である。

$\rho(\mathcal{L}_\Phi) < 1$ となる緩和係数行列 $\Phi = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ の選び方としては例えば [4] の定理 2.4 を参照せよ。

3 非線形方程式に対する応用

次の非線形方程式

$$F(z) = Az + \varphi(z) = 0$$

について、以下のことを仮定する。

A は $n \times n$ 実行列で $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$, $\varphi(z) = (\varphi_1(z_1), \varphi_2(z_2), \dots, \varphi_n(z_n))^T$ とする。 $t \in (-\infty, \infty)$ に対して、 $\varphi_i(t)$ は実でかつ連続的に微分可能で、ある定数 $M_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$ に対し $-M_i \leq \varphi'_i(t) \leq M_i$ とする。 $\bar{D} = \text{diag}(M_1, M_2, \dots, M_n)$ としたとき、行列 $A' = A - \bar{D}$ は正定値行列であり、 $F(z) = 0$ の解 $\hat{z}$ が存在する。

まず、 $1 \leq k \leq n$ についての基本 LUL 分解 $\Phi A = L_1 \bar{U} L_2$ に対する n 回の反復を伴う改良反復法は、任意の出発ベクトル $z^{(0)}$ に対して、

$$\begin{cases} z_{p+1}^{(m)} = z_p^{(m)} - \bar{L}^{-1} \Phi \{A z_p^{(m)} + \varphi(z^{(m)})\}, & p = 0, 1, \dots, n-1 \\ z_0^{(m)} = z^{(m)}, & z^{(m+1)} = z_n^{(m)}, & m = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3)$$

と表される。反復法 (3) に対する収束定理は次の通りである。(cf. Theorem 4.2 in [7])

定理 3.1 上の仮定の下で、反復法 (3) は任意の出発ベクトル $z^{(0)} \in \mathbf{R}^n$ に対して、解 $\hat{z}$ に収束する。

(証明) 定理 1.4 によって、 $A z^{(m+1)} + \varphi(z^{(m)}) = 0$ となる。そこで、解 $\hat{z} = [\hat{z}_i]$ と $z^{(m)} = [z_i^{(m)}]$, $e^{(m)} = z^{(m)} - \hat{z}$ に対して、 $A e^{(m+1)} = \tilde{D}^{(m)} e^{(m)}$ を得る。ここで $\tilde{D}^{(m)} = \text{diag}(\tilde{d}_1^{(m)}, \tilde{d}_2^{(m)}, \dots, \tilde{d}_n^{(m)})$, $\tilde{d}_i^{(m)} = -\int_0^1 \varphi'_i((1-\theta)\hat{z}_i + \theta z_i^{(m)}) d\theta$ である。□

次に行列 A の基本 LUL 分解に対する改良反復法は任意の出発ベクトル $z^{(0)}$ に対し、次のように表される。

$$z^{(m+1)} = z^{(m)} - \bar{L}^{-1} \Phi F(z^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

解 $\hat{z}$ と $e^{(m)} = z^{(m)} - \hat{z}$ に対して、

$$\begin{aligned} e^{(m+1)} &= e^{(m)} - \bar{L}^{-1} \Phi (F(z^{(m)}) - F(\hat{z})) \\ &= \{(I - \bar{L}^{-1} \Phi A) - \bar{L}^{-1} \Phi \int_0^1 \varphi'((1-\theta)\hat{z} + \theta z^{(m)}) d\theta\} e^{(m)} \\ &= (H_\Phi + R_\Phi^{(m)}) e^{(m)} = \tilde{H}_\Phi^{(m)} e^{(m)} \end{aligned}$$

とする。ここで定理 1.4 より、

$$H_\Phi = I - \bar{L}^{-1} \Phi A = L_2^{-1} (I - \bar{U}) L_2, \quad R_\Phi^{(m)} = -\bar{L}^{-1} \Phi \int_0^1 \varphi'((1-\theta)\hat{z} + \theta z^{(m)}) d\theta$$

である。そこで、 $e^{(m)} = \tilde{H}_\Phi^{(m-1)} \tilde{H}_\Phi^{(m-2)} \dots \tilde{H}_\Phi^{(0)} e^{(0)}$, $m = 1, 2, \dots$ となる。

補題 3.1 $H_\Phi^{m_0} = 0$ ならば、

$$\begin{aligned} \|\tilde{H}_\Phi^{(m-1)} \tilde{H}_\Phi^{(m-2)} \dots \tilde{H}_\Phi^{(0)}\|_{L_2} &\leq \left(\frac{m}{\bar{l}} \right) (\bar{a} + \bar{\varepsilon})^{m-\bar{l}} \bar{\varepsilon}^{\bar{l}}, \quad m \geq 1 \quad \text{かつ} \\ \|\tilde{H}_\Phi^{(m-1)} \tilde{H}_\Phi^{(m-2)} \dots \tilde{H}_\Phi^{(m-m_0)}\|_{L_2} &\leq m_0 (\bar{a} + \bar{\varepsilon})^{m_0-1} \bar{\varepsilon} \end{aligned}$$

である。ここで $[x]$ は x を越えない最大の整数、

$$\bar{l} = \left[\frac{m}{m_0} \right] \geq 1, \quad \left(\frac{m}{\bar{l}} \right) = \begin{cases} \frac{m(m-1)\dots(m-\bar{l}+1)}{\bar{l}!}, & \bar{l} > 0 \\ 1, & \bar{l} = 0 \end{cases}$$

であり、さらに、任意の $n \times n$ 行列 Q とノルム $\|\cdot\|$ に対して、 $\|Q\|_{L_2} \equiv \|L_2 Q L_2^{-1}\|$ とおくと、 $\bar{a} = \|H_\Phi\|_{L_2}$ かつ $\bar{\varepsilon} \geq \|R_\Phi^{(m)}\|_{L_2}$ である。

(証明) $\bar{l} \leq r \leq m$ に対して、

$$\begin{aligned} \binom{m}{r} &= \frac{m(m-1)\cdots(m-r+1)}{r!} \\ &= \frac{m(m-1)\cdots(m-\bar{l}+1)}{r(r-1)\cdots(r-\bar{l}+1)} \frac{(m-\bar{l})(m-\bar{l}-1)\cdots\{(m-\bar{l})-(r-\bar{l})+1\}}{(r-\bar{l})!} \\ &\leq \frac{m(m-1)\cdots(m-\bar{l}+1)}{\bar{l}!} \binom{m-\bar{l}}{r-\bar{l}} = \binom{m}{\bar{l}} \binom{m-\bar{l}}{r-\bar{l}} \end{aligned}$$

仮定より $0 \leq l \leq \bar{l}-1$ に対して、 $m-l \geq m_0 l + m_0$ かつ $m-\bar{l} < m_0 \bar{l} + m_0$ となるので

$$\begin{aligned} \|\tilde{H}_{\Phi}^{(m-1)} \tilde{H}_{\Phi}^{(m-2)} \cdots \tilde{H}_{\Phi}^{(0)}\|_{L_2} &\leq (\bar{a} + \bar{\varepsilon})^m - \{\bar{a}^m + \binom{m}{1} \bar{a}^{m-1} \bar{\varepsilon} + \cdots + \binom{m}{\bar{l}-1} \bar{a}^{m-\bar{l}+1} \bar{\varepsilon}^{\bar{l}-1}\} \\ &= \binom{m}{\bar{l}} \bar{a}^{m-\bar{l}} \bar{\varepsilon}^{\bar{l}} + \binom{m}{\bar{l}+1} \bar{a}^{m-\bar{l}-1} \bar{\varepsilon}^{\bar{l}+1} + \cdots + \binom{m}{m} \bar{\varepsilon}^m \\ &\leq \binom{m}{\bar{l}} \left\{ \binom{m-\bar{l}}{0} \bar{a}^{m-\bar{l}} + \binom{m-\bar{l}}{1} \bar{a}^{m-\bar{l}-1} \bar{\varepsilon} + \cdots \right. \\ &\quad \left. + \binom{m-\bar{l}}{m-\bar{l}} \bar{\varepsilon}^{m-\bar{l}} \right\} \cdot \bar{\varepsilon}^{\bar{l}} \\ &= \binom{m}{\bar{l}} (\bar{a} + \bar{\varepsilon})^{m-\bar{l}} \bar{\varepsilon}^{\bar{l}} \end{aligned}$$

これより結果を得る。 $\square$

注意 3.1 ノルム $\|\cdot\|$ は $\|I - \bar{U}\|$ をできるだけ小さくするようにとすることに注意する。

定理 3.2 補題 3.1 で $\bar{\varepsilon}_1 = m_0(\bar{a} + \bar{\varepsilon})^{m_0-1} \bar{\varepsilon} < 1$ と仮定する。このとき、反復法(4)は任意の出発ベクトル $z^{(0)}$ に対して、解 $\hat{z}$ に収束する。

(証明) 補題 3.1 より、 $\|e^{(m)}\|_{L_2} \leq K \bar{\varepsilon}_1^{\lfloor \frac{m}{m_0} \rfloor}$ を得る。ここで、 K は次の通りである。

$$K = \max(1, \|\tilde{H}_{\Phi}^{(0)}\|_{L_2}, \|\tilde{H}_{\Phi}^{(1)} \tilde{H}_{\Phi}^{(0)}\|_{L_2}, \dots, \|\tilde{H}_{\Phi}^{(m_0-1)} \tilde{H}_{\Phi}^{(m_0-2)} \cdots \tilde{H}_{\Phi}^{(0)}\|_{L_2})$$

$\square$

次の半線形 2 点境界値問題を考える。

$$\begin{cases} -\varepsilon u''(x) - a(x)u'(x) + f(x, u) = 0, & 0 < x < 1 \\ u(0) = \gamma_0, & u(1) = \gamma_1 \end{cases}$$

ここで ε は $(0, 1]$ 内のパラメーターで関数 a と f は C^1 級で ε に独立である。さらに $0 \leq \underline{c}(x) \leq f_u(x, u) \leq \bar{c}(x)$ とする。

正数 n について分割幅を $h = 1/(n+1)$ とし、 $[0, 1]$ 内の点は $x_i = ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, n+1$ とする。そこで、次の非線形差分方程式を得る。

$$\begin{cases} -l_i z_{i-1} + p_i z_i - u_i z_{i+1} + \varphi_i(z_i) = 0, & 1 \leq i \leq n \\ z_0 = \gamma_0, & z_{n+1} = \gamma_1 \end{cases}$$

ここで $a_i = a(ih)$, $f_i(z_i) = f(ih, z_i)$, $\underline{c}_i = \underline{c}(ih)$ と $\bar{c}_i = \bar{c}(ih)$ に対して

$$\begin{cases} l_i = \varepsilon + \frac{h}{2}(|a_i| - a_i), & p_i = 2\varepsilon + h|a_i| + \frac{h^2}{2}(\underline{c}_i + \bar{c}_i), \\ u_i = \varepsilon + \frac{h}{2}(|a_i| + a_i), & \varphi_i(z_i) = h^2 f_i(z_i) - \frac{h^2}{2}(\underline{c}_i + \bar{c}_i)z_i \end{cases}$$

自然な順序をとるとき、上の方程式は $F(\mathbf{z}) \equiv A\mathbf{z} + \varphi(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$ となる。ここで $A = [-l_i, p_i, -u_i]$ と $A' = [-l_i, p_i - \frac{h^2}{2}(\underline{c}_i + \bar{c}_i), -u_i]$ は $n \times n$ 正定値三重対角行列であり、それぞれ $l_i, u_i \geq 0$, $l_i + u_i = p_i - \frac{h^2}{2}(\underline{c}_i + \bar{c}_i) \leq p_i$ である。また $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \dots, z_n)^T$ に対し、 $\varphi(\mathbf{z}) = (\varphi_1(z_1), \varphi_2(z_2), \dots, \varphi_n(z_n))^T$, $F(\mathbf{z}) = (F_1(\mathbf{z}), F_2(\mathbf{z}), \dots, F_n(\mathbf{z}))^T$ である。

$t \in (-\infty, \infty)$ に対して $\varphi_i(t)$ は実かつ連続的に微分可能で、 $-\frac{h^2}{2}(\bar{c}_i - \underline{c}_i) \leq \varphi'_i(t) \leq \frac{h^2}{2}(\bar{c}_i - \underline{c}_i)$ である。

最後に、行列 A の LUL 分解に対する反復法 (4) の収束定理を得る。

定理 3.3 上の仮定から、もし $\frac{l_{i+1}}{p_{i+1}}, \frac{u_i}{p_i} \leq \frac{1}{2}$, $1 \leq i \leq n-1$ かつ $ce^c < 1$ 、ただし $c = 2 \max_{1 \leq i \leq n} \{(\bar{c}_i - \underline{c}_i)/p_i\}$ ならば、反復法 (4) は任意の出発ベクトル $\mathbf{z}^{(0)} \in \mathbf{R}^n$ に対して、解 $\hat{\mathbf{z}}$ に収束する。

(証明) 仮定と定理 1.2 と定理 2.2 より $0 < \omega_i p_i < \bar{\omega} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4 \max_{1 \leq j \leq n-1} \frac{l_{j+1}}{p_{j+1}} \frac{u_j}{p_j}}} \leq 2$ 。

$$\|H_\Phi\|_{L_2} = \|I - \bar{U}\| \leq \max_{1 \leq i \leq n-1} |(\omega_i p_i) \frac{u_i}{p_i}| \leq 1, \quad R_\Phi^{(m)} = -\bar{L}^{-1} \Phi \int_0^1 \varphi'((1-\theta)\hat{\mathbf{z}} + \theta \mathbf{z}^{(m)}) d\theta$$

$$\|R_\Phi^{(m)}\|_{L_2} \leq \|\bar{L}_1^{-1} \Phi \int_0^1 \varphi'((1-\theta)\hat{\mathbf{z}} + \theta \mathbf{z}^{(m)}) d\theta \bar{L}_2^{-1}\| \leq \frac{c}{n}$$

ここで、ノルム $\|\cdot\|$ はスペクトルノルムで Euclid vector norm から導かれる。

$$\bar{a} \leq 1, \quad \bar{\varepsilon} \leq \frac{c}{n} \quad \text{かつ} \quad \bar{\varepsilon}_1 \leq (1 + \frac{c}{n})^{m_0-1} \frac{m_0}{n} c < e^{\frac{m_0}{n} c} \frac{m_0}{n} c \leq e^c c < 1$$

となり、定理 3.2 の仮定は満たされる。 $\square$

参考文献

- [1] J. J. Buoni and R. S. Varga, Theorems of Stein-Rosenberg type, in Numerical Mathematics (R. Ansorge, K. Glashoff, and B. Werner, eds) Birkhauser, Basel, (1979), 65-75.
- [2] I. Duff, A. M. Erisman, and J. K. Reid, Direct Methods for Sparse Matrices, Clarendon Press, Oxford, (1986).
- [3] E. Ishiwata and Y. Muroya, Improved SOR method with orderings and direct methods, Tech. Report 95-34, Waseda University (1995).
- [4] E. Ishiwata and Y. Muroya, Main convergence theorems for the improved SOR method with orderings, Tech. Report 95-42, Waseda University (1995).
- [5] E. Ishiwata and Y. Muroya, Precise error estimates of the improved SOR method with orderings for tridiagonal matrices, Tech. Report 95-43, Waseda University (1995).
- [6] E. Ishiwata, Y. Muroya and K. Isogai, Adaptive improved SOR method with orderings, Tech. Report 96-7, Waseda University (1996).
- [7] E. Ishiwata and Y. Muroya, Improved SSOR method with orderings and its applications, Tech. Report 96-25, Waseda University (1996).
- [8] Wilkinson, The Algebraic Eigenvalue Problem, Oxford University Press (1965).