

修士論文 (2006年度)

遷音速流を用いた擬似ブラックホールに関する研究 —ブラックホール物理の実証実験へ向けて—

京都大学大学院 人間・環境学研究科 相関環境学専攻

奥住 聡*

概要

ブラックホール時空は、一般相対性理論の効果が最も顕著に現れる時空構造である。そのため、これまでにブラックホールが引き起こすとされる興味深い現象が数多く予言されてきた。しかしながら、これらの現象の多くは観測から直接実証することが非常に困難である。

近年、これらの観測困難な現象を実験室で間接的に実証するためのモデルとして、「音響ブラックホール」と呼ばれる擬似ブラックホールが提案されてきた。ブラックホールの本質は、光を一方方向にしか通さない「ホライズン」と呼ばれる構造を持つことである。これに対し「音響ブラックホール」とは、このホライズンの性質を「光」から「音」に置き換え、音を一方方向にしか通さない音速点を持つ流れ、すなわち遷音速流を利用するものである。

本論文では、(1) ブラックホールの量子論的な粒子生成現象である「Hawking 輻射」と、(2) ブラックホールの放出する重力波を特徴づける「準固有振動」の2つに注目し、これらの現象を音響ブラックホールを用いて実証するための方法論を議論する。まず、(1)Hawking 輻射については、輻射スペクトルがホライズン近傍における古典波の「引き延ばし」によって決まることを利用し、音速点近傍で変形を受けた音波の波形から Hawking 輻射のスペクトルを検証できることを示す。一方、(2) 準固有振動については、遷音速流がブラックホールと同様に準固有振動モードを持つことを示し、実験において効率良くシグナルを検出するための方法について論じる。

目次

1 導入	239
2 「音のブラックホール」としての遷音速流	240
3 Hawking 輻射	249

*E-mail: okuzumi.phys@ybb.ne.jp

4	遷音速流を用いた Hawking 輻射の検証	257
5	準固有振動	268
6	流体の準固有振動	283
7	まとめ	297
A	計量テンソル	298
B	Schwarzschild 時空	299
C	Penrose ダイアグラム	303
D	WKB 近似法	306
E	Pöschl-Teller ポテンシャルの散乱問題	310

1 導入

ブラックホールは、一般相対性理論の効果が最も顕著に現れる天体である。そのため、これまでにブラックホールが引き起こすとされる興味深い現象が数多く予言されてきた。ブラックホールに関連する現象のうち、最も驚くべきものと言えるのが、1974年に Hawking によって予言されたブラックホールの熱輻射 (Hawking 輻射) である [7]。これは、古典的にはいかなるものも脱出できないとされるブラックホールも、ブラックホール時空上での物質場の量子論を考えると、Planck 分布に従う熱輻射を放出するというものである。このことは、ブラックホールに対して熱力学が適用できることを示唆する。しかし、残念なことに、ブラックホールの一般相対論的効果が顕著に現れる現象の多くは、観測から直接実証することが非常に困難である。Hawking 輻射を例に挙げると、現実的なブラックホール天体からの Hawking 輻射はその輻射温度が高々 nK オーダーと考えられるため、これを直接観測することは事実上不可能である。

ところが、1981 年になって、Hawking 輻射を実験によって検証する方法が Unruh によって提案された [23]。Unruh は、音速点を持つような流体の流れ (遷音速流) の中を伝播する音波の満たす波動方程式がブラックホール時空上でのスカラー場の波動方程式と等価であることを発見し、遷音速流中ではブラックホールと同様にフォノンの粒子生成が起こることを指摘した。これはつまり、「光」と「音」とを対応付けて考えると、超音速流はブラックホール領域に、そして音速点はブラックホールのホライズンに対応しているとみなすことができるということである。このような文脈において、遷音速流のことを「音響ブラックホール (acoustic black hole)」と呼ぶことがある [25]。

この「音響ブラックホール」の最大の魅力は、直接観測することが困難なブラックホールの現象を、実験を通じて実証することができるという点にある。京都大学大学院人間・環境学研究科の我々のグループは、工学研究科の熱工学研究室と共同し、Laval 管の中に

実現される大気の変音速流を用いて Hawking 輻射を実証する実験を 2002 年より行ってきた。これまでの実験の結果は、高野健介、北里渉の両氏の修士論文にまとめられている [29, 26]。現状では、ノイズが興味あるシグナルを覆ってしまっており、実験の成功には至っていない。

本論文では、これまでに実験の対象としてきた Hawking 輻射に加えて、ブラックホールの純粋に古典的な現象として知られる準固有振動を取り上げ、これらの現象の物理機構を解説するとともに、これらに対応する音波の現象を変音速流上で実現するための方法について議論する。ブラックホールの準固有振動は、近年世界のいくつかのグループで試みられている重力波観測と、宇宙物理学あるいは天文学とを結びつけるであろう重要な現象であり、これを「音響ブラックホール」で考えることは、準固有振動の理論の検証に寄与するのみならず、重力波観測の手法に対しても実験的なアプローチから何らかの提言を行うことにつながる可能性がある。

本論文の構成は以下の通りである。まず、2 章では、ブラックホールと変音速流がどのように対応しているのかを解説し、実験室で変音速流を形成するための装置である Laval 管を紹介する。3 章では、ブラックホールの Hawking 輻射についての解説を行い、その本質がホライズン近傍での古典的な波の指数関数的な赤方偏移にあることを述べる。4 章では変音速流を用いた Hawking 輻射の検証の方法を紹介し、著者が学部在学時に卒業研究として行った数値実験の結果から、装置による実験の改善に関する提案を行う。5 章では準固有振動の理論について概説し、続いて 6 章では著者の行った数値シミュレーションの結果から変音速流の持つ準固有振動について議論する。

2 「音のブラックホール」としての変音速流

本章では、変音速流がブラックホール時空とどのように対応付けられるのかを概観する。まず、文献 [23] のレビューとして、非一様に流れる完全流体中を伝播する音波の波動方程式を導出し、変音速流中を伝わる音波がブラックホール時空上を伝播する無質量スカラー場と同一視できることを示す。続いて、変音速流を形成するための装置である Laval 管を紹介し、断面積の変化と流れの変化の関係について議論する。

2.1 非一様な完全流体流中での音波の波動方程式

完全流体の基礎方程式系は、保存形式で書くと以下の 3 つ（連続の式、運動量保存則、エネルギー保存則）から成る¹。

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho v) = 0 \quad (2.1)$$

$$\partial_t (\rho v) + \nabla \cdot (\rho v v + p I) = 0 \quad (2.2)$$

$$\partial_t \mathcal{E} + \nabla \cdot [(\mathcal{E} + p)v] = 0 \quad (2.3)$$

¹本論文では、偏微分を ∂_t , ∂_x などで表記する。

ここで、 ρ , v , p , S はそれぞれ流体の密度、流速、圧力、エントロピー密度であり、 I は単位行列である。また、

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{p}{\gamma-1} \quad (2.4)$$

はエネルギー密度、 γ は比熱比であり、大気では $\gamma = 1.4$ である。運動量保存則 (2.2) の代わりに、(2.24) と (2.2) から導かれる Euler 方程式

$$\partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (2.5)$$

を使うこともできる。さらに、考えている領域全体にわたって等エントロピーであれば、式 (2.3) は等エントロピー関係式

$$p\rho^{-\gamma} = \text{const.} \quad (2.6)$$

で置き換えることができる。

次に、非一様な流れ中を伝播する音波の波動方程式を導く。等エントロピー流を仮定すると、Euler 方程式 (2.5) は

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\frac{c_s^2}{\rho} \nabla \rho \\ &= -\nabla h \end{aligned}$$

と書き換えられる。ここで

$$c_s^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{\gamma p}{\rho} \quad (2.7)$$

$$h = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{c_s^2 d\rho}{\rho} = \frac{c_s^2}{\gamma-1} \quad (2.8)$$

と定義した。 h は単位質量当りのエンタルピーであり、 c_s は一様静止流体中での音速である。さらに渦なし $\nabla \times \mathbf{v} = 0$ を仮定して速度ポテンシャル Φ を $\mathbf{v} = \nabla \Phi$ により導入すると、Euler 方程式からエネルギー積分 (Bernoulli 方程式)

$$\partial_t \Phi + \frac{1}{2}v^2 + h = 0 \quad (2.9)$$

が得られる。

いま、独立な物理量を (ρ, Φ) にとり、これらを背景流成分と摂動成分に分解する。

$$\rho = \rho_0 + \rho_1 \quad , \quad |\rho_1| \ll \rho_0 \quad (2.10)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \phi \quad , \quad |\nabla \phi| \ll |\nabla \Phi_0| \quad (2.11)$$

これらを連続の式 (2.1) と Bernoulli 方程式 (2.9) に代入することにより、背景流の発展方程式

$$\partial_t \rho_0 + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_0) = 0 \quad (2.12a)$$

$$\partial_t \Phi_0 + \frac{1}{2}v_0^2 + h_0 = 0 \quad (2.12b)$$

及び摂動方程式

$$\partial_t \psi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \psi + \Delta \phi + \nabla \ln \rho_0 \cdot \nabla \phi = 0 \quad (2.13a)$$

$$\partial_t \phi + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \phi + c_s^2 \psi = 0 \quad (2.13b)$$

が得られる。ここで $\psi = \rho_1/\rho_0$, $\mathbf{v}_0 = \nabla \Phi_0$ である。

さらに、摂動方程式 (2.13) から ψ を消去することにより、速度ポテンシャル摂動 ϕ に対する波動方程式

$$\left[\left(\partial_t + \nabla \cdot \mathbf{v}_0 \right) \frac{\rho_0}{c_s^2} \left(\partial_t + \mathbf{v}_0 \cdot \nabla \right) - \nabla (\rho_0 \nabla) \right] \phi(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (2.14)$$

が導かれる。この波動方程式は、流れの無い場における波動方程式

$$\left[\frac{1}{c_s^2} \partial_t^2 - \Delta \right] \phi(t, \mathbf{x}) = 0 \quad (2.15)$$

を、非一様な流れを持つ場に一般化したものである。

以下では、表記の簡単化のため、背景流の物理量の下付添え字 '0' を省略する。

2.2 遷音速流とブラックホール時空との対応

前節で導いた音波 ϕ に対する波動方程式 (2.14) は、次のように書き表すことができる。

$$\partial_\mu f^{\mu\nu} \partial_\nu \phi(x) = 0 \quad (2.16)$$

$$x = (t, \mathbf{x}) \quad (2.17)$$

$$f^{\mu\nu} \equiv \frac{\rho}{c_s^2} \begin{pmatrix} -1 & -v^i \\ -v^j & c_s^2 \delta^{ij} - v^i v^j \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

ここで、曲がった時空上での無質量スカラー場 $\Phi(x)$ の波動方程式 (補足 A 参照)

$$\square \Phi \equiv \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \Phi = 0 \quad (2.19)$$

を思い出すと、(2.16) と (2.19) は類似していることがわかる。そこで、

$$f^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g_{(\text{ac})}} g_{(\text{ac})}^{\mu\nu}, \quad g_{(\text{ac})} \equiv 1/\det(g_{(\text{ac})}^{\mu\nu}) \quad (2.20)$$

とおき、 $g_{(\text{ac})}^{\mu\nu}$ の逆行列 $g_{\mu\nu}^{(\text{ac})} \equiv (g_{(\text{ac})}^{\mu\nu})^{-1}$ を計算すると、

$$g_{\mu\nu}^{(\text{ac})} = \frac{\rho}{c_s} \begin{pmatrix} -(c_s^2 - v^2) & -v^i \\ -v^j & \delta_{ij} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

が得られる。これは、音波の波動方程式 (2.16) が、計量が $g_{\mu\nu} \propto g_{\mu\nu}^{(\text{ac})}$ で表されるような時空上を伝播するスカラー場の波動方程式と完全に等価であることを意味している。つまり、非一様な背景流上を伝播する音波は、ある曲がった時空上でのスカラー場と完全に

同一視することができるのである。この音波にとっての“計量” $g_{\mu\nu}^{(\text{ac})}$ はしばしば「音響計量」(acoustic metric) と呼ばれる²。

最も興味深いのは流れが遷音速流の場合、つまり流れが音速点を持つ場合である。簡単のため、定常な 1 次元遷音速流を考え、 $v = (v(x), 0, 0)$ とする。このとき、音響計量は

$$\begin{aligned} ds_{(\text{ac})}^2 &\equiv g_{\mu\nu}^{(\text{ac})} dx^\nu dx^\mu \\ &= \frac{\rho}{c_s} \left[-\left(1 - \frac{v^2}{c_s^2}\right) c_s^2 dt^2 - 2v dt dx + ds_{E^3}^2 \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

となる。ここで、 $ds_{E^3}^2$ は 3 次元 Euclid 空間の計量である。一方、Schwarzschild 時空の計量を Painlevé-Gullstrand 座標表示したものは、補足 B.2 より

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt_p^2 + 2\sqrt{\frac{r_g}{r}} dt_p dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (B.10)$$

$$= -\left(1 - \frac{v_{\text{ff}}^2}{c^2}\right) c^2 dt_p^2 - 2v_{\text{ff}} dt_p dr + ds_{E^3}^2 \quad (2.23)$$

と書ける。ここで、 v_{ff} は補足 B.1 で定義した“自由落下速度”である。(2.22) と (2.23) を比較すると、音響計量 $ds_{(\text{ac})}^2$ の共形因子 ρ/c_s を無視すれば、これらの間には

$$v \text{ (流体の速度)} \quad \Leftrightarrow \quad v_{\text{ff}} \text{ (自由落下速度)} \quad (\text{I})$$

$$t \text{ (実験室系の時間)} \quad \Leftrightarrow \quad t_p \text{ (Painlevé - Gullstrand 時間)} \quad (\text{II})$$

$$c_s \text{ (音速)} \quad \Leftrightarrow \quad c \text{ (光速)} \quad (\text{III})$$

という対応があることがわかる。そして、最も重要なことに、遷音速流の音速点 ($|v| = c_s$) がブラックホールのホライズン ($r = r_g$) に、超音速領域 ($|v| > c_s$) がブラックホール領域 ($r < r_g$) に、それぞれ対応していることがわかる。これらの対応関係に注目するとき、遷音速流は「音響ブラックホール (acoustic black hole)」と呼ばれる [25]。

上に挙げた 3 つの対応関係 (I), (II), (III) は、遷音速流中を流れとともに移動する観測者と、ブラックホール時空上を自由落下する観測者とを同一視することによって、統一的に理解することが可能である。まず、流体とともに移動する観測者の移動速度は流速 v に等しいので、このような観測者の運動を“自由落下”と考えれば対応 (I) が理解できる。また、流体系では観測者の時間は運動速度に関わらず実験室系の時間 t に一致するが、ブラックホール時空上を自由落下する観測者の固有時間に一致するのは Painlevé-Gullstrand 時間 t_p であった (補足 B.2 参照)。このことから対応 (II) が理解できる。さらに、局所流体静止系では音波は音速 c_s の速さをもって伝搬するが、これは一般相対性原理、すなわち「局所慣性系において光は光速 c の速さで伝搬する」の“音響版”とみなすことができる。このことから対応 (III) が理解できる。

²但し、音響計量は無次元でなくとも良い。音響計量は時空上の線素 ds^2 との関係を持たないからである。同様の理由で、 $ds_{(\text{ac})}^2$ の次元も任意である。

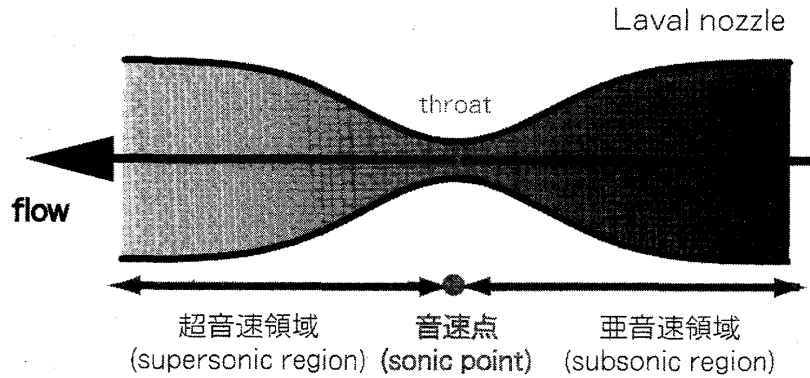


図 2.1: Laval 管の模式図。両端に十分な圧力差をかけると、スロート (throat) に音速点が発生され、遷音速流が構成される。

2.3 Laval 管中に形成される遷音速流

前節では、遷音速流中を伝播する音波がブラックホール時空上でのスカラー場と同一視できることを示した。この節では、実験室上で遷音速流を形成するための装置である Laval 管について論じる。

2.3.1 Laval 管とは何か

Laval 管 (Laval nozzle) とは、中央部がくびれた風洞の総称である [31]。Laval 管の模式図を図 2.1 に示す。Laval 管の最もくびれた部分はスロート (throat) と呼ばれる。後の節で示すように、Laval 管の両端に十分な圧力差をかけると、スロートに音速点が発生され、管の中に遷音速流が実現される。また、音速点は両端の圧力差によらずに常にスロートの部分に形成される。Laval 管は、ジェットエンジンなどの推進装置に広く用いられている。

2.3.2 準 1 次元完全流体の基礎方程式

管の断面積の変化が十分に緩やかなとき、管の中を流れる流体を特徴付ける量（密度、圧力、流速）は各断面で一定で、かつ流線の方法は常に管の中心軸の方法に平行であるとみなすことができる。このような流れのことを準 1 次元流、あるいはより簡単に 1 次元流と呼ぶ。管の中の流れを準 1 次元流とみなす近似は、各断面の上で流れの量を平均化する近似ということもできる。

準 1 次元完全流体の基礎方程式系は、保存形式では次の 3 つから成る。

$$\partial_t(\rho A) + \partial_x(\rho v A) = 0 \quad (2.24)$$

$$\partial_t(\rho v A) + \partial_x[(\rho v^2 + p)A] = 0 \quad (2.25)$$

$$\partial_t(\mathcal{E} A) + \partial_x[(\mathcal{E} + p)v A] = 0 \quad (2.26)$$

ここで A は管の断面積である。運動量保存則 (2.25) の代わりに、(2.24) と (2.25) から導かれる 1 次元 Euler 方程式

$$\partial_t v + v \partial_x v = -\frac{1}{\rho} \partial_x p \quad (2.27)$$

を使うこともできる。(2.27) は上の 3 式と違い、断面積 A を含まない。

以下では、断面積 A は時間的に変化しないものとする。

2.3.3 定常・等エントロピー流の関係式

流れが定常かつ等エントロピーの場合は、全ての物理量を Mach 数の関数で表すことができる。さらに Mach 数は後で示す「断面積-Mach 数関係式」によって断面積 A と関係付けられるので、この場合は全ての物理量が断面積の関数として求められるようになる。

まず、Euler 方程式 (2.27) を空間方向に積分し、Bernoulli 方程式

$$\frac{1}{2}v^2 + h = \frac{1}{2}v^2 + \frac{c_s^2}{\gamma - 1} = \text{const.} \quad (2.28)$$

を得る。(2.9) の最右辺は任意の点で評価することができるが、これを**滞り点 (stagnation point)**、すなわち流速 $v = 0$ の点で評価するのが便利である。滞り点での物理量（「滞り点物理量」と呼ぶ）を下付き添え字「 $\bullet$ 」で表すことにすると、(2.9) より、

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{c_s^2}{\gamma - 1} = \frac{c_{s\bullet}^2}{\gamma - 1} \quad (2.29)$$

あるいは

$$c_s = c_{s\bullet} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1/2} \quad (2.30)$$

が得られる。ここで、 $M \equiv |v|/c_s$ は Mach 数である³。この関係式は、無次元化された音速 $c_s/c_{s\bullet}$ が Mach 数 M のみの関数であることを示している。さらに等エントロピー関係式 (2.6) を用いると、同様の関係式

$$p = p_{\bullet} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-\gamma/(\gamma - 1)} \quad (2.31)$$

$$\rho = \rho_{\bullet} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right)^{-1/(\gamma - 1)} \quad (2.32)$$

が得られる。逆に、定常・等エントロピー流が先に与えられていれば、これらの関係式から滞り点物理量 $c_{s\bullet}$, $p_{\bullet}$, $\rho_{\bullet}$ を求めることができる。

(2.9) の最右辺を音速点、すなわち $M = 1$ の点で評価すると、別の有用な式が得られる。音速点における物理量を下付き添え字「 $*$ 」で表すことにすると、音速点では $v_* = c_{s*}$ なので

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{c_s^2}{\gamma - 1} = \frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} c_{s*}^2 \quad (2.33)$$

³本論文では、Mach 数 M は流れの方向に関わらず正にとるものとする。

となる。これと (2.29) とを比べると、

$$\frac{c_{s*}^2}{c_{s\bullet}^2} = \frac{2}{\gamma + 1} \quad (2.34)$$

が得られる。同様に、

$$\frac{p_*}{p_\bullet} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\gamma/(\gamma-1)} \quad (2.35)$$

$$\frac{\rho_*}{\rho_\bullet} = \left(\frac{2}{\gamma + 1} \right)^{1/(\gamma-1)} \quad (2.36)$$

も得られる。

2.3.4 断面積と Mach 数の関係

前節までの関係式を用いることで、本章のはじめに述べた Laval 管の流れを説明することができる。前節のように、流れは定常かつ等エントロピーであると仮定する。流れが定常であることから連続の式 (2.24) は

$$d(\rho v A) = 0 \quad (2.37)$$

となる。ここで記号 d は空間方向への微分を表す。さらにこの式の両辺を $\rho v A$ で割ると、

$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0 \quad (2.38)$$

が得られる。一方、定常・等エントロピー流の Euler 方程式 (2.5)

$$v dv + dh = v dv + c_s^2 \frac{d\rho}{\rho} = 0 \quad (2.39)$$

より、

$$\frac{d\rho}{\rho} = -M^2 \frac{dv}{v} \quad (2.40)$$

が導かれる。これを用いて (2.38) から $d\rho/\rho$ を消去すると、断面積変化率 dA/A の微分と流速変化率 dv/v の微分との間の関係式

$$\frac{dv}{v} = -\frac{1}{1 - M^2} \frac{dA}{A} \quad (2.41)$$

が得られる。

この関係式から、Laval 管のような断面積の変化する管の中の流れに関する 2 つの重要な性質が導かれる。まず第一に、流れが亜音速 ($M < 1$) または超音速 ($M > 1$) のいずれの状態にあるかで、流速の変化は断面積の変化に対して正反対の応答を示す。すなわち、亜音速領域では断面積が減少する方向に向かって流速は増加し、逆に超音速領域では断面

積が増加する方向に向かって流速は増加する。第二に、断面積が極値をとる点 ($dA = 0$) では、流速も極値をとるか ($dv = 0$) 音速点が形成される $M = 1$ かのいずれかである。

これらの性質は次のように理解することができる。変形された Euler 方程式 (2.40) を見ると、密度減少率と流速増加率の大小は Mach 数 M によって決まることがわかる。すなわち、 $M < 1$ では流速の増加に比べて密度の減少のほうが小さく、逆に $M > 1$ では流速の増加率よりも密度の減少率のほうが大きくなる。これは、Mach 数が「圧縮性の指標」と呼ばれる所以である。つまり、亜音速領域では流れはほとんど非圧縮なので、流量保存則 (2.37) より、断面積が減少すると流速は増加する。逆に、超音速領域では流れは強い圧縮性をもつので、断面積が減少すると圧縮されて密度が増加し、熱エネルギーが増加した分だけ流速は減少する。

ここで、関係式 (2.41) を用いて Laval 管の中の定常流を解析してみる。まず、十分上流側で流れは亜音速 ($M < 1$) とする。すると、流体が Laval 管の中へ進むにつれて断面積は減少する ($dA < 0$) ので、流速は増加する ($dv > 0$)。流速の増加は断面積が最小となるスロートまで続く。スロートでは $dA = 0$ なので、流れは亜音速のまま流速の増加を止める ($dv = 0$) か音速点を形成する ($M = 1$) かのどちらかである。前者の場合、スロートより奥では流速は減少することになり、従って Laval 管の中にはいたるところ亜音速の流れ⁴が実現される。後者の場合は、逆にスロートの奥で流れは超音速流になり、Laval 管の中の流れは遷音速流になる。

上のような定性的な議論では、亜音速流と遷音速流がどのように選択されるのか明らかではない。そこで以下では、前節で導いた定常・等エントロピー関係式を用いて、Laval 管の断面積と流れの量との間の定量的な関係式を導くことにする。連続の式 (2.24) の右辺を音速点で評価すると、

$$\rho v A = \rho_* v_* A_* = \rho_* c_{s*} A_* \quad (2.42)$$

となる。この式は、管の中で音速点が実際に実現されていない場合にも有効である。その場合、 A_* は実際には実現されない「仮想的な」断面積とする。スロートに音速点が形成される場合は A_* はスロートの断面積そのものである。(2.42) を書き直すと、

$$\frac{A}{A_*} = \frac{\rho_* c_{s*}}{\rho v} = \frac{\rho_* \rho_* c_{s*}}{\rho_* \rho v} \quad (2.43)$$

となる。これに (2.36), (2.32), (2.33) を代入して書き換えると、断面積-Mach 数関係式

$$\left(\frac{A}{A_*}\right)^2 = \frac{1}{M^2} \left[\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)} \quad (2.44)$$

が得られる [31]。また、(2.35) を用いて Mach 数 M を p/p_* で書き換えれば、断面積-圧力関係式

$$\left(\frac{A_*}{A}\right)^2 = \frac{\left[1 - \left(\frac{p}{p_*}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right] \left(\frac{p}{p_*}\right)^{2/\gamma}}{\frac{\gamma-1}{2} \left(\frac{2}{\gamma+1}\right)^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}} \quad (2.45)$$

⁴本論文ではこれをより単純に「亜音速流」と呼ぶ。

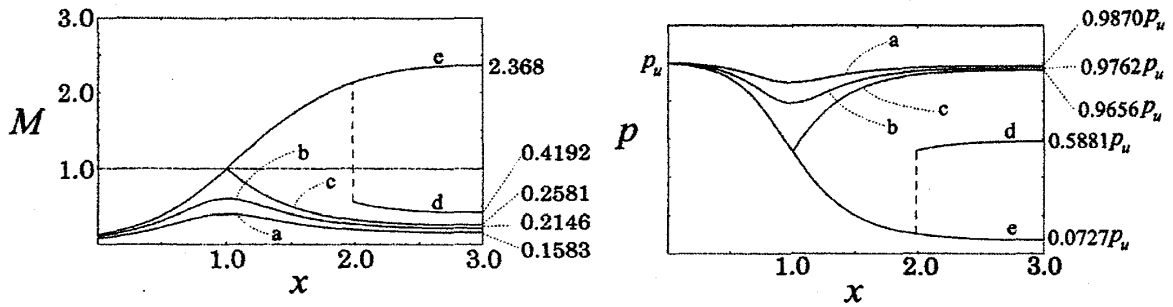


図 2.2: Laval 管中に実現される定常流の Mach 数分布 (上図) と圧力分布 (下図) の数値計算例 (a-e)。流体は大気 ($\gamma = 1.4$) を仮定している。Laval 管の形状は a-e で常に一定であり、スロートの位置は $x = 1.0$ である。この図では流体は x 軸の正の方向に流れていることに注意。管の両端の圧力差が十分小さいとき、流れはいたるところ亜音速である (a,b)。圧力差が一定の大きさに達するとスロートにおいて音速点が形成され (c)、さらに圧力差を上げるとスロートより下流は超音速流になる (d,e)。遷音速状態中では、圧力差に応じてスロートより下流に定常衝撃波が形成されるが (d の破線)、衝撃波より上流側の流れのプロファイルは変化せず、従って音速点も常にスロートに形成される。文献 [18] より引用。

も得られる。

(2.44) と (2.45) より、Laval 管の中にどのような流れが実現されるかは、Laval 管の両端にかかる圧力差によって決まることがわかる。まず、上流の stagnation 点圧 p_* を固定すると、流れのプロファイル $M(x)$, $p(x)/p_*$ は $A(x)/A_*$ のみに依存する関数として決まるようになる。また、 A_* はまだ決まっていない量なので、 A_* の値が Laval 管の中の流れの種類をきめるパラメータであることがわかる。 A_* の値は、Laval 管の下端にかかる圧力を p_E とすれば、(2.45) に p_E と下端の断面積 A_E を代入することで決めることができる。すなわち、 A_* は

$$A^* = A_E \frac{\left[1 - \left(\frac{p_E}{p_*} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} \right]^{1/2} \left(\frac{p_E}{p_*} \right)^{1/\gamma}}{\left(\frac{\gamma-1}{2} \right)^{1/2} \left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{(\gamma+1)/2(\gamma-1)}} \quad (2.46)$$

から決まる。この式より、 A^* は p_E/p_* の単調減少関数である。

図 2.2 は、(2.44), (2.45), (2.46) から計算される定常流プロファイルの例である。上下端の圧力比 p_E/p_* が 1 に十分近い場合は $A^* < A_T$ となり、流れはいたるところ亜音速になる。 p_* を固定して p_E を下げていくと A^* は増加していき、スロートにおける Mach 数は 1 に近づく。そして、 p_E をある値まで下げると $A^* = A_T$ となり、スロートに音速点が形成される。いったん音速点が形成されると、上流の流れは下流での圧力変化を“知る”ことができなくなるので、これ以上 p_E を減少させても上流側のプロファイルは変化しなくなる。このように、音速点が形成されると、許される定常・等エントロピー解が 1 つに限られてしまう。従って、流れは下流の適当な場所に定常衝撃波を形成し、別の等エントロピー解に移って p_E とのつじつまをあわせるようになる。

3 Hawking 輻射

3.1 Hawking 輻射の機構

ブラックホールが熱輻射を放出することを初めて示したのは Hawking である。この節では、Hawking の原論文 [7] の議論に従い、曲がった時空上での自由場の量子論を用いて Hawking 輻射の導出を行う。なお、この章では表式の煩雑化を避けるため、Schwarzschild 時間 t_s を単純に t と書き、断わりのない限り $c=1$ の単位系を用いる。

曲がった時空上での場の量子論とは、重力と物質場との相互作用を記述する半古典論である [1]。すなわち、重力場は古典的な背景場として扱い、一方で物質場は量子化して考えるというものである。このような取り扱いは、量子力学で原子と電磁場（光）との相互作用を考える際に用いられる半古典論と類似している。物質と電磁場の半古典論は電磁場も含めた量子論の 1 つの近似理論に過ぎないが、それから導かれる帰結のいくつかは完全な量子論の帰結と一致する。従って、重力場と物質場の半古典論も同様に（未だ明らかになっていない）量子重力理論の良い近似理論となっていることを期待する。但し、背景時空の構造が Planck スケール⁵ より小さな規模ではこの近似は成立せず、量子重力の効果が無視できなくなると考えられる。

本論文では、簡単のためゼロ質量スカラー場を用いて議論する。ゼロ質量スカラー場 $\Phi(x)$ の従う波動方程式（Klein-Gordon 方程式）は

$$\square\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\Phi(x) = 0 \quad (3.1)$$

である。また、(3.1) の解 ϕ_1, ϕ_2 の内積を

$$(\phi_1, \phi_2) \equiv -i \int_\Sigma [\phi_1(x)\partial_\mu\phi_2^*(x) - \phi_2^*(x)\partial_\mu\phi_1(x)]d\Sigma^\mu \quad (3.2)$$

で定義する。ここで Σ は Cauchy 面⁶である。この内積は時空上の任意の Cauchy 面上で一定である [1]。

簡単のため、球対称な星（物質）の重力崩壊によって Schwarzschild ブラックホールが形成される場合を考える。球対称重力崩壊を表わす Penrose ダイアグラムは図 3.1 のようになる（Penrose ダイアグラムについては補足 C を参照）。

⁵Planck 時間 t_{Pl} と Planck 長さ l_{Pl} は

$$t_{\text{Pl}} \equiv (G\hbar/c^5)^{1/2} = 5.39 \times 10^{-44}\text{sec}, \quad l_{\text{Pl}} \equiv (G\hbar/c^3)^{1/2} = 1.62 \times 10^{-33}\text{cm}$$

で定義される。

⁶端点を持たない任意の時間的世界線およびヌル世界線が交差する 3 次元超曲面。双曲型方程式の解は Cauchy 面上での情報で一意に決まる。

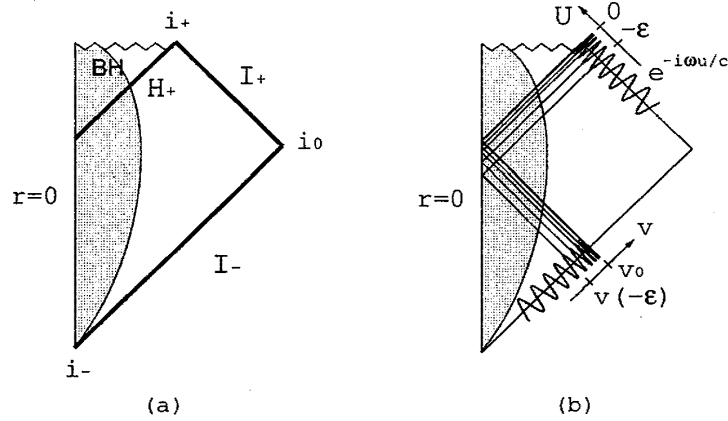


図 3.1: 球対称な星 (物質) の重力崩壊による Schwarzschild ブラックホール形成を表わす Penrose ダイアグラム。灰色の部分星の内部を表す。ジグザグの線はブラックホールの特異点である。

まずは、スカラー場 $\Phi(x)$ を次のように展開する。

$$\Phi(x) = \sum_{\omega>0, l, m} \left[a_{\omega lm} \phi_{\omega lm}(x) + a_{\omega lm}^{\dagger} \phi_{\omega lm}^*(x) \right] \quad (3.3)$$

$$\phi_{\omega lm}(x) = Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{f_{\omega}(t, r)}{r} \quad (3.4)$$

$$f_{\omega}(t, r) \sim \left(\frac{1}{2\pi\omega} \right)^{1/2} e^{-i\omega v} \quad \text{on } I_- \quad (3.5)$$

ここで、 $\phi_{\omega lm}(x)$ は過去のヌル無限遠 I_- における規格化された正振動数解であり、 $a_{\omega lm}, a_{\omega lm}^{\dagger}$ はそれぞれ I_- における粒子の生成・消滅演算子である。 I_- 上では (3.1) の任意の解 $\Phi(x)$ は $\phi_{\omega lm}^{(*)}(x)$ の重ね合わせで展開でき、しかも I_- はこの時空の Cauchy 面となっているので [図 1(a) 参照]、 $\Phi(x)$ は時空上の任意の点で (3.3) のように展開できる。

これとは別に、次のような展開も考える。

$$\Phi(x) = \sum_{\omega>0, l, m} \left[b_{\omega lm} \psi_{\omega lm}(x) + b_{\omega lm}^{\dagger} \psi_{\omega lm}^*(x) + c_{\omega lm} \chi_{\omega lm}(x) + c_{\omega lm}^{\dagger} \chi_{\omega lm}^*(x) \right] \quad (3.6)$$

$$\psi_{\omega lm}(x) = Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{h_{\omega}(t, r)}{r} \quad (3.7)$$

$$h_{\omega}(t, r) \sim \left(\frac{1}{2\pi\omega} \right)^{1/2} e^{-i\omega u} \quad \text{on } I_+ \quad (3.8)$$

ここで、 $\psi_{\omega lm}(x)$ は未来のヌル無限遠 (future null infinity) I_+ における規格化された正振動数解であり、 $b_{\omega lm}, b_{\omega lm}^{\dagger}$ はそれぞれ I_+ における粒子の生成・消滅演算子である。また、 $\chi_{\omega lm}(x)$ は事象地平面 H_+ を通過する波の適当な固有関数⁷であり、 $c_{\omega lm}$ は対応する生成・

⁷ $\chi_{\omega lm}(x)$ は定義によりブラックホール外部の観測者には届かないモードであり、その具体的なとり方はブラックホール外部での粒子生成の議論には影響しない。

消滅演算子である。 I_+, H_+ 上では (3.1) の任意の解 $\Phi(x)$ はそれぞれ $\psi_{\omega lm}^{(*)}(x), \chi_{\omega lm}^{(*)}(x)$ の重ね合わせで展開でき、しかも $I_+ \cup H_+$ はこの時空の Cauchy 面となっているので [図 1(a) 参照]、上と同様に $\Phi(x)$ は時空上の任意の点で (3.6) のように展開できる。

さて、 $\{\phi_{\omega lm}, \phi_{\omega lm}^*\}$ は (3.1) の解の完全系をなすので、 $\psi_{\omega lm}$ をこれらの線形結合で表すことが可能である。すなわち、 $\alpha_{\omega lm}^{\omega' l' m'}, \beta_{\omega lm}^{\omega' l' m'}$ を Bogoliubov 係数として

$$\psi_{\omega lm}(x) = \sum_{\omega' > 0, l', m'} \left[\alpha_{\omega lm}^{\omega' l' m'} \phi_{\omega' l' m'}(x) + \beta_{\omega lm}^{\omega' l' m'} \phi_{\omega' l' m'}^*(x) \right] \quad (3.9)$$

と書くことができる。さらに、背景時空の球対称性を考慮すれば、異なる (l, m) の間でのモードの混合は起こらない、つまり $\alpha_{\omega lm}^{\omega' l' m'} \equiv \alpha_{\omega \omega'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$, $\beta_{\omega lm}^{\omega' l' m'} \equiv \beta_{\omega \omega'} \delta_{ll'} \delta_{mm'}$ としてよいので、(3.9) の関係をより簡単に

$$h_{\omega}(t, r) = \sum_{\omega' > 0} [\alpha_{\omega \omega'} f_{\omega'}(t, r) + \beta_{\omega \omega'} f_{\omega'}^*(t, r)] \quad (3.10)$$

と表すことにする。

以下では、この時空変化に対応する Bogoliubov 係数 $\alpha_{\omega \omega'}, \beta_{\omega \omega'}$ を導く。Bogoliubov 係数を求めるには、 $f_{\omega}(t, r)$ の I_+ での漸近形を求めるか、もしくは $h_{\omega}(t, r)$ の I_- での漸近形を求めればよいが、ここでは後者の方法で議論することにする。簡単のため、スカラー場の伝播には幾何光学近似が成り立つと仮定し、位相一定面は Penrose ダイアグラム上でヌル測地線（光線）に一致するとする。次に、図 1(b) のように、 $h_{\omega}(t, r)$ の位相一定面を表すヌル測地線を I_+ から過去に向かって引き戻し、 $h_{\omega}(t, r)$ が I_- 上でどのようにふるまうかを考える。それぞれのヌル測地線は、星の内部に入るまでは Schwarzschild 時空の遅延ヌル座標 $u = ct - r^*$ 、あるいは $U = -e^{-\kappa u}$ でラベルされる。これをさらに引き戻すと、星の内部に入った後、星の中心 $r = 0$ で反射され、星の外部に再び出る。そして、そこから I_- に到達するまでは Schwarzschild 時空の先進ヌル座標 $v = ct + r^*$ が一定の面を通る。従って、それぞれのヌル測地線はこの v でラベルすることもできる。このように、これらのヌル測地線の集合は、 I_+ 上での U と I_- 上での v との間に 1 対 1 の写像

$$v = F(U) \quad \text{on } I_+ \quad (3.11)$$

$$u = -\frac{1}{\kappa} \ln(-U) = -\frac{1}{\kappa} \ln[-G(v)] \equiv u(v) \quad \text{on } I_- \quad (3.12)$$

を与える。ここで $F(U)$ は $U \leq 0$ で定義される単調増加関数であり、 G は F の逆関数である。また、引き戻されたヌル測地線の上では $h_{\omega}(t, r)$ の位相は一定なので、 $h_{\omega}(t, r)$ は I_- 上では

$$h_{\omega}(t, r) \sim \left(\frac{1}{2\pi\omega} \right)^{1/2} e^{-i\omega u(v)} = \left(\frac{1}{2\pi\omega} \right)^{1/2} [-G(v)]^{i\omega/\kappa} \quad (3.13)$$

のようにふるまうことがわかる。

ここで、後の計算のため、 $h_{\omega}(t, r)$ の I_- 上 $v = v_0$ 近傍での漸近形を調べる。 $v_0 \equiv F(0)$ とすると、 $v \lesssim v_0$ では

$$G(v) \sim G'(v_0)(v - v_0) \quad (3.14)$$

と近似できる (ここで $G(v_0) = 0$ を使った)。これより、 $h_\omega(t, r)$ は I_- 上の $v \lesssim v_0$ では漸近的に

$$h_\omega(t, r) \sim \left(\frac{1}{2\pi\omega} \right)^{1/2} [D(v_0 - v)]^{i\omega/c\kappa} \quad (3.15)$$

と書かれることがわかる。ここで $D \equiv G'(v_0) (> 0)$ とした。一方、 $v > v_0$ では $h_\omega(t, r)$ はいたるところゼロである。というのも、図 1(b) から明らかなように、 I_+ から過去に向かって引き戻された $h_\omega(t, r)$ は I_- 上の $v > v_0$ には“届かない”ないからである。以上より、 $h_\omega(t, r)$ は I_- 上で

$$h_\omega(t, r) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2\pi\omega} \right)^{1/2} [D(v_0 - v)]^{i\omega/c\kappa}, & v \lesssim v_0 \\ 0, & v > v_0 \end{cases} \quad (3.16)$$

と表されることがわかった。

I_- での $h_\omega(t, r)$ の形がわかったので、Bogoliubov 係数 $\alpha_{\omega\omega'}$, $\beta_{\omega\omega'}$ が計算できる。一般論 [1] によれば内積 $\alpha_{\omega\omega'} = (h_\omega, f_{\omega'})$, $\beta_{\omega\omega'} = -(h_\omega, f_{\omega'}^*)$ を I_- 上で評価すればよいが、ここではより簡単に次のようにして求める。 $h_\omega(t, r)$ と $f_\omega(t, r)$ との関係式 (3.10) が I_- 上では

$$h_\omega(t, r) = \sum_{\omega' > 0} \left[\alpha_{\omega\omega'} \left(\frac{1}{2\pi\omega'} \right)^{1/2} e^{-i\omega'v} + \beta_{\omega\omega'} \left(\frac{1}{2\pi\omega'} \right)^{1/2} e^{i\omega'v} \right] \quad (3.17)$$

のように $h_\omega(t, r)$ の Fourier 展開の形になることから、 $\alpha_{\omega\omega'}$, $\beta_{\omega\omega'}$ は単純に逆 Fourier 変換

$$\alpha_{\omega\omega'} = \left(\frac{\omega'}{2\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dv h_\omega(t, r) e^{i\omega'v} \quad (3.18a)$$

$$\beta_{\omega\omega'} = \left(\frac{\omega'}{2\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} dv h_\omega(t, r) e^{-i\omega'v} \quad (3.18b)$$

から求めることができる。まず、 $v < v_0$ での h_ω を $v \lesssim v_0$ での漸近形 (3.15) で置き換え、

$$\alpha_{\omega\omega'} \simeq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{v_0} dv [D(v_0 - v)]^{i\omega/c\kappa} e^{i\omega'v} \quad (3.19a)$$

$$\beta_{\omega\omega'} \simeq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{v_0} dv [D(v_0 - v)]^{i\omega/c\kappa} e^{-i\omega'v} \quad (3.19b)$$

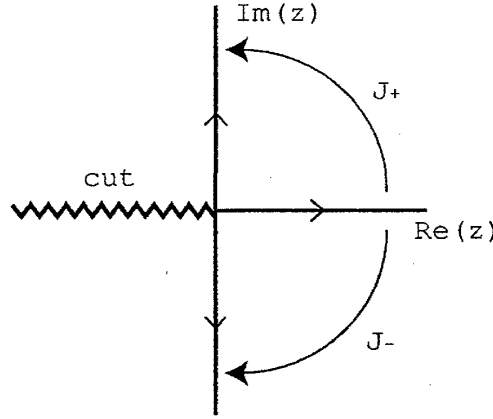
と近似する。続いて、新しい積分変数

$$z \equiv \omega'(v_0 - v) \quad (3.20)$$

を導入すると、(3.19) は

$$\alpha_{\omega\omega'} = \frac{e^{i\omega'v_0}}{2\pi D} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^{1/2} \left(\frac{D}{\omega'} \right)^{i\omega/\kappa} \int_0^\infty dz e^{-iz} z^{i\omega/\kappa} \quad (3.21a)$$

$$\beta_{\omega\omega'} = \frac{e^{-i\omega'v_0}}{2\pi D} \left(\frac{\omega'}{\omega} \right)^{1/2} \left(\frac{D}{\omega'} \right)^{i\omega/\kappa} \int_0^\infty dz e^{iz} z^{i\omega/\kappa} \quad (3.21b)$$

図 3.2: $J_{\pm}$ の積分路の回転。

と書き換えられる。そこで、

$$J_{\pm} \equiv \int_0^{\infty} dz e^{\pm iz} z^{i\omega/\kappa} \quad (3.22)$$

の積分を実行する。まず、 $J_{\pm}$ の被積分関数を複素 z 空間全体に解析接続する。その際、 $z^{i\omega/\kappa} = e^{i(\omega/\kappa) \ln z}$ が $z=0$ に分岐点 (branch point) を持つ多価関数であることに注意する。被積分関数を 1 価関数にするため、 z の実軸の負の部分に切断線 (cut) を入れ、 z の偏角 $\arg(z)$ を $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ に制限する。これにより、 $\ln(\pm i) = \pm i\pi/2$ が定まる。次に、 $J_{\pm}$ の積分路を複素空間上で回転する。 $J_{\pm}$ の被積分関数はそれぞれ複素 z 平面の上半面、下半面で解析的なので、積分路をそれぞれ $\pm\pi/2$ だけ回転する (図 3.2)。さらに、積分変数を $\zeta \equiv \pm iz = e^{\pm i\pi/2} z$ に変更すると、

$$\begin{aligned} J_{\pm} &= e^{\pm i(\pi/2)(1+i\omega/\kappa)} \int_0^{\infty} d\zeta e^{-\zeta} \zeta^{i\omega/\kappa} \\ &= e^{\pm i(\pi/2)(1+i\omega/\kappa)} \Gamma\left(1 + i\frac{\omega}{\kappa}\right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

となる。ここで Γ はガンマ関数である。以上より、 $\alpha_{\omega\omega'}$, $\beta_{\omega\omega'}$ は

$$\alpha_{\omega\omega'} = \frac{e^{i\omega'v_0}}{2\pi D} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2} \left(\frac{D}{\omega'}\right)^{1+i\omega/\kappa} e^{-i\pi/2} e^{\pi\omega/2\kappa} \Gamma\left(1 + i\frac{\omega}{\kappa}\right) \quad (3.24a)$$

$$\beta_{\omega\omega'} = \frac{e^{-i\omega'v_0}}{2\pi D} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2} \left(\frac{D}{\omega'}\right)^{1+i\omega/\kappa} e^{i\pi/2} e^{-\pi\omega/2\kappa} \Gamma\left(1 + i\frac{\omega}{\kappa}\right) \quad (3.24b)$$

となることがわかる。

以上で Bogoliubov 係数が求まったので、この時空変化によって生成される粒子のスペクトルが計算できる。まず、ブラックホールが形成される前の空間は真空状態であったとする。これは、量子場の状態を「 I_- における真空状態」 $|0_- \rangle$ に設定することを意味する。ここで $|0_- \rangle$ は

$$a_{\omega lm} |0_- \rangle = 0 \quad \text{for all } \omega, l, m \quad (3.25)$$

によって定義される。状態ベクトル $|0_- \rangle$ は時空上の任意の点で一定だが、粒子の生成・消滅演算子が I_- と I_+ とで異なるため、 I_+ における粒子状態は一般に真空状態ではない。実

際、 I_+ での粒子数の期待値は

$$N_{\omega lm} = \langle 0_- | b_{\omega lm}^\dagger b_{\omega lm} | 0_- \rangle = \sum_{\omega' > 0, l', m'} |\beta_{\omega lm}^{\omega' l' m'}|^2 = \sum_{\omega' > 0} |\beta_{\omega \omega'}|^2 \quad (3.26)$$

となるが、 $|\beta_{\omega \omega'}| \neq 0$ なので、 I_+ では粒子が存在する、すなわち、ブラックホール形成によって粒子が生成されることがわかる。

$N_{\omega lm}$ は、次のようにして簡単に求めることができる。まず、(3.24) より

$$|\alpha_{\omega \omega'}|^2 = e^{2\pi\omega/\kappa} |\beta_{\omega \omega'}|^2 \quad (3.27)$$

がわかる。これを、Bogoliubov 係数間で成り立つ恒等式 [1]

$$\sum_{\omega' > 0} (|\alpha_{\omega \omega'}|^2 - |\beta_{\omega \omega'}|^2) \equiv 1 \quad (3.28)$$

に代入すると、

$$\sum_{\omega' > 0} |\beta_{\omega \omega'}|^2 (e^{2\pi\omega/\kappa} - 1) = 1 \quad (3.29)$$

を得る。よって、 $N_{\omega lm}$ は

$$N_{\omega lm} = \frac{1}{e^{2\pi\omega/\kappa} - 1} \quad (3.30)$$

となることがわかる。これは Bose 粒子の熱平衡分布関数

$$f(\omega) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_B T} - 1} \quad (3.31)$$

と全く同じ形をしている。つまり、(3.30) は、重力崩壊で形成されたブラックホールが熱輻射を放出することを意味している。これが **Hawking 輻射** と呼ばれるものである。(3.30) から対応する輻射温度を読み取ると、

$$k_B T = k_B T_H \equiv \frac{\hbar\kappa}{2\pi} = \frac{c^3 \hbar}{8\pi G M} \quad (3.32)$$

となる。ここで省略していた c を元に戻した。 T_H は **Hawking 温度** と呼ばれる。

ここまでは、固有振動解の伝播に対して幾何光学近似を適用して議論を行ってきた。一般には、ホライズンまわりでの曲率散乱の効果があるため (5.3 節参照)、幾何光学近似は振動数 ω が十分大きいときに成立する近似である。曲率散乱の効果を考慮すると、 I_+ における固有振動解 $\{h_\omega\}$ のうち波長がブラックホールの曲率半径よりも長いモードは、星の中心に向かって引き戻す際に振幅の一部が外部時空に散乱され、その結果対応する Bogoliubov 係数 $\alpha_{\omega \omega'}$, $\beta_{\omega \omega'}$ は散乱された分だけ小さくなる。したがって、曲率散乱を考慮に入れた生成粒子のスペクトルは

$$N_{\omega lm} = |T_{\omega l}|^2 \frac{1}{e^{2\pi\omega/\kappa} - 1} \quad (3.33)$$

となる。ここで $|T_{\omega l}|^2$ は曲率散乱に対する透過率である。ブラックホールの曲率半径は表面重力 κ 程度の量なので、 $|T_{\omega l}|^2$ は $\omega \gg \kappa$ では 1 に近づき、(3.33) は幾何光学近似の結果 (3.30) に一致する。

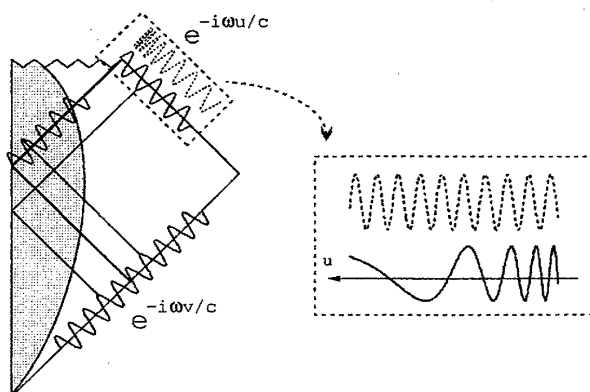


図 3.3: ブラックホール形成による波の指数関数的赤方偏移。 I_- から伝播してきた単色球面波 $e^{-i\omega v}$ (実線の波) は I_+ でのアフィンパラメータ u で見ると指数関数的に引き延ばされて見える。点線の波は I_+ での単色球面波 $e^{-i\omega u}$ を表す。

上の議論では I_+ の固有振動解を I_- に引き戻すことによって $N_{\omega lm}$ を求めたが、逆に I_- における固有振動解がどのように変形されて I_+ に届くかを考えてみる。ホライズン近傍 $U \lesssim 0 (u \rightarrow \infty)$ では、

$$F(U) \approx F'(0)U = -\frac{e^{-\kappa u}}{D} \quad (3.34)$$

と近似できるから、 I_- の固有振動解 $f_\omega(t, r)$ は I_+ 上の $U \lesssim 0$ では

$$f_\omega(t, r) \sim \left(\frac{1}{2\pi\omega}\right)^{1/2} e^{(i\omega/D) \exp(-\kappa u)} \quad (3.35)$$

のようにふるまうことがわかる。これは、ブラックホールのホライズンが形成される直前に星の内部を抜けてきた波が、指数関数的な赤方偏移を受けて無限遠方に届くことを意味している (図 3.3)。この指数関数的赤方偏移のことを「波の引き延ばし」と呼ぶことにする。「引き延ばし」の原因はホライズンにおける潮汐力、つまり表面重力である。このことは輻射温度 (3.32) が表面重力 κ で決まっていることからわかる。このように、Hawking 輻射の本質とは、ホライズン近傍における「波の引き延ばし」であると言える。

以上の議論からわかるように、Hawking 輻射の機構において背景時空がホライズンを持つことは本質的に必要であるが、その背景時空が実際に Einstein 方程式の解であるかどうかは問題にならない。この意味において、「Hawking 輻射は運動学的な現象である」と呼ばれることがある。この事実は、Hawking 輻射が一般相対論に特有の現象ではなく、波動に対して「ホライズン」の役割を果たす構造を持つ物理系に普遍の現象であることを示唆している。

3.2 Hawking 輻射の古典的対応物

Hawking 輻射の本質が古典的な波の引き延ばしであることは、以下の議論によってより明確に描かれる [17]。

重力崩壊する星に向かって単色球面波の古典的なスカラー場

$$\phi_{\text{in}}^{(\pm)}(t, r) \propto \frac{e^{\mp i\Omega(t+r)}}{r} \quad (3.36)$$

を遠方 ($r \rightarrow \infty$) から星の中心 ($r = 0$) に向かって入射したとする。ここで、 $\Omega(> 0)$ は入射波の振動数である。前節の議論より、この波は星がホライズンが形成される過程で引き延ばしを受け、十分時間が経過した後は漸近的に

$$\phi_{\text{out}}^{(\pm)}(t, r) \propto \frac{e^{\pm i(\Omega/D) \exp[-\kappa(t-r)]}}{r} \quad (3.37)$$

のように変形して遠方に戻ってくる。この波を遠方 $r = r_{\text{obs}}$ にいる観測者が定点観測したとして、そのスペクトルを計算してみる。

まず、 $\phi_{\text{obs}}^{(\pm)}(t) \equiv \phi_{\text{out}}^{(\pm)}(t, r_{\text{obs}})$ を t に関して Fourier 変換すると、

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{\text{obs}}^{(\pm)}(\omega) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} dt \phi_{\text{obs}}^{(\pm)}(t) e^{i\omega t} \\ &\propto \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{\pm i(\Omega/\bar{D}) \exp(-\kappa t)} e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (3.38)$$

となる。ここで $\bar{D} = D e^{-\kappa r}$ である。これを新しい積分変数 $z \equiv \bar{D}^{-1} e^{-\kappa t}$ を用いて書き換えると、

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{\text{obs}}^{(\pm)}(\omega) &\propto \int_0^{\infty} dz e^{\pm i\Omega z} z^{-(i\omega/\kappa+1)} \\ &\propto e^{\pm \pi\omega/2\kappa} \Gamma\left(-i\frac{\omega}{\kappa}\right) \end{aligned} \quad (3.39)$$

となる。これより、 $\phi_{\text{obs}}^{(\pm)}$ のパワースペクトルは

$$\begin{aligned} |\tilde{\phi}_{\text{obs}}^{(\pm)}(\omega)|^2 &\propto e^{\pm \pi\omega/\kappa} \Gamma\left(-i\frac{\omega}{\kappa}\right) \Gamma\left(i\frac{\omega}{\kappa}\right) \\ &= e^{\pm \pi\omega/\kappa} \frac{i\kappa}{\omega} \Gamma\left(1 - i\frac{\omega}{\kappa}\right) \Gamma\left(i\frac{\omega}{\kappa}\right) \\ &= e^{\pm \pi\omega/\kappa} \frac{\kappa}{\omega} \frac{2\pi}{e^{\pi\omega/\kappa} - e^{-\pi\omega/\kappa}} \\ &\propto \frac{1}{\mp\omega} \frac{1}{e^{2\pi(\mp\omega)/\kappa} - 1} \end{aligned} \quad (3.40)$$

となる。これは因子 ω^{-1} を除けば (3.30) の Planck 分布そのものである。

上で導いた古典波のパワースペクトルの意味は、次のようにとらえることができる。もともとの入射波 $\phi_{\text{in}}^{(\pm)}$ は (規格化定数を除いて) 前節で扱った I_- の固有振動解そのものである。従って、大雑把に言って、 $\phi_{\text{out}}^{(\pm)}$ の Fourier 変換 $\tilde{\phi}_{\text{obs}}^{(\pm)}(\omega)$ は Bogoliubov 係数に、パワースペクトル $|\tilde{\phi}_{\text{obs}}^{(\pm)}(\omega)|^2$ は生成粒子数分布にそれぞれ対応していると考えることができる。しかも、重要なことに、このパワースペクトル (3.40) は量子論を介さずに得られるのである。このことを強調するために、このパワースペクトルを「Hawking 輻射の古典的対応物 (classical counterpart)」と呼ぶことにする。

また、(3.40) の表式からわかるように、変形された古典波 $\phi_{\text{obs}}^{(\pm)}(x)$ のスペクトルは元の入射波の振動数 $\pm\Omega$ と逆符号のレンジでも値を持つ。これは、ホライズン近傍における波の引き延ばしによって、入射波の単色スペクトルが（絶対値の意味で）低周波数側になだれ込み、もとの単色波の振動数の符号と逆符号のレンジにまで染み出したことを意味している。これこそが前節の Bogoliubov 係数 $|\beta_{\omega\omega'}|^2$ 、ひいては生成粒子数分布 N_ω に対応するものである。

3.3 観測による Hawking 輻射の検証は可能か

天体としてのブラックホールは、観測によりその存在が確認されている。そこで、ブラックホール天体の輻射温度とエネルギー放出率を見積もることとする。ブラックホール天体が Schwarzschild ブラックホールであると仮定すると、Hawking 温度 T_H は

$$T_H = \frac{c^3 \hbar}{8\pi k_B G M} \simeq 82 \text{ nK} \frac{M_\odot}{M} \quad (3.41)$$

と計算できる。ここで $M_\odot = 2.0 \times 10^{33} \text{ g}$ は太陽質量を表わす。これより、最も小規模なブラックホール天体 ($M \gtrsim M_\odot$) の輻射温度は数十 nK であることがわかる。しかも、上の表式からわかるように、Hawking 温度はブラックホールの質量に逆比例するので、巨大なブラックホールを考えれば考えるほどその輻射温度は低温になるということになる。つまり、現実のブラックホール天体の輻射温度は、高々数十 nK 程度である。宇宙空間には 3K の宇宙背景輻射が満ちていることを考えれば、ブラックホール天体が仮に熱輻射が放出されているとしても、それを直接観測することは現実的に不可能である。

4 遷音速流を用いた Hawking 輻射の検証

3章で議論したように、ブラックホールの Hawking 輻射は、ブラックホール形成前の真空状態がホライズン形成に伴い変化を受けることによって生じる。そして、輻射粒子のスペクトルは、この過程で正負固有振動解がどのように混ざったかを表す Bogoliubov 係数によって決定される。ここで本質的に重要なことは、固有振動解はあくまで波動方程式に従う古典的な波であり、Bogoliubov 係数は重力崩壊するブラックホールの周りでこれらの古典波がどのように変形するかで決まるということである。つまり、Hawking 輻射自体は量子論的な現象であるが、そのスペクトルは完全に古典論的に決定されるのである。一方、遷音速流中の音波の伝播の仕方はブラックホール時空上でのスカラー場のそれと基本的に等価であることは2章で見たとおりである。従って、遷音速流が形成される際に、量子化された音波、すなわちフォノンの（準）粒子生成が起こり、しかもそのスペクトルはブラックホールの Hawking 輻射のそれ (3.30) と一致することが予想される (図 4.1)[18]。

4.1 音響ブラックホールの“表面重力”

ブラックホール時空において、ホライズンにおける波の引き延ばし効果を特徴付ける量は表面重力 κ であった。この節では、遷音速流における Hawking 輻射を議論するための

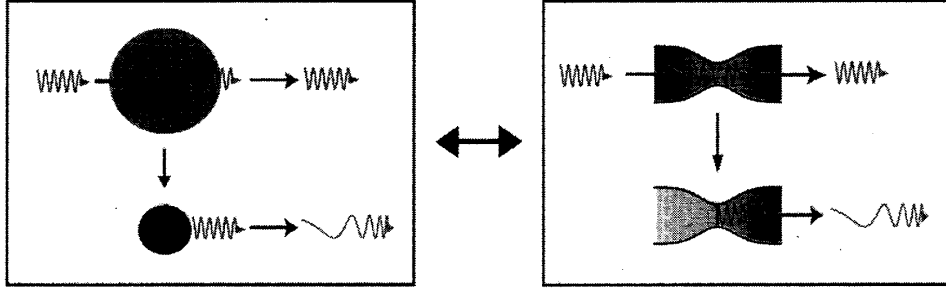


図 4.1: ブラックホール形成（左図）と遷音速流形成（右図）との対応を表す模式図。ブラックホールのホライズンが形成されると、直前にそこを通過した量子場の固有振動波 (normal mode) は無限赤方偏移を受けながら無限遠方に伝播していく。同様に、流れの中に音速点が形成されると、直前にそこを通過した音波は同じように無限赤方偏移を受けて上流に伝播する。この音波を量子化すれば、そのスペクトルは Hawking 輻射のスペクトルと一致すると考えられる。

準備として、音響ブラックホールの“表面重力”の表式を求める。ブラックホール時空の表面重力 κ は、時空計量の Kruskal 拡張の際に自然と現れる（補足 B.3 参照）。そこで、一般相対論の方法に倣い、音響計量 (2.21) を“Kruskal 拡張”することを考える。

Laval 管を用いることを想定し、1 次元定常遷音速流を仮定すると、その音響計量は (2.22) で与えられる。これは、音響ブラックホールの“Schwarzschild 時間”

$$d\bar{t} = dt + \frac{v dx}{c_s^2(1 - M^2)} \quad (4.1)$$

を導入すると、

$$ds_{(\text{ac})}^2 = \frac{\rho}{c_s} \left[-(1 - M^2) c_s^2 d\bar{t}^2 + \frac{dx^2}{1 - M^2} + dy^2 + dz^2 \right] \quad (4.2)$$

と書き換えることができる。この式からわかるように、 $\bar{t}$ は音響計量が静的（定常かつ時間反転不変）になるように定義された時間座標である。以下では 2 章と同様に、音速点における物理量を下付き添え字 ‘ $*$ ’ で表す。流れの方向を x 軸の負の方向にとり ($v < 0$)、 $x > x_*$ で亜音速、 $x < x_*$ で超音速だとすると、音速点 $x = x_*$ の近傍では

$$c_s^2 - v^2 \approx \alpha_*(x - x_*) \quad (4.3)$$

$$\alpha_* \equiv \left| \frac{d(c_s^2 - v^2)}{dx} \right|_* \quad (4.4)$$

と近似できる。これを用いると、計量 (4.2) は音速点近傍では (y, z 成分を省略して)

$$\begin{aligned} ds_{(\text{ac})}^2 &\approx \frac{\rho_* \alpha_*}{c_{s*}} (x - x_*) \left[-d\bar{t}^2 + \frac{c_{s*}^2 dx^2}{\alpha_*^2 (x - x_*)^2} \right] \\ &\equiv -\frac{\rho_* \alpha_*}{c_{s*}} (x - x_*) d\bar{u} d\bar{v} \end{aligned} \quad (4.5)$$

と書ける。ここで、ヌル座標 $\bar{u}, \bar{v}$ を

$$\bar{u} = \bar{t} - \frac{c_{s*}}{\alpha_*} \ln(x - x_*) \quad (4.6)$$

$$\bar{v} = \bar{t} + \frac{c_{s*}}{\alpha_*} \ln(x - x_*) \quad (4.7)$$

で定義した。

さらに、“Kruskal ヌル座標”

$$U = -e^{-\kappa \bar{u}} = -(x - x_*)^{c_{s*}\kappa/\alpha_*} e^{-\kappa \bar{t}} \quad (4.8)$$

$$V = e^{\kappa \bar{v}} = (x - x_*)^{c_{s*}\kappa/\alpha_*} e^{\kappa \bar{t}} \quad (4.9)$$

を導入し、音響ブラックホールの“表面重力” κ を、Kruskal 座標 (U, V) がホライズン（音速点）をまたいで正則になるように定義する。(4.5) を U, V を用いて書き換えると、

$$\begin{aligned} ds_{(\text{ac})}^2 &\approx \frac{\rho_* \alpha_*}{c_{s*} \kappa^2} \frac{x - x_*}{UV} dU dV \\ &= -\frac{\rho_* \alpha_*}{c_{s*} \kappa^2} (x - x_*)^{1-2c_{s*}\kappa/\alpha_*} dU dV \end{aligned} \quad (4.10)$$

となる。従って、 κ を

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\alpha_*}{2c_{s*}} \\ &= \frac{1}{2c_{s*}} \left| \frac{d(c_s^2 - v^2)}{dx} \right|_* \\ &= \left| \frac{d(c_s - |v|)}{dx} \right|_* \end{aligned} \quad (4.11)$$

ととれば、Kruskal 座標 (U, V) はホライズンをまたいで張られる座標となる。これを音響ブラックホールの“表面重力”と定義する⁸[25, 18]。

(4.11) で定義された表面重力 κ は、物理的には次のような意味を持つ。速度 $v(x)$ の流れの中の音波は、その波長が流れの空間的変化スケールに比べて十分短ければ、実験室系において局所速度 $\pm c_s + v$ で伝播する。いま、流れが x 軸の負の方向に加速される遷音速流だとすると、流れに逆らって進む音波は、実験室系から見ると速度 $c_s + v = c_s - |v|$ で伝搬する。この伝搬速度の音速点近傍における勾配が、上で定義された表面重力 κ に他ならない。この値が大きいほど、音速点近傍の音波は強く引き延ばされて上流に届くのである。

2 章で見たように、Laval 管の中の定常流のプロファイルは管の形状と澱み点物理量を指定すれば決定する。従って、Laval 管中の遷音速流の表面重力も、管の形状と澱み点物理量によって決まる量である。実際、断面積-Mach 数関係式 (2.44) の 2 回微分から得られる関係

$$\left| \frac{dM}{dx} \right|_* = \left[\frac{\gamma + 1}{4} \frac{1}{A_*} \frac{d^2 A}{dx^2} \right]_*^{1/2} \quad (4.12)$$

⁸ κ は定義 (4.11) により (時間)⁻¹ の次元を持つことに注意。

と関係式 (2.34) を用いると、(4.11) は

$$\begin{aligned}\kappa &= c_{s*} \left| \frac{dM}{dx} \right|_* \\ &= c_{s*} \left[\frac{1}{2A_*} \frac{d^2 A}{dx^2} \right]_*^{1/2}\end{aligned}\quad (4.13)$$

となり、表面重力は激み点音速とスロートにおける管の曲率から決まることがわかる [29]。

4.2 音波の引き延ばしからスペクトルを検証する方法

Hawking 輻射を標準状態の大気や水を用いた実験で見ることができるといえると、それは極めて困難だと考えられる。まず第一に、そもそも実験室サイズのマクロな物理系において量子論的効果が現れるかどうかという問題がある。Hawking 輻射のような量子論的な現象が起こるためには、系全体にわたって量子コヒーレンスが維持されている必要がある [18]。しかし、標準状態の大気のように de Broglie 波長が平均分子間距離よりもはるかに短いような系では、量子コヒーレンスは流体のダイナミカルなタイムスケールよりも圧倒的に短いタイムスケールで消失（デコヒーレンス）すると考えられる。第二に、仮に大気の遷音速流がフォノンの熱輻射を放出するとしても、その輻射温度がきわめて低いという難点がある。いま、Laval 管のスロートにおける曲率半径を R_c とすると、表面重力 κ は次元解析的に

$$\kappa \sim \frac{c_{s*}}{R_c} \simeq 3.3 \text{ kHz} \left(\frac{T_*}{273\text{K}} \right)^{1/2} \left(\frac{10\text{cm}}{R_c} \right) \quad (4.14)$$

と見積もられる。これから輻射温度を見積もると、典型的にはブラックホールと同様 nK オーダーであることがわかる。従って、流体や装置の温度がこれよりも十分に低くない限り、仮にフォノン生成が起きていたとしても熱雑音で完全に打ち消されてしまう。輻射温度を上げるには曲率半径を小さくすれば良いが、何桁にもわたって Laval 管の曲率半径を小さくすることは実際には不可能である。このような理由から、近年では常温の大気ではなく極低温の Bose-Einstein 凝縮体の遷音速流を用いる方法が考えられてきている [5]。

フォノンを観測するよりも実験的に容易に Hawking 輻射のスペクトルを検証するひとつの方法は、古典的な音波の引き延ばされ方自体を測定することである [18]。筆者らの実験も、この方法に基づいて行われてきた。

固有振動解は、ブラックホール形成のような非定常な時空変化に対して一般に

$$e^{-i\omega v/c} \longrightarrow e^{-i\omega f(u)} \quad (4.15)$$

と変形される。ここで $u = ct - r$, $v = ct + r$ はそれぞれ遅延, 先進ヌル座標、 $f(v)$ は変形された波の位相を表す関数である。非定常な時空変化に伴う粒子生成のスペクトルの情報はすべて位相関数 $f(u)$ に含まれている。よって、Hawking 輻射のスペクトルを調べることは、 $f(u)$ の関数形を調べることに同等である。3 章で見たように、変形の仕方が指数関数的赤方偏移

$$f(u) \propto e^{-\kappa u/c} \quad (4.16)$$

であれば、生成される粒子の分布は熱的な分布になる。

ここで、筆者のグループが行ってきた実験の方法について簡単に説明する（詳細は[29, 26]を参照）。まず、流れがいたるところ亜音速の状態に保ったまま、十分下流から単色の音波を下流から上流に向けて送る。流れが十分定常であれば、スロート近傍における波の形状もやはり単色波のままである。次に、音波を上流に向けて送り続けながら流れを亜音速流から遷音速流に切り替える。すると、スロート近傍に残っていた単色波は引き延ばしを受け、十分上流に届いた速度ポテンシャル摂動 $\phi(t, x)$ はある位相関数 $f(c_{s0}t - x)$ に従って振動するはずである。これを上流側で観測するのである。さらに生成粒子数分布を求めるには、得られた位相関数から変形された「固有振動解」 $e^{-if(u)}$ を構成し、3.1 節での議論と同様に Bogoliubov 係数をするか、あるいは 3.2 節で議論した「古典的対応物」を求めればよい。

4.3 遷音速流中での「波の引き延ばし」の数値実験

4.3.1 数値実験の目的

現在までのところ、Laval 管中に大気遷音速流を構成する我々の実験において、引き延ばされた音波を検出するには至っていない。観測データがノイズにまみれており、シグナルを拾い上げることが困難であるためである[26]。主なノイズ源は、下流域で発生する吹き出し音であると考えられる。この実験では、シグナルである正弦波を下流から打ち込む必要があるため、シグナルに不可避免的に下流域の吹き出し音が被さってしまうのである。観測データから興味あるシグナルを検出できるようになるためには、実験装置を改善してノイズ源を除去することはもちろん、まだ見ぬシグナルがどのような波形をしており、どのタイミングで到達するかをあらかじめ知っておく必要がある。また、仮に引き延ばされた音波が検出できたときのために、その波形から本来の興味の対象である粒子生成のスペクトルを求めることができるかどうかを確認しておかなければならない。そこで著者は、

- (1) 変形された音波の波形と、その到達時刻を推定する
- (2) 変形された音波から、対応する粒子生成のスペクトルが Planck 分布に一致するかどうかを調べる

ことを目的として、数値計算を行った。

4.3.2 数値実験の方法

この数値実験では、計算の簡単化のため、流体系を背景流成分と摂動成分に分け、背景流のプロファイルは2種類の定常解（亜音速解、遷音速解）を貼り合わせることで構成し、摂動量である音波の時間発展はアイコナール近似によって求めた。その詳細を以下に述べる。

背景流プロファイルの構成

装置による実験では、音速点のない亜音速状態から始め、下流から上流に向けて正弦波を送りながら背景流を遷音速流へ移行させる。今回の数値実験では、背景流の時間発展を

$$\text{定常亜音速解 } (t < 0) \longrightarrow \text{定常遷音速解 } (t > 0)$$

のように単純化した。ここで t は時刻を表し、音速点形成の時刻を $t = 0$ とする。このようにすることで、任意の時刻の Mach 数分布 $M(x) = |v(x)|/c_s(x)$ を、断面積-Mach 数関係式 (2.44) から求めることが可能になる。断面積のプロファイル $A(x)$ には、我々の装置実験で使用している Laval 管の形状

$$r(x) = \sqrt{R^2 - x^2} + R + b \quad (4.17)$$

$$A(x) = \pi r(x)^2 \quad (4.18)$$

を用いた。ここで $r(x)$ はノズル半径、 $R = 20\text{cm}$ は曲率半径、 $b = 4\text{mm}$ はスロート半径である。表面重力 κ は、(4.13) より

$$\kappa = c_{s*} \sqrt{\frac{1}{bR}} \quad (4.19)$$

である。今回の数値実験では $c_{s*} = 340\text{ m/s}$ としたので、 $\kappa = 12.0\text{ kHz}$ である。

観測波形の計算

準 1 次元流上の速度ポテンシャル摂動 $\phi_\omega(x)$ の満たす波動方程式は、

$$\left[\left(\partial_t + \partial_x v \right) \frac{\rho A}{c_s^2} \left(\partial_t + v \partial_x \right) - \partial_x (\rho A \partial_x) \right] \phi(t, x) = 0 \quad (4.20)$$

である。但し、背景流は ($t = 0$ を除いて) 定常であるという近似をとっているので、背景流の物理量 v, ρ, c_s 及び断面積 A は t に依らない x のみの関数である。そこで、波動方程式 (4.20) 全体を時間 t について Fourier 変換し、 x に関する常微分方程式

$$\left[\left(-i\omega + \frac{d}{dx} v \right) \frac{\rho A}{c_s^2} \left(-i\omega + v \frac{d}{dx} \right) - \frac{d}{dx} \left(\rho A \frac{d}{dx} \right) \right] \phi_\omega(x) = 0 \quad (4.21)$$

$$\phi_\omega(x) = \int \phi(t, x) e^{i\omega t} dt \quad (4.22)$$

を考えることにする。

振動数 ω が十分大きい場合は、各位置での局所波長が背景流及び断面積の空間的変化スケールに比べて十分短い、すなわちアイコナール近似が成立すると考えてよい。アイコナール近似が良い近似として成立するための条件は、

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{2\pi c_s} &\gg \sqrt{\frac{1}{A} \frac{d^2 A}{dx^2}} \\ &\iff \frac{\omega}{2\pi} \gg \kappa \end{aligned} \quad (4.23)$$

である。以下では ω がこの条件を満たしているとする。 $\phi_\omega(x)$ を

$$\phi_\omega(x) \propto \exp\left[i \int k_\omega(x) dx\right] \quad (4.24)$$

とおき、アイコナール近似

$$\frac{1}{k_\omega} \left| \frac{dF}{dx} \right| \ll k_\omega \quad (F = v, \rho, c_s, A, k_\omega) \quad \left(\Longleftrightarrow \frac{d}{dx} \simeq k_\omega \right) \quad (4.25)$$

を用いて(4.21)を書き換えると、局所分散関係

$$\begin{aligned} (-i\omega + ik_\omega v) \frac{\rho A}{c_s^2} (-i\omega + ivk_\omega) - ik_\omega (\rho A i k_\omega) &= 0 \\ \Longleftrightarrow (\omega - k_\omega v)^2 - c_s^2 k_\omega^2 &= 0 \end{aligned} \quad (4.26)$$

が導かれる。さらにこれを局所波数 k_ω について解くと、2解

$$k_\omega = \frac{-\omega}{c_s - v} = \frac{-\omega}{c_s(1 + M)} \equiv k_\omega^{(\text{in})} \quad (4.27a)$$

$$k_\omega = \frac{\omega}{c_s + v} = \frac{\omega}{c_s(1 - M)} \equiv k_\omega^{(\text{out})} \quad (4.27b)$$

が得られる。ここで、 $v(x) < 0$ を用いた。 $k_\omega^{(\text{in})}$, $k_\omega^{(\text{out})}$ はそれぞれ流れに対して順行, 逆行して伝播する音波の局所波数を表す。

上流で観測される波形の計算は、以下のようにして行う。まず、 $t < 0$ では背景流は定常亜音速流なので、下流側から振動数 ω の正弦波を上流側へ向けて入射すると、Laval管中の流体全体にわたって

$$\phi(t, x) \propto \cos\left[-\omega t + \omega \int \frac{dx}{c_{s1}(1 - M_1)}\right], \quad t < 0 \quad (4.28)$$

で表される定常波が形成される。ここで、下付き添え字‘1’は定常亜音速流のプロファイルであることを示すものとする。従って、背景流が遷音速流に切り替わる時刻 $t = 0$ での波形は、

$$\phi(0, x) \propto \cos[p(x)] \quad (4.29)$$

$$p(x) \equiv \omega \int \frac{dx}{c_{s1}(1 - M_1)} \quad (4.30)$$

から計算できる。 $t > 0$ では、スロート $x = 0$ に音速点が形成されるので、下流側($x < 0$)の音波は上流には到達せず、上流側に残った音波が局所位相速度

$$v_p(x) \equiv \omega / k_\omega^{(\text{out})} = c_{s2}(1 - M_2) \quad (4.31)$$

で上流側に伝播してくる。ここで、下付き添え字‘2’は定常遷音速流のプロファイルであることを示す。いま、この音波を位置 $x = x_{\text{obs}}$ で観測するとすると、時刻 $t(> 0)$ において観測される音波 $\phi_{\text{obs}}(t) \equiv \phi(t, x_{\text{obs}})$ の位相は、世界点 (t, x_{obs}) から“ヌル測地線”(特性

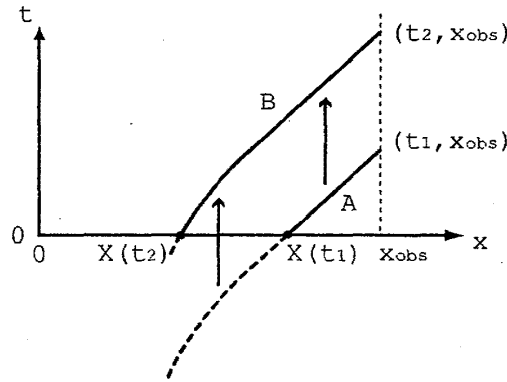


図 4.2: $X(t)$ の決め方を表わす模式図。曲線 A は $(t_1, x_{r\text{obs}})$ から過去に引き戻された特性曲線を表わす。背景流が定常なので、異なる観測時刻 t_2 から引き戻した特性曲線（曲線 B）は曲線 A を t 軸方向に平行移動したものと同じ。 $\phi(t, x)$ の位相は各特性曲線に沿って一定である。

曲線）を過去に向かって引き戻し、 $t = 0$ の世界線と交差した点（その x 座標を $X(t)$ とする）における位相 $p(X(t))$ である（図 4.2 参照）。つまり、観測地点における速度ポテンシャル摂動の波形は

$$\phi_{\text{obs}}(t) \propto \cos[p(X(t))], \quad t > 0 \quad (4.32)$$

と表すことができる。ここで、背景流が定常であることから、 $X(t)$ は微分方程式

$$\frac{dX(t')}{dt'} = -v_p(X(t')), \quad X(0) = x_{\text{obs}} \quad (4.33)$$

の解である。

ところで、ここまでは（曲がった時空上のスカラー場に対応する）速度ポテンシャル摂動を扱ってきたが、速度ポテンシャル自体は実験室における真の観測値ではない。むしろ、実験室で観測するのはこれの微分量である速度摂動や圧力摂動である。速度ポテンシャル摂動 ϕ と圧力摂動 $\delta p \equiv p_1$ は、摂動方程式 (2.13b) より

$$\partial_t \phi + v \partial_x \phi = -c_s^2 \frac{\delta \rho}{\rho} = -\frac{\delta p}{\rho} \quad (4.34)$$

のように関係付いている。ここで (2.13b) の表記を $v_0 \rightarrow v$, $\rho_0 \rightarrow \rho$, $\rho_1 \rightarrow \rho_1$ と改めた。観測点 x_{obs} が十分上流であれば $v \approx 0$, $\rho \approx \rho_* = \text{const.}$ としてよいので、上の関係式より

$$\delta p_{\text{obs}}(t) \propto \partial_t \phi_{\text{obs}}(t) \quad (4.35)$$

を得る。

今回の数値実験では、(4.30) と (4.33) を数値的に計算し、観測地点における速度ポテンシャル摂動 $\phi_{\text{obs}}(t)$ を求め、さらに (4.35) から実験で観測される波形 $\delta p_{\text{obs}}(t)$ を推定した。入射音波の周波数は $\Omega/2\pi = 20 \text{ kHz}$, 100 kHz の 2 通りを用いた。これらは、アイコナール近似が良い近似である条件 (4.23) を満たしている。

フォノンスペクトルの古典的対応物の計算

位相関数 $p(x)$ が求まってしまえば、“複素速度ポテンシャル摂動”

$$\phi_c^{(\pm)}(t) \propto e^{\pm ip(X(t))} = \cos[p(X(t))] \pm i \sin[p(X(t))] \quad (4.36)$$

を構成することで、フォノンの生成粒子数分布の古典的対応物を $|\tilde{\phi}_c^{(\pm)}(\omega)|^2$ から求めることができる。ここで、 $\phi_c^{(+)}$, $\phi_c^{(-)}$ はそれぞれ 3.2 の $\phi_{\text{obs}}^{(\pm)}(t)$ に対応する。但し、ポテンシャル摂動は実験室における真の観測量ではないので、今回の数値実験では“複素圧力摂動”

$$\delta p_c^{(\pm)}(t) \propto \partial_t \phi_c^{(\pm)}(t) \quad (4.37)$$

のパワースペクトル $|\tilde{\delta p}_c^{(\pm)}(\omega)|^2$ を計算した。(4.37) の両辺を Fourier 変換すると、 $|\tilde{\phi}_c^{(\pm)}(\omega)|^2$ と $|\tilde{\delta p}_c^{(\pm)}(\omega)|^2$ との関係

$$|\tilde{\delta p}_c^{(\pm)}(\omega)|^2 \propto \omega^2 |\tilde{\phi}_c^{(\pm)}(\omega)|^2 \quad (4.38)$$

が得られる。この関係式と (3.40) より、複素圧力摂動のパワースペクトルは

$$|\tilde{\delta p}_c^{(\pm)}(\omega)|^2 \propto \frac{\mp \omega}{e^{2\pi(\mp \omega)/\kappa} - 1} \quad (4.39)$$

となることが予想される。今回の数値実験では、得られた複素圧力摂動 $\delta p_c^{(\pm)}(t)$ に Gaussian 型の窓関数

$$W(t_1, t_2; t) \equiv \exp \left[-20 \left(\frac{t - (t_1 + t_2)/2}{t_2 - t_1} \right)^2 \right] \quad (4.40)$$

をかけたものについて FFT 解析を行い、そのパワースペクトルを計算した⁹。ここで、 t_1, t_2 はそれぞれ FFT 解析の開始時刻と終了時刻である。

4.3.3 数値実験の結果

図 4.3 に、断面積-Mach 数関係 (2.44) から求めた背景流（定常亜音速流、定常遷音速流）の Mach 数プロファイルを示す。

図 4.4 は上流 ($x_{\text{obs}} = 20 \text{ cm}$) で観測される音波 ($\Omega/2\pi = 20 \text{ kHz}, 100 \text{ kHz}$) の波形を式 (4.32) から予測したものである。音速点形成 ($t = 0$) からおよそ 0.6 msec 程度経過すると振動数低下が始まり、 $t \gtrsim 1.0 \text{ msec}$ では速度ポテンシャル摂動の振動がほとんど止まってしまう。この振動数低下は音速点近傍での波の引き延ばしを表わすものである。実験室での「真の観測量」である圧力摂動は速度ポテンシャル摂動を時間微分したものに比例するので、速度ポテンシャル摂動の振動数低下に伴い指数関数的に減衰する。このことから、引き延ばしの情報を含む波形は実質的に 0.6 msec から 1.0 msec までのおよそ 0.4 msec しか持続しないことがわかる。この持続時間はおおむね、Hawking 輻射の典型的な輻射振動数の逆数、すなわち表面重力 κ の逆数のオーダーである。

図 4.5 は、圧力摂動の負エネルギー解 $\delta p_c^{(-)}(t)$ のパワースペクトルをプロットしたものである。図からわかるように、どちらも $\omega = -\Omega$ にピークを持つと同時に、ピークの右側から

⁹窓関数は、波形の非定常性に起因するパワースペクトルの非物理的な振動を抑える役割を持つ。

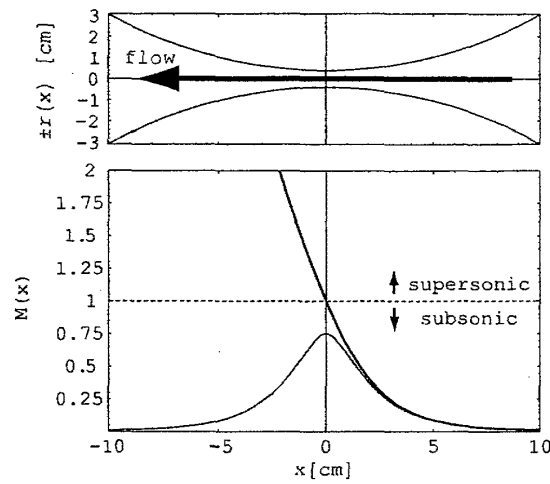


図 4.3: [上図] 仮定した Laval 管の形状と流れの方向。 x 軸の方向は流れと逆の向きにとっている。スロートの位置は $x = 0$ である。[下図] 数値実験に用いた背景流の Mach 数 $M = |v|/c_s$ の分布。細い曲線は定常亜音速流、太い曲線は定常遷音速流を表す。

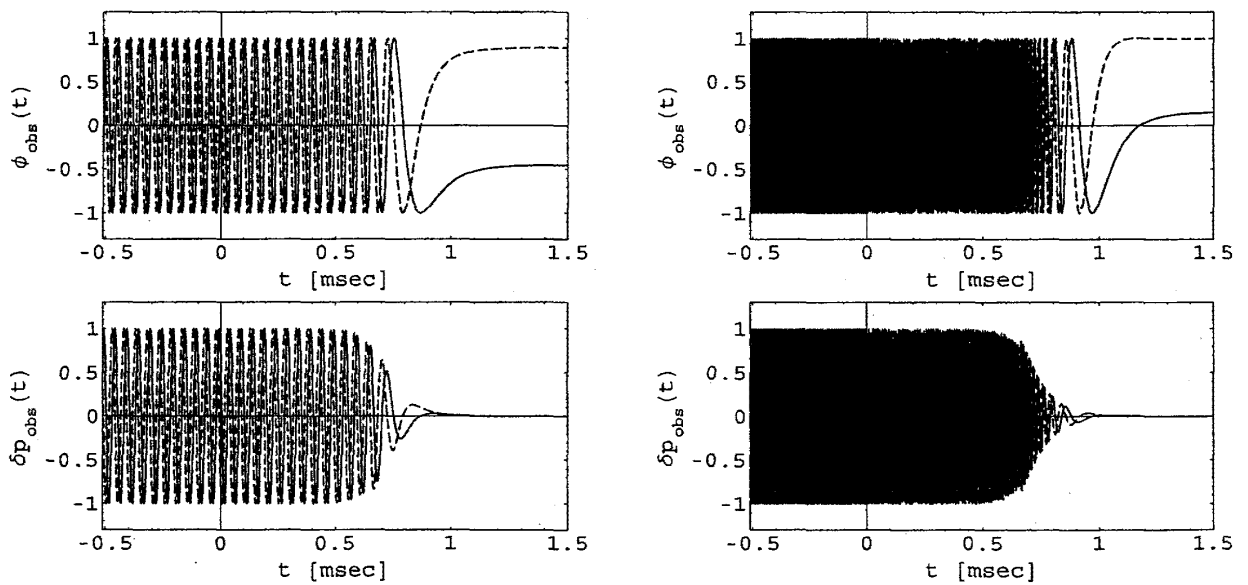


図 4.4: 上流で観測される音波 (左図: $\Omega/2\pi = 20$ kHz, 右図: $\Omega/2\pi = 100$ kHz) の予想波形。 $\phi_{\text{obs}}(t)$, $\delta p_{\text{obs}}(t)$ はそれぞれポテンシャル摂動、圧力摂動を表す。観測地点は $x_{\text{obs}} = 20$ cm、音速点形成の時刻は $t = 0$ である。実線の波形と破線の波形は初期位相が $\pi/2$ だけ異なる。各波形の振幅は 1 に規格化してある。

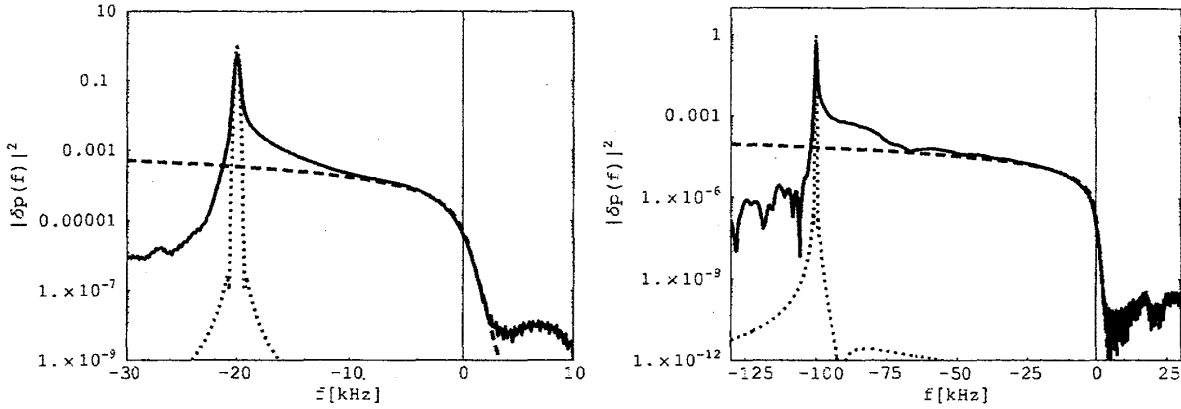


図 4.5: 複素圧力摂動の負エネルギー解 (左図: $\Omega/2\pi = 20$ kHz, 右図: $\Omega/2\pi = 100$ kHz) のパワースペクトル $|\tilde{\delta p}_c^{(-)}(\omega)|^2$ (実線)。横軸は $f \equiv \omega/2\pi$ である。FFT 解析の開始時刻と終了時刻はそれぞれ $t_1 = -3.0$ msec, $t_2 = 3.0$ msec とした。比較のため、単色波 ($\omega/2\pi = -20$ kHz, -100 kHz) に同様の FFT 解析を行って得たスペクトル (点線) と式 (4.39) の Planck 分布 (破線) も示した。

正周波数帯にかけてもスペクトル成分を持ち、しかもそこでは (4.39) の Planck 分布に一致するがわかる。明らかに、前者のピークは変形されずに届いた単色波 ($t \lesssim 1.0$ msec の波形要素) からの寄与であり、後者のスペクトル成分は変形されたて届いた音波 ($t \gtrsim 1.0$ msec の波形要素) からの寄与である。これは、単色波の変形によってそのスペクトル成分が Hawking 輻射の場合と全く同じように正周波数帯へ流出したことを意味する。

4.4 議論

数値実験から明らかになった事実を以下にまとめる。

- (1) 音速点近傍における引き延ばしの情報を持つ波形要素は、おおむね表面重力 κ の逆数程度の時間しか持続しない。 κ はその定義より音速点近傍での背景流の変化スケールの逆数に比例する量であり、つまり引き延ばしの効果が現れる空間的広がりを決める量である。従って、この量が大きいほど、それに比例して引き延ばしを受けた波形の長さが長くなるのである。
- (2) それでもなお、この波形要素を含む (複素) 音波のパワースペクトルは、対応するフォノンのスペクトルが確かに Planck 分布になることを示す。パワースペクトルが単色波のピークと Planck 分布を同時に持つことは、3 章の議論では見られなかった新しい事実である。3 章で求めた Hawking 輻射のスペクトルが単色波のピークを持たなかったのは、固有振動解の波形をホライズン近傍での漸近形で近似したことによって、ホライズンから離れた場所での波形の情報が脱落したのが原因である。今回の数値実験では、音速点近傍での引き延ばしの効果を受ける以前の波形まで含めて FFT 解析しており、その意味では今回の数値実験は 3 章での議論に比べてより現実的な状況を解析したものといえる。従って、今回の数値実験の結果がやはり正周

波数帯での Planck 分布を示すことは、「音の Hawking 輻射」が現実的な状況下においてもロバストに実現されることを強く示唆する。

装置を用いた実験で引き延ばされた音波を観測するときは、上の (1) を考慮して、振動数が κ よりも十分に大きい入射波を入れるべきである。というのも、時間 $1/\kappa$ の間に波が多く振動している方が、より精度良くその波形を決定できるからである。現在我々が使用している Laval 間の表面重力が 10 kHz 程度であるから、入射波には可聴音ではなく超音波を用いるのが良い。また、過去の実験で測定されたノイズスペクトルによると、4 kHz 以下でノイズは大きく、4 kHz 以上でノイズが減少するのがわかる [29]。従って、ノイズの波長帯を選ぶという観点からも、入射波の周波数を上げることは望ましいと言える。

5 準固有振動

5.1 固有振動と準固有振動

弦の振動や中空の箱の中の音波など、有限の領域上を伝わる波動は固有振動 (normal mode) の重ね合わせで表現できる。固有振動の各モードは時間に関して厳密に周期的であり、その振動数 (固有振動数) によって特徴付けられる。しかしながら、現実の物理系では純粋な固有振動が実現されることはない。空気中に置かれた弦の振動は常に空気との摩擦により減衰するし、箱の中の音は内壁で反射されるたびにその一部が箱に吸収される。このように、振動のエネルギーは現実的な系では常に (多かれ少なかれ) 外部に散逸され、その結果、純粋な周期振動である固有振動は、時間に関して対称でない減衰振動となる。このような振動は準固有振動 (quasinormal mode) と呼ばれる [15]。準固有振動は固有振動と異なり、振動数と減衰時間の組、あるいは複素振動数 (準固有振動数) によって特徴付けられる。

固有振動と準固有振動との本質的な違いは、系外への波の散逸があるかどうかに起因する。このことは、次のような簡単なモデルで端的に示される。長さ Δ の 1 次元の一樣な弦を考え、両端を壁に固定する (図 5.1)。但し、弦の固定された先の壁は「吸収壁」であり、反射の際に波の一部が壁に吸収されるとする。

弦の振動を表す波動方程式は

$$[-\partial_t^2 + \partial_x^2] \phi(t, x) = 0 \quad (5.1)$$

である。ここでは簡単のために音速を 1 とした。 $\phi(t, x) = e^{-i\omega t} \phi_\omega(x)$ として代入すると、

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 \right] \phi_\omega(x) = 0 \quad (5.2)$$

を得る。この方程式の一般解は、任意定数を A, B として

$$\phi_\omega(x) = Ae^{i\omega x} + Be^{-i\omega x} \quad (5.3)$$

である。

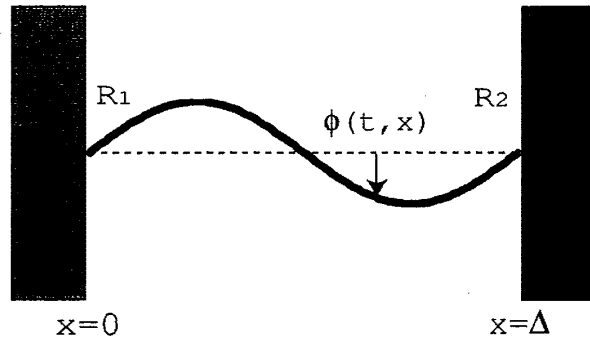


図 5.1: 吸収壁に固定された弦の運動。弦の両端 $x = 0, \Delta$ で反射の際に波の一部が吸収される。吸収壁の反射係数はそれぞれ $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in (0, 1]$ である。

ここで、吸収壁の反射係数 $\mathcal{R}$ を、反射波の入射波に対する振幅比として定義する。2つの吸収壁の位置を $x = 0, \Delta$ とし、反射係数をそれぞれ $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 \in (0, 1]$ とすると、 $\phi_\omega(x)$ の満たすべき条件は、

$$\phi_\omega(x) \propto e^{-i\omega x} - \mathcal{R}_1 e^{+i\omega x} \quad (5.4a)$$

$$\text{かつ } \phi_\omega(x) \propto e^{+i\omega(x-\Delta)} - \mathcal{R}_2 e^{-i\omega(x-\Delta)} \quad (5.4b)$$

である。これらと (5.3) を比較し、 A, B を消去すれば、 ω の満たすべき関係式

$$e^{-2i\omega\Delta} = \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \quad (5.5)$$

が得られる。これは、 $\omega = \Omega + i\gamma$ (Ω, γ は実数) とすれば、

$$\Omega = \frac{\pi n}{\Delta} \equiv \Omega_n \quad (n: \text{整数}) \quad (5.6a)$$

$$\gamma = \frac{1}{2\Delta} \ln \mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2 \quad (5.6b)$$

と等価である。

$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = 1$ の場合、すなわち境界で波の散逸が全く起こらない場合は $\gamma = 0$ となり、(5.6) は固有振動を定める条件に帰着する。ここでより興味があるのは $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2 < 1$ の場合である。 Ω_n は $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ に依らないので、境界での散逸がある場合も振動数（の実部、中心振動数¹⁰）は固有振動のそれと同じであり、モードの数も固有振動と同じく（可算）無限個存在する。一方で、 γ はこの場合ゼロとはならず、しかも常に負の値をとる [(5.6b) 式]。すなわち、全ての振動モードは減衰振動である。これが準固有振動と呼ばれるものに他ならない。

ここで見たモデルでは $\text{Im}(\omega_n) \equiv \gamma$ は全てのモードで共通だったが、後の節で見るように、一般には $\text{Im}(\omega_n)$ は各モードで異なる値を持つ。通常の表記では、準固有振動モードを区別する指数 n は 0 以上の実数にとり、 $\text{Im}(\omega_n)$ の小さなモードから順に $n = 0, 1, 2, \dots$ とラベルされる。特に、 $n = 0$ のモードは「最小減衰モード (least-damped mode)」と呼ばれる。

¹⁰本論文では、準固有振動数 ω_n の実部 $\text{Re}(\omega_n) = \Omega_n$ を ω_n 自体と区別するため、「中心振動数 (central frequency)」と呼ぶ。

5.2 ポテンシャル障壁の準固有振動

ある系が準固有振動を持つより自明でない例は、境界を取り払って無限に広い空間を考える代わりに、空間上に波に対するある種の“ポテンシャル障壁”が存在する場合である。代表的な例は、曲率を持つ時空これらは一般に、実効ポテンシャル項 $V(x)$ をもつ 1 次元波動方程式

$$[-\partial_t^2 + \partial_x^2 - V(x)] \Psi(t, x) = 0 \quad (5.7)$$

によって表される。

以下では、 $V(x)$ としてある点 $x = x_0$ で極大となり、遠方 $x \rightarrow \pm\infty$ でゼロに収束するようなものを仮定する。まず、前節と同様に $\Psi(t, x)$ を時間に関して Fourier 変換し、

$$\Psi_\omega(x) \equiv \mathcal{F}[\Psi(\cdot, x)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \Psi(t, x) dt \quad (5.8)$$

とすると、(5.7) は $\Psi(t, x)$ に対する Schrödinger 型の波動方程式

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 - V(x) \right] \Psi_\omega(x) = 0 \quad (5.9)$$

が得られる。この方程式は 2 階の常微分方程式なので、一般に 2 つの線形独立な解を持つ。特に遠方 $x \rightarrow \pm\infty$ では、 $V(x) \rightarrow 0$ より、 $\Psi(t, x)$ は右向きの単色波 $e^{i\omega x}$ と左向きの単色波 $e^{-i\omega x}$ の線形結合で表される。

いま、このポテンシャル障壁に対して入射してくる波の成分が無く、遠方に向かって波が散逸するだけの状態を表す解が存在するかどうかを考える。これは、 Ψ_ω の解に対して次のような境界条件

$$\Psi_\omega(x) \propto e^{-i\omega x}, \quad x \rightarrow -\infty \quad (5.10a)$$

$$\Psi_\omega(x) \propto e^{+i\omega x}, \quad x \rightarrow +\infty \quad (5.10b)$$

を課すことを意味する。このような境界条件を、本論文では「outgoing 境界条件」と呼ぶことにする。実は、以下の例からわかるように、このような境界条件を見たす解は振動数 ω を複素数値に拡張すると加算無限個だけ存在し、もしかもしその虚部は負、つまり減衰振動であることがわかる。これらがポテンシャル障壁の持つ準固有振動に他ならない。

ポテンシャル障壁 $V(x)$ の準固有振動を求めるためには、 $V(x)$ についての散乱問題を解く必要がある。ここでは、散乱問題が厳密に解ける例の 1 つである Pöschl-Teller ポテンシャルを扱う [4]。

Pöschl-Teller ポテンシャルは

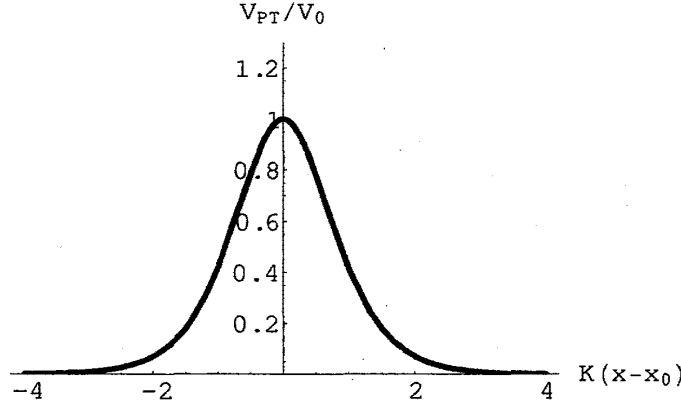
$$V_{\text{PT}}(x) = \frac{V_0}{\cosh^2[K(x - x_0)]} \quad (5.11)$$

で定義される¹¹。ここで $V_0 \equiv V_{\text{PT}}(x_0)$ はポテンシャルの極値、 $2K^2 \equiv -V_0''/V_0 \equiv$

¹¹(5.11) を一般化して

$$V_E(x) \equiv V_{\text{PT}}(x) + \frac{m^2}{2} (1 + \tanh(Kx))$$

としたものを Eckart ポテンシャルという。 $V_E(x)$ の散乱問題も同様に厳密に解けることが知られている。但し、 $V_E(x)$ は $x \rightarrow +\infty$ で $m^2 (\neq 0)$ に漸近する。


 図 5.2: Pöschl-Teller ポテンシャル $V_{PT}(x)$ の図。

$-V''_{PT}(x_0)/V_0 > 0$ は極大点における曲率である。ここではポテンシャル障壁を考えたいので、 $V_0 > 0$, $V''_0 < 0$ とする (図 5.2)。

このとき、補足 E に示すように、波動方程式 (5.9) は独立な 2 解

$$\psi_{\omega}^{(L)} \sim \begin{cases} e^{-i\omega(x-x_0)}, & x \rightarrow -\infty \\ A_{\omega}e^{-i\omega(x-x_0)} + B_{\omega}e^{i\omega(x-x_0)}, & x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (5.12)$$

$$\psi_{\omega}^{(R)} \sim \begin{cases} B_{\omega}e^{-i\omega(x-x_0)} + A_{\omega}e^{i\omega(x-x_0)}, & x \rightarrow -\infty \\ e^{i\omega(x-x_0)}, & x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (5.13)$$

を持つ。ここで、

$$A_{\omega} = \frac{\Gamma(1 - i\omega/K)\Gamma(-i\omega/K)}{\Gamma(\sigma_+ - i\omega/K)\Gamma(\sigma_- - i\omega/K)} \quad (5.14a)$$

$$B_{\omega} = \frac{\Gamma(1 - i\omega/K)\Gamma(+i\omega/K)}{\Gamma(\sigma_+)\Gamma(\sigma_-)} \quad (5.14b)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\pm} &= \frac{1}{2} \left[1 \pm \left(1 - \frac{4V_0}{K^2} \right)^{1/2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \pm i \left(\frac{V_0}{K^2} - \frac{1}{4} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (5.14c)$$

である。準固有振動は境界条件 (5.10) を満たす解なので、準固有振動数は

$$A_{\omega} = \frac{\Gamma(1 - i\omega/K)\Gamma(-i\omega/K)}{\Gamma(\sigma_+ - i\omega/K)\Gamma(\sigma_- - i\omega/K)} = 0 \quad (5.15)$$

の根である。ガンマ関数はゼロ点を持たないので、(5.15) の根は分母のガンマ関数の極に等しい。これより、Pöschl-Teller ポテンシャルの準固有振動数が

$$\begin{aligned} \omega &\equiv \omega_n^{\pm} = -iK(\sigma_{\pm} + n) \\ &= \pm \left(V_0 - \frac{K^2}{4} \right)^{1/2} - i \left(n + \frac{1}{2} \right) K, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (5.16)$$

であることがわかる。これは確かに複素数であり、その虚部は常に負であることも容易に示すことができる。

準固有振動数の厳密解 (5.16) から、Pöschl-Teller ポテンシャルの持つ準固有振動のスペクトルについていくつかの興味深い事実がわかる。まず、 $V_0 < K^2/4$ のとき、 ω_n は (負の) 純虚数になる。従って、この場合は初期に与えられた摂動は振動せずに遠方へ伝播していくことになる。逆に、 $V_0 \gg K^2/4$ の場合は、準固有振動の中心振動数 $\text{Re}(\omega_n)$ は基本的にポテンシャルの極大値 V_0 で決まるようになる。一方で、減衰時間の逆数である $\text{Im}(\omega_n)$ は ($V_0 > K^2/4$ であれば) ポテンシャルの極大値 V_0 には依存せず、極大点の曲率を表す K のみによって決まる。他にも、 $\text{Re}(\omega_n)$ は全ての準固有振動モードについて一定の値をとることがわかるが、これは Pöschl-Teller ポテンシャル特有の性質であり、一般には $\text{Re}(\omega_n)$ は n によって変化する。

ポテンシャル障壁の準固有振動は、本質的には共鳴振動と同じものである。(5.12) や (5.13) は「振幅 1 でポテンシャル障壁に入射した単色波は、振幅 $|1/A_\omega|$ の透過波と振幅 $|B_\omega/A_\omega|$ の反射波に分かれる」ということを表わしているとも見ることができる。一方、 $|1/A_\omega|$ は $\omega \rightarrow \omega_n$ で発散する。つまり準固有振動数 ω_n はポテンシャル障壁の持つ共鳴振動数である。準固有振動と共鳴振動の違いは、放出波の振幅を有限にとって入射の振幅をゼロにとるか、入射波の振幅を有限にとって放出波の振幅を無限大にとるかの違いでしかない。

5.3 ブラックホールの準固有振動

星の合体や重力崩壊によってブラックホールが形成されると、「リングダウン重力波 (gravitational ringdown wave)」と呼ばれる減衰振動型の重力波が放出されることが数値シミュレーションによって知られている (レビューとして [15] を参照)。これの正体は、ブラックホール時空の準固有振動である。ブラックホール時空はブラックホールの質量、角運動量、及び電荷で完全に決まるので、リングダウン重力波の中心振動数と減衰時間もこの 3 つのパラメータだけで完全に決定される。また、現実には存在しているブラックホール天体は電氣的に中性であると考えられているので、ブラックホールのパラメータは実質的に質量と角運動量の 2 つのみである。ブラックホールの準固有振動数は理論的によく知られているため、ブラックホールのリングダウン重力波を観測することが可能になれば、その中心振動数と減衰時間から放出天体の質量と角運動量を直接かつ精度良く知ることができるようになる。このように、ブラックホールのリングダウン重力波は重力波観測と天文学とをつなぐ役割を果たすことが期待される。

ブラックホール時空上で準固有振動がどのように励起されるかは後の節で議論することにし、ここではブラックホール時空が準固有振動モードを持つことを見ることにする。ブラックホールまわりの時空では、時空自体の摂動である重力波だけでなく、その上を伝播するスカラー場や電磁波なども準固有振動を持つ。ここではその例として、Schwarzschild 時空上のスカラー場を考える [30]。Schwarzschild 時空上でのスカラー場の波動方程式は

$$\square\Phi(x) = \left[-\frac{\partial_{ct_s}^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \partial_r - \frac{\hat{L}^2}{r^2} \right] \Phi(x) = 0 \quad (5.17)$$

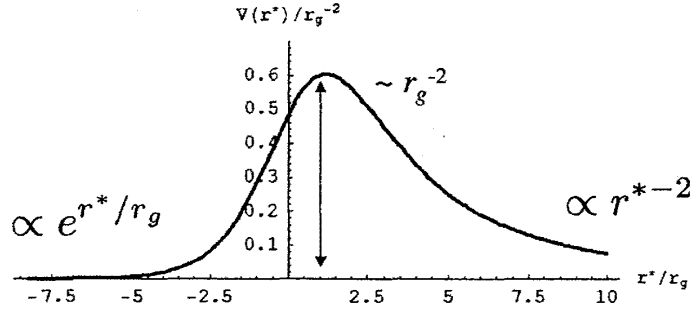


図 5.3: $l=2$ モードの重力波に対する Regge-Wheeler ポテンシャル $V(r^*)$ 。ホライズン近傍 ($r^* \rightarrow -\infty$) では指数関数的に、空間的無限遠 ($r^* \rightarrow +\infty$) では $(r^*)^{-2}$ に比例して小さくなる。ポテンシャルの極大点は $r = 1.64r_g$ にある。

と書き表される。ここで $\hat{L}$ は角運動量演算子

$$\hat{L}^2 = - \left[\frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \right] \quad (5.18)$$

である。まず、 $\Phi(x)$ を時間方向に関して Fourier 展開、角度方向に関して球面調和展開し、

$$\Phi(x) = \int d\omega e^{-i\omega t_s} \sum_{l,m} Y_{lm}(\theta, \varphi) \frac{\phi_{\omega lm}(r)}{r} \quad (5.19)$$

と書く。これを (5.17) に代入すると、 $\phi_{\omega lm}(r)$ に関する方程式

$$\left[\left(\frac{\omega}{c} \right)^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r^2 \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \frac{d}{dr} \frac{1}{r} - \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \phi_{\omega lm}(r) = 0 \quad (5.20)$$

が得られる。さらに微分を Regge-Wheeler 座標 r^* (補足 B.3 参照) に関する微分に書き直すと、これは Schrödinger 型の波動方程式

$$\left[\frac{d^2}{dr^{*2}} + \frac{\omega^2}{c^2} - V(r^*) \right] \phi_{\omega lm}(r) = 0 \quad (5.21)$$

$$V(r^*) = \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{r_g}{r^3} \right] \quad (5.22)$$

に帰着する。今の場合、ポテンシャル項 $V(r^*)$ の第 1 項は遠心力障壁 $l(l+1)/r^2$ がホライズン近傍では重力青方偏移の効果により実質的に弱まって見えることを意味し、第 2 項は球面波 ($l=0$) であっても空間が曲がっているためにスカラー場が散乱されることを表している。このような散乱は曲率散乱と呼ばれる。

電磁波や重力波の動径方向の波動方程式も (5.21) と同形の方程式に帰着できることができ、これらをまとめるとポテンシャル項 $V(x^*)$ は

$$V(r^*) = \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{(1-s^2)r_g}{r^3} \right] \quad (5.23)$$

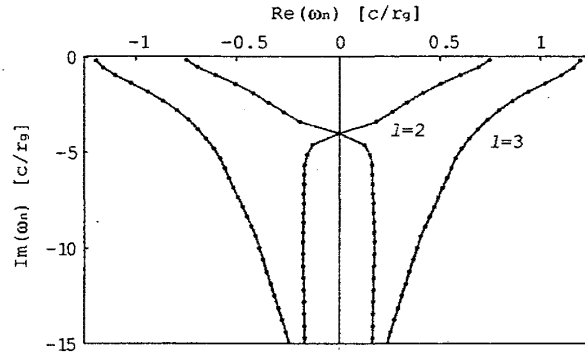


図 5.4: Schwarzschild ブラックホールの準固有振動重力波のスペクトル。赤の点が準固有振動モードを表す。縦軸と横軸はそれぞれ $\text{Re}(\omega_n r_g/c)$, $\text{Im}(\omega_n r_g/c)$ である。各振動数は Leaver の方法 [13] によって計算された。

のように一般化される。ここで、 s は考えている波動のスピンを表し、スカラー場は $s = 0$ 、電磁波は $s = 1$ 、重力波は $s = 2$ である。特に、重力波 ($s = 2$) の場合、 $V(x^*)$ は Regge-Wheeler ポテンシャルと呼ばれる。図 5.3 は、 $l = 2$ モードの重力波に対する Regge-Wheeler ポテンシャルを r^* の関数として表したものである。

波動方程式 (5.21) の厳密解は、現在のところ明らかになっていない。しかし、5.6 節で述べる「Leaver の方法」と呼ばれる方法によって、準固有振動数の数値解が非常に精度良く求められている。図 5.4 は、この方法によって計算された Schwarzschild ブラックホールの準固有振動重力波のスペクトルを表したものである。準固有振動の波長 $2\pi c/\text{Re}(\omega_n)$ がおおむねブラックホールの重力半径 r_g のオーダーであることは興味深い。これは、準固有振動がブラックホールの共鳴振動であることを端的に示している。また、 n が小さいモードほど中心振動数は大きく、 n が大きい極限で $\text{Re}(\omega_n)$ は一定の値に漸近することが知られている。この漸近値が量子化されたブラックホールの断面積の準位幅を決めているという興味深い説もあるが [8]、未だ確証されてはいない。いずれにしろ、観測上最も重要なモードは $n = 0$ の最小減衰モードである。 $l = 2$ の準固有振動重力波の最小減衰モードは

$$\omega_0 = (\pm 0.747 - 0.178i)c/r_g \quad (5.24)$$

と計算されている。

5.4 準固有振動と束縛状態との関係

準固有振動の著しい特徴の 1 つは、そのスペクトルが必ず離散的な構造をとることである。このことは、ポテンシャル障壁の持つ準固有振動とポテンシャル井戸の束縛状態が何らかの意味で対応していることを示唆する [4]。

例として、5.2 節で解析した Pöschl-Teller ポテンシャルを考える。まず、Schrödinger 型

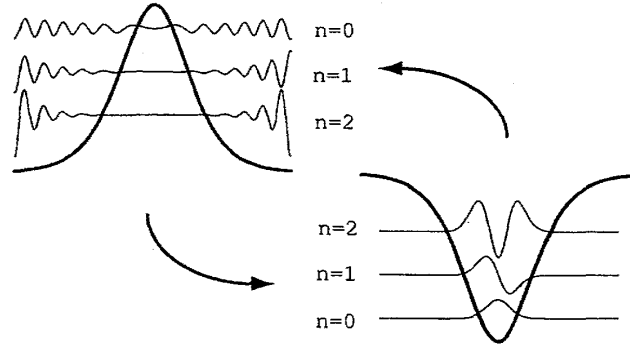


図 5.5: ポテンシャル障壁の準固有振動 (左上) とポテンシャル井戸の束縛状態 (右下) との関係。最小減衰モードは基底状態に、第 n 減衰モードは第 n 励起状態にそれぞれ対応する。

波動方程式 (5.9) に対して変換

$$x - x_0 \longrightarrow i(x - x_0) \quad (5.25a)$$

$$(V_0, K) \longrightarrow (V_0, -iK) \quad (5.25b)$$

$$\omega \longrightarrow \Omega \quad (5.25c)$$

$$\Psi_\omega(x) \longrightarrow \Phi_\Omega(x) \quad (5.25d)$$

施すと、波動方程式 (5.9) と outgoing 境界条件 (5.10) はそれぞれ

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + \Omega^2 - V_{PT}(x) \right] \Phi_\Omega(x) = 0 \quad (5.26)$$

$$\Phi_\Omega(x) \sim e^{\mp\Omega x}, \quad x \rightarrow \pm\infty \quad (5.27)$$

となる。さらに、解の固有値 $\Omega_n^\pm$ は

$$\Omega_n^\pm = \pm \left(V_0 + \frac{K^2}{4} \right)^{1/2} - \left(n + \frac{1}{2} \right) K, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.28)$$

である。これより、 $\Omega_n^\pm$ は常に実数であることがわかる。

ここで、固有値 (5.28) を持つ解 $\Phi_{\Omega_n}(x)$ がどのような意味を持つ解なのかを考えてみる。まず、(5.26) はポテンシャル井戸 $-V_{PT}(x)$ の中で運動する、固有エネルギー $-\Omega^2 < 0$ の粒子の満たす Schrödinger 方程式である。さらに境界条件 (5.27) は、 Ω が正の実数であれば、ポテンシャル井戸に束縛される粒子の境界条件に他ならない。つまり、 $\Omega_n > 0$ であるような固有値に属する解 $\Phi_{\Omega_n}(x)$ は、束縛粒子の状態を表す波動関数である。(5.28) より $\Omega_n^\pm$ のうち少なくとも1つは正の実数になるから、束縛状態は少なくとも1つ存在することがわかる。そして重要なのは、準固有振動のうち減衰時間の短いもの、つまり n の小さいものから順に、反転したポテンシャルの基底状態、第一励起状態、第二励起状態、…に対応しているということである。この対応を表す模式図を図 5.5 に示す。

この対応から、準固有振動スペクトルの一般的性質について次のことがわかる。ポテンシャル井戸 $-V(x)$ の中では、粒子は n の小さな束縛状態に行くほど狭い空間領域に閉

じ込められる。言い換えれば、 n の小さな束縛状態の 2 つの古典的転回点はともに井戸の極小点 $x = x_0$ の近傍に存在する。従って、これらの波動関数のエネルギー準位は基本的にポテンシャル井戸の極小点近傍の構造だけで決まっていると言える。ポテンシャル障壁 $V(x)$ の準固有振動の n の小さいモードに対応するわけだから、これらの中心振動数と減衰時間もまた極大点近傍の構造だけで基本的に決まると考えることができる。このことは、与えられたポテンシャル障壁の形から n の低いモードの準固有振動数を計算する際に、ポテンシャルの極大点のまわりを準固有振動数が厳密に解ける解析関数で近似することが正当化されることを意味する。

5.5 初期値問題による準固有振動の取り扱い

ここまでの議論では、ブラックホールなどの系において準固有振動モードが存在するということを示してきたが、これらのモードがどのように励起されるかは考えなかった。そもそも準固有振動は定義により減衰振動であり、時間を逆にたどると $t \rightarrow -\infty$ の極限で発散するようなモードである。それどころか、ブラックホール時空の場合のように無限大の空間領域を考えると、準固有振動は空間方向にも発散する。これは、準固有振動が本質的に非定常な振動であるにもかかわらず、波動方程式を Fourier 変換することによって定常問題の解として扱ったことに問題がある。現実には、準固有振動は無限の過去から励起されておらず、むしろ有限の時間、有限の空間において励起されるはずである。そこで、ある時刻にコンパクトな摂動が系に注入されるような状況を考え、この摂動の時間発展を初期値問題として解くことを考える [20, 16, 21]。このように取り扱うと、初期に注入された摂動は空間的に打ち切られた準固有振動の重ね合わせとして無限遠方に広がっていくことがわかり、空間方向の準固有振動の発散は現実には見られないことがわかる。

以下では、波動方程式 (5.7) を、初期条件

$$\Psi(0, x) = f(x) \quad (5.29a)$$

$$\partial_t \Psi(0, x) = g(x) \quad (5.29b)$$

の下に解くことを考える。ここで $f(x)$, $g(x)$ は初期に注入された摂動を表す関数であり、ともにポテンシャル障壁近傍のコンパクトな領域 $[x_L, x_R]$ にのみ広がっていると仮定する。

まず、波動 $\Psi(t, x)$ は $t \rightarrow +\infty$ で有限であると仮定し、 $\Psi(t, x)$ を t に関して Laplace 変換する。

$$\Psi_\omega(x) \equiv \mathcal{L}[\Psi(\cdot, x)](-i\omega) = \int_0^\infty e^{i\omega t} \Psi(t, x) dt \quad (5.30)$$

但し、 $\Psi(t, x)$ の有限性の仮定より、(5.30) で定義された $\Psi_\omega(x)$ は $\text{Im}(\omega) > 0$ でのみ意味を持つ。Laplace 変換の性質

$$\mathcal{L}[\partial_t \Psi(\cdot, x)](s) = -\Psi(0, x) + s\mathcal{L}[\Psi(\cdot, x)](s) \quad (5.31)$$

を用いることにより、波動方程式 (5.7) は

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 - V(x) \right] \Psi_\omega(x) &= i\omega f(x) - g(x) \\ &\equiv S_\omega(x) \end{aligned} \quad (5.32)$$

と変換される。すなわち、(5.7)の初期値問題を解くことは、 $\Psi_\omega(x)$ の非同次方程式(5.32)を解くことに帰着した。

ここで、Green関数 $G_\omega(x, x')$ を

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 - V(x) \right] G_\omega(x, x') = \delta(x - x') \quad (5.33)$$

の解として定義する。 $G_\omega(x, x')$ が求まれば、初期条件(5.29)を満たす(5.32)の解は、

$$\Psi_\omega(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_\omega(x, x') S_\omega(x') dx' \quad (5.34)$$

として与えられることになる。

Green関数 $G_\omega(x, x')$ は、 $\Psi_\omega(x)$ の同次方程式

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 - V(x) \right] \Psi_\omega(x) = 0 \quad (5.9)$$

の線形独立な2解を用いて構成することができる。具体的には、独立な2解を $\psi_\omega^{(1,2)}(x)$ とにおいて

$$G_\omega(x, x') = \begin{cases} \frac{1}{W_\omega} \psi_\omega^{(1)}(x) \psi_\omega^{(2)}(x'), & x < x' \\ \frac{1}{W_\omega} \psi_\omega^{(2)}(x) \psi_\omega^{(1)}(x'), & x' < x \end{cases} \quad (5.35)$$

つまり、

$$\begin{aligned} \Psi_\omega(x) &= \frac{1}{W_\omega} \left[\psi_\omega^{(2)}(x) \int_{-\infty}^x \psi_\omega^{(1)}(x') S_\omega(x') dx' + \psi_\omega^{(1)}(x) \int_x^{\infty} \psi_\omega^{(2)}(x') S_\omega(x') dx' \right] \\ &= \frac{1}{W_\omega} \left[\psi_\omega^{(2)}(x) \int_{x_L}^x \psi_\omega^{(1)}(x') S_\omega(x') dx' + \psi_\omega^{(1)}(x) \int_x^{x_R} \psi_\omega^{(2)}(x') S_\omega(x') dx' \right] \end{aligned} \quad (5.36)$$

とすればよい。ここで、 W_ω は同次解 $\psi_\omega^{(1,2)}(x)$ のWronskian

$$W_\omega \equiv \psi_\omega^{(1)}(x) \frac{d}{dx} \psi_\omega^{(2)}(x) - \psi_\omega^{(2)}(x) \frac{d}{dx} \psi_\omega^{(1)}(x) \quad (5.37)$$

である。このように定義された W_ω が x に依らないことは、同次方程式(5.9)を用いて容易に示すことができる。

上で構成した $G_\omega(x, x')$ は、独立な同次解 $\psi_\omega^{(1,2)}(x)$ をどのようにとっても(5.33)を満たす。だが、以下に示すように、 $\psi_\omega^{(1,2)}(x)$ のとり方は $\Psi(x, t)$ の有限性を考慮することによって(定数倍を除いて)一意に決定される¹²。 $\Psi(x, t)$ が $t > 0, -\infty < x < \infty$ で有限であるための必要十分条件は、(5.36)からわかるように、 $\psi_\omega^{(1)}(x)$ は $x \rightarrow -\infty$ で、 $\psi_\omega^{(2)}(x)$ は

¹² $\psi_\omega^{(1,2)}(x)$ の定数倍の自由度は $G_\omega(x, x')$ の不定性を意味しない。 W_ω が $\psi_\omega^{(1,2)}(x)$ のそれぞれに比例するからである。

$x \rightarrow +\infty$ でそれぞれ有限であることである。そこで、 $\psi_\omega^{(1,2)}(x)$ の候補として、次の漸近形を持つ独立な 2 解を考える。

$$\psi_\omega^{(L)} \sim \begin{cases} e^{-i\omega x}, & x \rightarrow -\infty \\ A_\omega e^{-i\omega x} + B_\omega e^{i\omega x}, & x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (5.38)$$

$$\psi_\omega^{(R)} \sim \begin{cases} C_\omega e^{-i\omega x} + D_\omega e^{i\omega x}, & x \rightarrow -\infty \\ e^{i\omega x}, & x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (5.39)$$

$\text{Im}(\omega) > 0$ より、 $\psi_\omega^{(L)}$ は $x \rightarrow -\infty$ で収束する唯一の解であり、また $\psi_\omega^{(R)}$ は $x \rightarrow +\infty$ で収束する唯一の解であることがわかる（もちろん、定数倍の不定性は残る）。従って、一意に $\psi_\omega^{(1)} \propto \psi_\omega^{(L)}$, $\psi_\omega^{(2)} \propto \psi_\omega^{(R)}$ が決定される。以下では単に $\psi_\omega^{(1)} = \psi_\omega^{(L)}$, $\psi_\omega^{(2)} = \psi_\omega^{(R)}$ とする。Wronskian W_ω を求めておくと、

$$\begin{aligned} W_\omega &= \psi_\omega^{(L)}(x) \frac{d}{dx} \psi_\omega^{(R)}(x) - \psi_\omega^{(R)}(x) \frac{d}{dx} \psi_\omega^{(L)}(x) \\ &= 2i\omega A_\omega \end{aligned} \quad (5.40a)$$

$$= 2i\omega D_\omega \quad (5.40b)$$

となる。ここで、右辺第 2 行、第 3 行はそれぞれ右辺第 1 行を $x \rightarrow +\infty, -\infty$ で評価したものである。これらからただちに $A_\omega = D_\omega$ が導かれる。

元の波動方程式 (5.7) の解 $\Psi(t, x)$ は逆 Laplace 変換により

$$\begin{aligned} \Psi(t, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} e^{-i\omega t} \Psi_\omega(x) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{W_\omega} \left[\psi_\omega^{(R)}(x) \int_{x_L}^x \psi_\omega^{(L)}(x') S_\omega(x') dx' \right. \\ &\quad \left. + \psi_\omega^{(L)}(x) \int_x^{x_R} \psi_\omega^{(R)}(x') S_\omega(x') dx' \right] \end{aligned} \quad (5.41)$$

となる。但し、 $\epsilon > 0$ である。ここで、 $x > x_R$ の領域を考えると、(5.41) の第 2 項は落ちる。また、ポテンシャル障壁から十分離れた位置を考えれば $\psi_\omega^{(R)}(x) \sim e^{i\omega x}$ としてよい。従って、十分遠方 $x \gg x_R$ では

$$\Psi(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+i\epsilon}^{\infty+i\epsilon} d\omega \frac{e^{i\omega(x-t)}}{W_\omega} \int_{x_L}^{x_R} dx' \psi_\omega^{(L)}(x') S_\omega(x') \quad (5.42)$$

と表される。

ここまでの解析で初期値問題の解が (5.41)、あるいは (5.42) のように形式的に求まったわけであるが、これらと準固有振動との関係はまだ見えていない。実は、以下に示すように、準固有振動モードは Green 関数 $G_\omega(x, x')$ の複素 ω 空間上での極 (pole) と同一視される。むしろ、準固有振動モードは「Green 関数 $G_\omega(x, x')$ の極」として定義されると考えるべきである。

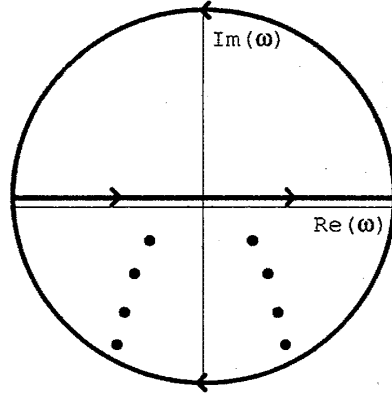


図 5.6: ω 積分の積分路。黒点は Green 関数 $G_\omega(x, x')$ の極、すなわち準固有振動モードを表す。

(5.42) の ω 積分を実行するため、積分路を複素 ω 空間の上半面か下半面で閉じ、留数定理を適用することを考える (図 5.5)。その際に注意しなければならないのが、 $\Psi_\omega(x)$ はもともと Laplace 変換 (5.30) を通じて $\text{Im}(\omega) > 0$ でのみ定義されているという点である。従って、下半面 $\text{Im}(\omega) < 0$ における $\Psi_\omega(x)$ とは、上半面で (Laplace 変換を通じて) 定義された $\Psi_\omega(x)$ を下半面に解析接続したものと解さなければならない。これは $W_\omega, \psi_\omega^{(L,R)}(x)$ に対しても同様である。このとき、下半面には一般に $\Psi_\omega(x)$ の加算個の極 ω_n ($n = 0, 1, \dots$) が存在する。 $\psi_\omega^{(L,R)}(x)$ はそのような特異性を持たないので、これらの極は Wronskian W_ω のゼロ点としてもたらされるものである。(5.40) より、

$$0 = W_{\omega_n} = 2i\omega_n A_{\omega_n} = 2i\omega_n D_{\omega_n} \quad (5.43)$$

すなわち、 $\psi_{\omega_n}^{(L,R)}(x)$ は $x \rightarrow -\infty, +\infty$ の両方で外向き (outgoing) であることがわかる。しかもこれらは $\text{Im}(\omega_n) < 0$ より減衰振動である。この外向きの減衰振動波こそが準固有振動に他ならない。

積分路を閉じる議論に戻る。被積分関数に因子 $e^{i\omega(x-t)}$ が含まれていることから、 $t-x$ が十分大きければ被積分関数は下半面で解析的である。よって、このとき (5.42) は

$$\Psi(t, x) = -i \sum_n \frac{e^{i\omega_n(x-t)}}{W'_{\omega_n}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_{\omega_n}^{(L)}(x') S_{\omega_n}(x') dx' \quad (5.44)$$

$$W'_{\omega_n} = \left. \frac{dW_\omega}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_n} \quad (5.45)$$

となる。これは、ポテンシャル障壁のまわりに注入された初期の摂動が準固有振動の重ね合わせとなってポテンシャルの遠方へ広がっていくことを意味する。また、各準固有振動モードは、 S_{ω_n} に依存する振幅

$$C_n \equiv \frac{1}{W'_{\omega_n}} \int_{x_L}^{x_R} \psi_{\omega_n}^{(L)}(x') S_{\omega_n}(x') dx' \quad (5.46)$$

で励起される。この C_n は準固有振動の励起係数と呼ばれる。逆に、 $t-x$ が十分小さければ被積分関数は上半面で解析的であり、 $\Psi(t, x) = 0$ を与える。つまり、 t を固定して考え

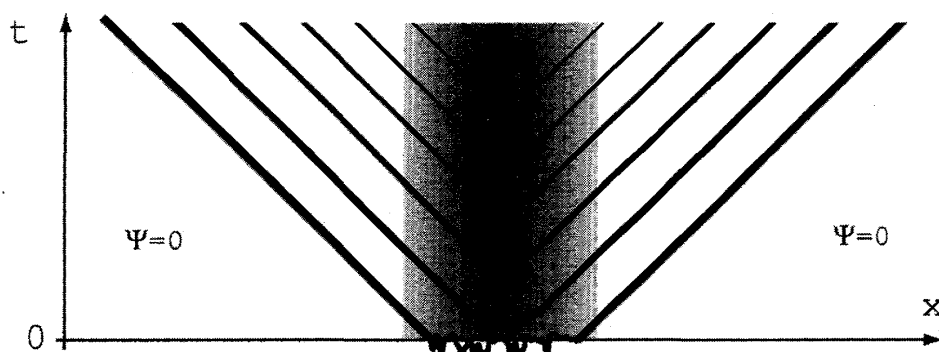


図 5.7: 初期値問題における準固有振動の励起。初期時刻 $t = 0$ にポテンシャル障壁（灰色の領域）近傍に注入された摂動は、空間方向に打ち切られた準固有振動となって遠方へ広がっていく。

れば、準固有振動の重ね合わせである $\Psi(t, x)$ は図 5.7 のように空間的に打ち切られた形となっている。これは、因果律を考えれば当然の結果であるといえる。

ブラックホール形成の際にリングダウン重力波が放出される描像は直観的には次のように理解される。星の重力崩壊や連星の合体によってブラックホールが形成された直後の時空計量は、定常状態であるブラックホール時空の計量成分と「余分な」計量成分の足しあわせになっているとみなすことができる。このうち、余分な計量成分が初期摂動となって準固有振動モードを励起し、リングダウン重力波として無限遠方とホライズンの内側へ広がっていくのである。

5.6 準固有振動モードの近似計算法

次章での流体の準固有振動の解析のための準備として、準固有振動モードを近似的に計算する方法をいくつか示す。準固有振動モードを解析的に求めることのできる例はほとんど知られていない。応用上最も重要であるブラックホールの準固有振動でさえ、その解析解は未だ得られていない。そのため、与えられたポテンシャル障壁の形状から準固有振動モードを近似的に計算する手法が数多く考案されている。代表的な計算法は次の 3 つである。

5.6.1 連分数展開を用いる方法（Leaver の方法）

今日知られている準固有振動の近似解法のうち、最も良い精度をもたらすのは、「Leaver の方法」と呼ばれる方法である [13]。今日、ブラックホールの準固有振動数の「理論値」と言った場合、この方法によって計算されたものを指す。Leaver は、ブラックホールの準固有振動を特徴付ける波動方程式が H_2^+ イオンの Schrödinger 方程式と同型であることに着目し、 H_2^+ イオンのエネルギー準位を求める方法を利用した。この方法では、波動関数から漸近的境界条件を満たすような因子を引き抜いた上で級数展開を行い、係数が満たすべき 3 項漸化式を求める。さらにこの 3 項漸化式は、無限連分数で表される ω の特性方

程式に帰着できる。Leaverはこの無限連分を有限項で打ち切ってこの特性方程式を数値的に解き、ブラックホールの準固有振動数を求めた。Leaverの方法の優れている点は、準固有振動数を高次のモードまで高い精度で計算できることである。但し、ポテンシャルの形状が解析的にわかっていないような場合は、適用することができない。

5.6.2 ポテンシャルを解析関数で近似する方法

Pöschl-Teller ポテンシャルは2個のパラメータ（ポテンシャル障壁のピーク値と曲率）を持っており、これらのパラメータの自由度を用いて準固有振動を求めたいポテンシャルの極大点近傍に Pöschl-Teller ポテンシャルをフィットさせることで、準固有振動数を Pöschl-Teller ポテンシャルの厳密解から近似的に求めることができる。本論文では、この方法を提案者の名前から「Mashhoon の方法」と呼ぶことにする [4]。この方法によると、準固有振動数 ω_n は

$$\omega_n = \left(V_0 - \frac{V_0''}{8V_0} \right)^{1/2} - i \left(n + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{V_0''}{2V_0} \right)^{1/2} \quad (5.47)$$

と計算される。ここで下付き添え字 $''_0$ はピークにおける値を表わす。

Mashhoon の方法は WKB 近似法（次項参照）と同じくポテンシャルの解析形がわからなくても準固有振動数を求めることができるが、その精度は高次の WKB 近似に比べると一般に劣る。一方で、WKB 近似の次数を上げて準固有振動数が収束しないようなポテンシャルでもこの方法を用いると比較的精度良く計算できる場合がある。

5.6.3 WKB 近似を用いる方法

5.2 節で述べたように、準固有振動モードを求めるには、ポテンシャル障壁による散乱問題が解ければよい。Schutz と Will は、ポテンシャル散乱問題を WKB 近似を用いて解き、準固有振動数を与える近似公式を導いた [19]。この方法は、ポテンシャル障壁の形状が数値的にさえわかっているならば準固有振動数を算出できるので、Leaver の方法が適用できない場合には有効である [12]。また、WKB 近似はその精度を系統的に上げていくことが可能である。現在、この方法による準固有振動数の公式は、WKB 近似の 6 次まで求められている [10, 9, 11]。

この方法では、ポテンシャル障壁から離れたところでの同次解 $\Psi_\omega(x)$ を WKB 近似解で置き換える。1 次 WKB 近似を例にとると、 $x \ll x_0$ では

$$\begin{aligned} \Psi_\omega(x) \simeq & \frac{Z_+^I}{[\omega^2 - V(x)]^{1/4}} \exp \left[+i \int_{x_1}^x \sqrt{\omega^2 - V(x')} dx' \right] \\ & + \frac{Z_-^I}{[\omega^2 - V(x)]^{1/4}} \exp \left[-i \int_{x_1}^x \sqrt{\omega^2 - V(x')} dx' \right] \end{aligned} \quad (5.48)$$

とし、同様に $x \gg x_0$ では

$$\begin{aligned} \Psi_\omega(x) \simeq & \frac{Z_+^{\text{III}}}{[\omega^2 - V(x)]^{1/4}} \exp \left[+i \int_{x_2}^x \sqrt{\omega^2 - V(x')} dx' \right] \\ & + \frac{Z_-^{\text{III}}}{[\omega^2 - V(x)]^{1/4}} \exp \left[-i \int_{x_2}^x \sqrt{\omega^2 - V(x')} dx' \right] \end{aligned} \quad (5.49)$$

とする。ここで、 x_1, x_2 ($x_1 < x_0 < x_2$) は $\omega^2 - V(x) = 0$ となる点、いわゆる古典的転回点である。特に無限遠では $V(x)$ は 0 に近づくので、 $\Psi_\omega(x)$ は $x \rightarrow \pm\infty$ では漸近的に

$$\Psi_\omega(x) \sim \begin{cases} Z_+^{\text{I}} \omega^{-1/2} e^{+i\omega(x-x_1)} + Z_-^{\text{I}} \omega^{-1/2} e^{-i\omega(x-x_1)}, & x \rightarrow -\infty \\ Z_+^{\text{III}} \omega^{-1/2} e^{+i\omega(x-x_2)} + Z_-^{\text{III}} \omega^{-1/2} e^{-i\omega(x-x_2)}, & x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (5.50)$$

と書かれることになる。

同次方程式 (5.9) の一般解は任意定数を 2 つだけ持つので、4 つの係数 $Z_\pm^{\text{I}}, Z_\pm^{\text{III}}$ は互いに独立ではない。 Z_+^{I} と Z_+^{III} との関係を決める変換行列は散乱行列と呼ばれ、

$$\begin{pmatrix} Z_+^{\text{I}} \\ Z_-^{\text{I}} \end{pmatrix} = \mathcal{M}_V \begin{pmatrix} Z_+^{\text{III}} \\ Z_-^{\text{III}} \end{pmatrix} \quad (5.51)$$

で定義される。散乱行列の各要素はポテンシャル障壁の構造と振動数 ω から決まる。Schutz と Will[19] は、散乱ポテンシャルを極大点のまわりで冪級数で近似し、同次方程式 (5.9) の近似解を WKB 解と接続することで散乱行列を求めた。導出は補足 D に示すことにし、ここでは結果のみを示す。

$$\mathcal{M}_V = \begin{pmatrix} \frac{(2\pi)^{1/2}}{F(\nu)^2 \Gamma(-\nu)} & -e^{i\pi\nu} \\ e^{i\pi\nu} & \frac{iF(\nu)^2 e^{i\pi\nu} (2\pi)^{1/2}}{\Gamma(\nu+1)} \end{pmatrix} \quad (5.52)$$

$$\nu + \frac{1}{2} \equiv i \frac{\omega^2 - V_0}{(-2V_0'')^{1/2}} \quad (5.53)$$

$$F(\nu) = e^{-(\nu+1/2)/2} \left(\nu + \frac{1}{2} \right)^{(\nu+1/2)/2} \quad (5.54)$$

準固有振動は、同次方程式 (5.9) の outgoing 境界条件を満たす解であるから、 $Z_+^{\text{I}} = Z_-^{\text{III}} = 0$ とおく。すると、(5.51) より散乱行列の要素に対する条件

$$(\mathcal{M}_V)_{11} = \frac{(2\pi)^{1/2}}{F(\nu)^2 \Gamma(-\nu)} = 0 \quad (5.55)$$

が得られる。 $F(\nu)$ は正則な関数であるから、この条件は $\nu \equiv n = 0, 1, 2, \dots$ のときのみ満たされる。これを (5.53) に代入すると、 ω が

$$\omega^2 = \omega_n^2 = V_0 - i \left(n + \frac{1}{2} \right) (-2V_0'')^{1/2} \quad (5.56)$$

のとき、outgoing 境界条件が満たされることがわかる。これが準固有振動数 ω_n の 1 次 WKB 公式である。高次 WKB 公式では、これに（ポテンシャルの極大値における）高階微分の項を含む修正項が加わる。

この方法は一般に、 n の小さい、すなわち減衰時間の短いモードに対しては良い精度で準固有振動数を与えるが、 n が大きくなるにつれて近似が悪くなる。これは、散乱行列 (5.51) を求める際に「2 つの古典的転回点が十分近い」という前提をとっているためである。一般に n が小さいモードは 2 つの古典的転回点が近く、 n が大きくなるにつれて古典的転回点は離れていくと考えられるのは、5.4 節で述べたとおりである。このような前提が必要である理由は、ポテンシャルを極大点の周りで冪級数に展開しなければならないからである。

例として、1 次 WKB 公式 (5.56) を用いて Pöschl-Teller ポテンシャルの準固有振動数を計算してみることにする。 $V_0'' = V_{PT}''(x_0) = -2K^2V_0$ であるから、準固有振動数の WKB 近似値 ω_n^{WKB} は

$$(\omega_n^{\text{WKB}})^2 = V_0 - 2i\left(n + \frac{1}{2}\right)\sqrt{V_0}K \quad (5.57)$$

となる。一方、厳密解 (5.16) の 2 乗は

$$\omega_n^2 = V_0 - \frac{K^2}{4} - 2i\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(V_0 - \frac{K^2}{4}\right)^{1/2}K - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 K^2 \quad (5.58)$$

である。ここで、(5.58) を $K/\sqrt{V_0}$ の冪で展開すると、

$$\omega_n^2 = V_0 - 2i\left(n + \frac{1}{2}\right)\sqrt{V_0}K - \left[\frac{1}{4} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right]K^2 + \frac{i}{4}\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{K^3}{\sqrt{V_0}} + \cdots \quad (5.59)$$

となる。これと (5.57) を比較すると、 $(\omega_n^{\text{WKB}})^2$ は厳密解から $K/\sqrt{V_0}$ の 1 次の項までとったものであることがわかる。従って、 $V_0 \gg K^2$ 、すなわち

$$V_0 \gg \sqrt{-V_0''/2} \quad (5.60)$$

であれば WKB 近似は良い近似になっている。

一般のポテンシャル $V(x)$ の場合でも、条件 (5.60) が成立していれば WKB 近似は良い精度で ω_n を与える（但し n が小さいモードに限る）。逆に、WKB 近似が良い近似として成立するような場合は必ず (5.60) が成り立っているので、(5.56) より、WKB 近似が適用できるポテンシャル障壁の準固有振動は、 n が小さければ必ず $|\text{Re}(\omega)| \gg |\text{Im}(\omega)|$ を満たしている。

6 流体の準固有振動

この章では、前章で述べた準固有振動の理論を流体系に適用し、非一様な構造を持つ流体の流れ、特に遷音速流の準固有振動を議論する。2 章で述べたように、遷音速流中の音波のふるまいはブラックホール時空上での光や重力波のそれと著しい対応関係を持つ。そして、本章で明らかにするように、遷音速流も“背景場”の構造で決まる準固有振動モードを持ち、それらは実際にブラックホールの場合と同じような状況下で励起される。

流体系の準固有振動を研究する意義は次の2点が挙げられる。1つは、準固有振動を引き起こす現実モデルとして遷音速流を考えると、理論的取り扱いがブラックホールの場合と類似しており、かつブラックホールの場合よりもはるかに単純であることである。しかも、重力波の放出は球対称な時空では起こらないため、ブラックホール時空からの準固有振動放出を Einstein 方程式の時間発展を解いて調べようとするとき、時空に球対称性を課することができず、軸対称などといったより低い対称性の下で計算を行わなければならない。一方で、流体中の音波は平面波のような1次元的な波が許される。この違いは、例えば準固有振動放出を数値シミュレーションで調べようとするとき大きな利点となるであろう。もう1つは、ブラックホールの重力波放出に類似した現象を、実験室で実現できることである。重力波干渉計による重力波の直接観測が未だ道半ばである現在、ブラックホールの準固有振動のダイナミクスを研究する方法は Einstein 方程式を数值的に解くことに限られている。また、重力波干渉計から得られた観測データから興味あるブラックホールの準固有振動を抽出するために、マッチドフィルタリングと呼ばれる特別のデータ解析法が研究されているが、この方法により重力波が正しく検出されるかどうかはまだ明らかではない。従って、もし遷音速流の準固有振動を実験で起こすことができるようになれば、マッチドフィルタリングをはじめとする重力波検出手法を実践的に改良することができるようになるであろう。

この章では、まず非一様流中での音波の波動方程式を Schrödinger 型の波動方程式に書き換え、Laval 管の中の遷音速流がブラックホールの Regge-Wheeler ポテンシャルに類似した“ポテンシャル障壁”を持つことを示す。これは、遷音速流がブラックホールと同様にホライズンの近くで音波の“曲率散乱”を起こすことを意味する。次に、ブラックホールの準固有振動数の算出法を流体のポテンシャル障壁に適用し、遷音速流の持つ準固有振動モードの性質を調べる。さらに、背景流の時間発展まで含めた数値流体シミュレーションの結果から、遷音速流の準固有振動が実験室においてどのような状況下で励起されるかを明らかにする。最後に、流体中で音波がポテンシャル障壁とは別の構造により反射される場合に準固有振動数がどのように変化するかを議論する。

6.1 Schrödinger 型波動方程式

Laval 管を用いた装置実験を想定し、準1次元流中での音波を考える。速度ポテンシャル摂動 $\phi(t, x)$ の満たす波動方程式は

$$\left[\left(\partial_t + \partial_x v \right) \frac{\sigma}{c_s^2} \left(\partial_t + v \partial_x \right) - \partial_x (\sigma \partial_x) \right] \phi(t, x) = 0 \quad (6.1)$$

である。ここで、 $\sigma \equiv \rho A$ は各断面での流体の面密度である。

まず、背景流は定常であると仮定し、波動方程式 (6.1) 全体を時間について Fourier 変換する。

$$\left[\left(-i\omega + \frac{d}{dx} v \right) \frac{\sigma}{c_s^2} \left(-i\omega + v \frac{d}{dx} \right) - \frac{d}{dx} \left(\sigma \frac{d}{dx} \right) \right] \phi_\omega(x) = 0 \quad (6.2)$$

$$\begin{aligned} \Longleftrightarrow & \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{\sigma(1-M^2)} \left[\left(\sigma(1-M^2) \right)' + 2i\omega \frac{\sigma v}{c_s^2} \right] \frac{d}{dx} \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sigma(1-M^2)} \left[i\omega \left(\frac{\sigma v}{c_s^2} \right)' + \omega^2 \frac{\sigma}{c_s^2} \right] \right] \phi_\omega = 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$\phi_\omega(x) = \int \phi(t, x) e^{i\omega t} dt \quad (6.4)$$

この常微分方程式を Schrödinger 型の波動方程式に帰着させるため、新しい空間変数 ξ と波動関数 $G_\omega(\xi)$ を

$$\phi_\omega(x) = e^{i\omega f(x)} G_\omega(\xi) \quad (6.5a)$$

$$f(x) = - \int \frac{v dx}{c_s^2 - v^2} \quad (6.5b)$$

$$\xi = \int \frac{dx}{\sigma(1-M^2)} \quad (6.5c)$$

で導入し、(6.3) を $G_\omega(\xi)$ に関する微分方程式に書き換えると、

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \omega^2 g^2 \right] G_\omega(\xi) = 0 \quad (6.6)$$

$$g = \sigma/c_s \quad (6.7)$$

となる。この微分方程式は G_ω の 1 階微分の項を含まない Schrödinger 型の波動方程式の形をとっているが、“ポテンシャル項” $-\omega^2 g^2$ が振動数 ω に依存しているので準固有振動数の算出の際に不便である。 ω に独立なポテンシャル項を持つ波動方程式を導くため、さらに

$$G_\omega(\xi) = g^{-1/2} H_\omega(x^*) \quad (6.8a)$$

$$x^* = c_{s*} \int g d\xi = c_{s*} \int \frac{dx}{c_s(1-M^2)} \quad (6.8b)$$

として (6.6) を書き換える。ここで、 x^* はブラックホールの Regge-Wheeler 座標に対応する空間変数であり、次元調節のために激み点音速 c_{s*} を因子として付加した。これにより、望む形の Schrödinger 型波動方程式

$$\left[\frac{d^2}{dx^{*2}} + k^2 - V(x^*) \right] H_\omega(x^*) = 0 \quad (6.9)$$

$$V(x^*) = \frac{1}{g^2} \left[\frac{g}{2} \frac{d^2 g}{dx^{*2}} - \frac{1}{4} \left(\frac{dg}{dx^*} \right)^2 \right] \quad (6.10)$$

が得られる。ここで $k \equiv \omega/c_{s*}$ は激み領域における音波の波数である。ポテンシャル項 $V(x^*)$ は (長さ) $^{-2}$ の次元を持ち、まさに音波に対する背景流の“曲率散乱”の効果を表している。背景流の空間変化スケールは Laval 管の曲率半径程度であるから、(6.10) は「波長が管の曲率半径よりも長い音波は管の中を伝播する際に散乱される」ということを意味している。また、 $V(x^*)$ はその定義 (6.10) より g の定数倍の変換 $g \rightarrow \text{const.} \times g$ に対して不変に保たれるので、(g の中に形式的に含まれる) 激み点量 ρ_* 、 c_{s*} には依らず、断面積

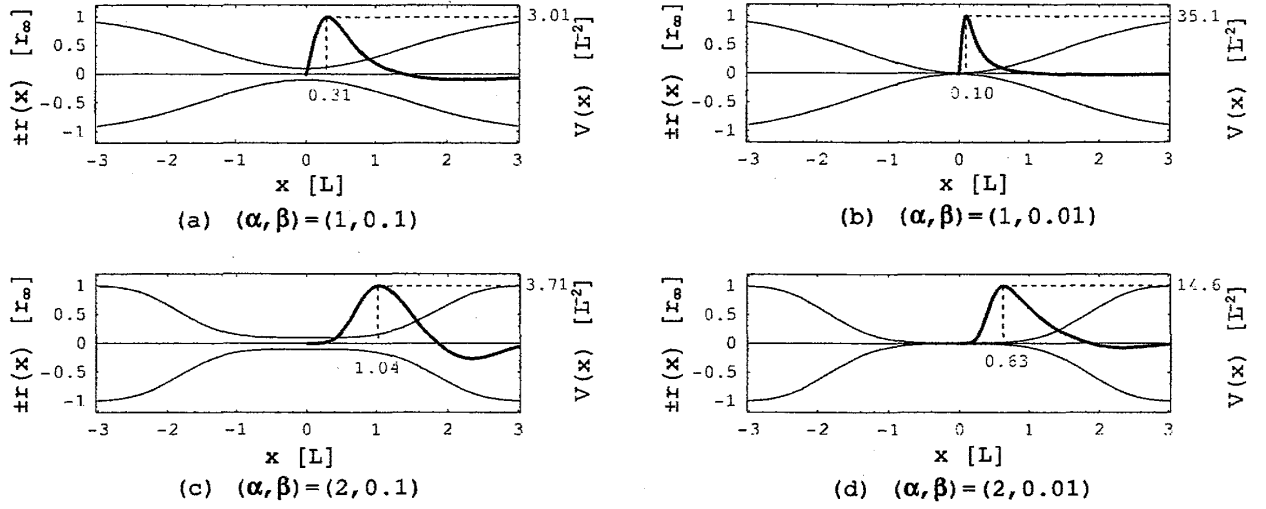


図 6.1: 仮定した Laval 管の形状の例と対応するポテンシャルの形状。細い曲線は Laval 管の形状 $\pm r(x)$ 、太い曲線はポテンシャル $V(x^*)$ を x の関数として表したものである。背景流は x 軸の負の方向に流れる遷音速流を仮定した。

$A(x)$ のスケール変化にも依存しない。無次元化された量 ρ/ρ_* , c_s/c_{s*} は Mach 数 M の関数であり、さらに M は断面積-Mach 数関係により無次元化された断面積 A/A_* の関数であるから、ポテンシャル項 $V(x^*)$ は全体として A/A_* のみに依存する関数であることがわかる。

具体的な $V(x^*)$ の形を見るために、管の形状を次のように仮定する。

$$r(x) = r_\infty - r_\infty(1 - \beta) \exp[-(x/2L)^{2\alpha}] \quad (6.11)$$

$$A(x) = \pi r(x)^2 \quad (6.12)$$

ここで $r(x)$ は各断面でのノズル半径である。この管は $x=0$ にスロートを持ち、 $|x| \gg L$ で半径一定 ($= r_\infty$) の管に漸近する。実験装置との対応で言えば、 $|x| \lesssim L$ の部分が Laval 管で、 $|x| \gtrsim L$ の部分が上下流の貯気槽である。また、 $\alpha \in \mathbb{N}$, $\beta \equiv r(0)/r_\infty \in (0, 1)$ はそれぞれ管の絞られ方とスロート部の相対的な細さを表すパラメータであり、 $V(x^*)$ の形状は実質的に α, β の 2 つのパラメータで特徴付けられる。

図 6.1 に、仮定した Laval 管の形状の例と、それぞれの管の中の遷音速流がつくる $V(x^*)$ の形状を示す。図からわかるように、遷音速流のポテンシャル関数は音速点より上流側においてピークを持つ。従って、遷音速流は準固有振動モードを持つことがわかる。

6.2 準固有振動数の算出

準固有振動は波動方程式 (6.9) の outgoing 境界条件

$$H_\omega(x^*) \sim e^{-ikx^*}, \quad x^* \rightarrow -\infty \quad (\Longleftrightarrow x \rightarrow 0) \quad (6.13a)$$

$$H_\omega(x^*) \sim e^{+ikx^*}, \quad x^* \rightarrow +\infty \quad (\Longleftrightarrow x \rightarrow \infty) \quad (6.13b)$$

α	β	$\omega_0 [c_{s*}/L]$			
		(Pöschl-Teller)	(1st WKB)	(2nd WKB)	(3rd WKB)
1	0.1	1.29 – 1.16i			
	0.03	2.68 – 2.04i			
	0.01	4.81 – 3.46i			
	0.003	8.73 – 6.47i			
2	0.1	1.68 – 0.95i	2.10 – 0.85i	1.78 – 1.01i	1.73 – 0.91i
	0.03	2.63 – 1.06i	3.00 – 0.99i	2.65 – 1.11i	2.61 – 1.02i
	0.01	3.60 – 1.28i	4.00 – 1.20i	3.57 – 1.34i	3.54 – 1.26i
	0.003	4.94 – 1.66i	5.44 – 1.57i	4.86 – 1.76i	4.83 – 1.68i
3	0.1	2.23 – 1.12i	2.70 – 1.02i	2.43 – 1.14i	2.46 – 1.19i
	0.03	3.22 – 1.05i	3.53 – 1.00i	3.35 – 1.06i	3.38 – 1.14i
	0.01	4.07 – 1.09i	4.34 – 1.11i	4.13 – 1.11i	4.15 – 1.16i
	0.003	5.07 – 1.24i	5.35 – 1.20i	5.08 – 1.26i	5.09 – 1.29i
4	0.1	2.76 – 1.45i	3.36 – 1.25i	3.09 – 1.36i	3.15 – 1.48i
	0.03	3.92 – 1.18i	4.24 – 1.14i	4.10 – 1.17i	4.12 – 1.23i
	0.01	4.77 – 1.12i	5.02 – 1.10i	4.86 – 1.13i	4.85 – 1.09i
	0.003	5.69 – 1.09i	5.91 – 1.15i	5.69 – 1.20i	5.66 – 1.09i

表 6.1: 異なるノズルの最小減衰 ($n = 0$) 準固有振動の振動数 ω_0 の計算値。“(Pöschl-Teller)”は Mashhoon の方法による値を、“(n -st WKB)”は n 次 WKB 近似法による値を表す。

を満たす解である。いま、 $V(x^*)$ の形状は数値的にしか求めることができないので、準固有振動数の算出に際して Leaver の方法を適用することはできない。そこで、Pöschl-Teller ポテンシャルで近似する方法 (Mashhoon の方法) と WKB 近似法による方法の2つを用いて準固有振動数の半解析解を計算することにする。

以下では、準固有振動モードのうち減衰時間が最小のもの、すなわち $n = 0$ のモードのみを議論する。5章で見たように、準固有振動は一般の外部からの擾乱に対して全てのモードが励起される。しかし、 $n \geq 1$ のモードはその定義より $n = 0$ のモードよりも速く減衰するため、 n の大きなモードが極端に偏って励起されない限り、 $n = 0$ モードの減衰時間の半分程度の時間で $n \geq 0$ のモードは相対的に見えなくなってしまう。従って、準固有振動の観測や数値シミュレーションにおいて n の大きなモードを検出することは実質的に困難である。

表 6.1 に、Mashhoon の方法と WKB 近似法から求めた $n = 0$ 準固有振動数をノズルパラメータ (α, β) ごとにまとめて示した。WKB 近似では3次精度 [10] まで計算し、比較のため1次及び2次精度の計算値も示した。但し、 $\alpha = 1$ のノズルに対しては WKB 近似の結果が近似の次数を上げてても収束しなかったため、Mashhoon の方法の結果のみを記す。 $\alpha = 1$ のノズルで WKB 近似が収束しなかったのは、これらのノズルの作るポテンシャル障壁 $V(x^*)$ が WKB 近似法の適用条件 (5.60) を満たさないからである。一方、表からわかるように、 $\alpha \geq 2$ のノズルに対しては WKB 近似法による計算は十分良く (10 パーセント程度以内の精度で) 収束した。また、3次 WKB 近似の結果と Mashhoon の方法の結果も、ほとんどのノズルにおいて数パーセントの精度で一致した。

6.3 数値シミュレーションによる準固有振動の励起実験

6.3.1 数値実験の方法

実際の遷音速流が前節で求めたような準固有振動モードを持つかどうかは、最終的には装置を用いた実験によって確かめる必要がある。しかし、準固有振動数がわかっていても、それがどのような状況下で励起されるかはわからないままである。そこで、実験室でどのように準固有振動を励起し、かつどのようにそれを測定すればよいかを明らかにするため、数値流体シミュレーションによる実験を行った。

ブラックホールの場合、準固有振動はブラックホールに質点が落下したときや、ブラックホールが形成されたときに励起されることが理論的に知られている。従って、「音のブラックホール」である遷音速流においても似たような状況下で準固有振動が励起されると考えるのが自然である。そこで、今回の数値実験では次の2つのタイプのシミュレーションを行った。

(I) 「音のブラックホール」形成

管の中の流体の初期状態は、圧力 p_* で一様に満たされている状態、つまり流れのない状態とする。初期時刻 $t = 0$ に、管のどちらか一端の圧力 p_{bnd} を p_* より低くすることにより、管の中に流れを形成させる。このとき、 p_{bnd} を十分小さく設定し、流れが遷音速流になるようにする。また、最終状態が定常になるように、管のもう一端では流体が自由に通過できるとする。これは、星の重力崩壊によるブラックホール形成に対応するものである。

(II) 「弱い衝撃波」の落下

初期状態は定常な遷音速流とする。初期時刻 $t = 0$ に上流側から弱い衝撃波を下流側に向かって落下させ、流れが再び定常遷音速流に落ち着くまで時間発展させる。これは、ブラックホールへの質点の落下に対応する。

この数値実験では、Laval 管の中の流体の時間発展を数値的に計算するために、 (t, x) 空間を有限体積のセルに分割するいわゆる有限体積法を採用した。さらに、計算の簡単化のため、空間方向は準1次元で近似した。空間方向の計算領域は $-7L \leq x \leq 7L$ とし、“ノズル領域” $-L \leq x \leq L$ を 501 個のセルで、“貯気槽領域” $-7L \leq x < -L$, $L < x \leq 7L$ をそれぞれ 250 個のセルで分割した。また、計算領域内で衝撃波を取り扱うために、MUSCL-Hancock 法と呼ばれる衝撃波高分解スキームを使用した [22, 6, 24]。このスキームは、時間・空間方向に2次の精度を有し、かつ衝撃波面の構造をほとんど厳密解に近い形で分解することが可能である。数値シミュレーションは、 $\alpha = 1, 2, 3, 4$, $\beta = 0.1, 0.03, 0.01, 0.003$ の計 $4 \times 4 = 16$ 種類の Laval 管について行った。

6.3.2 数値実験の結果

以下、ノズルパラメータ $(\alpha, \beta) = (2, 0.01)$ の Laval 管を用いたシミュレーションの結果を典型例として示していく。図 2(a) の左図は、タイプ I のシミュレーションから得られた

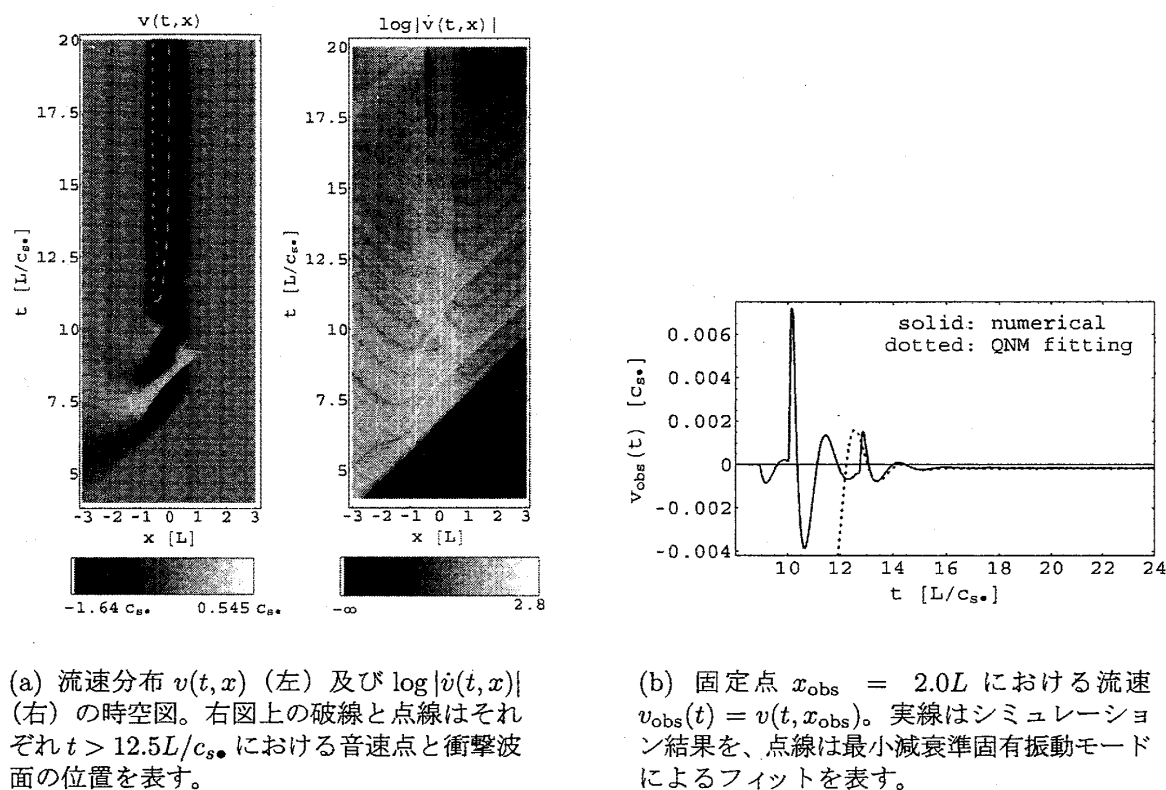
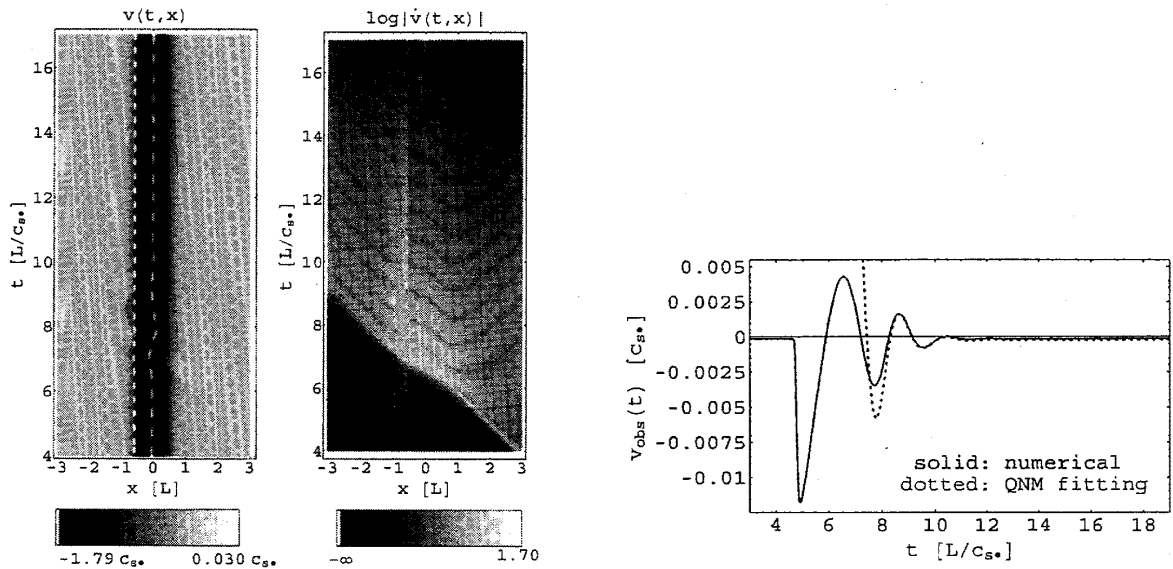


図 6.2: タイプ I の数値シミュレーションの結果。ノズルパラメータは $(\alpha, \beta) = (2, 0.01)$ である。

流速分布 $v(t, x)$ の時空図である。時刻 $t = 0$ に境界 $x = -7L$ での圧力 p_{bnd} を下げたことにより、境界からノズル部に向かって希薄波 (rarefaction) が通過し、 x の負の方向への流れが形成される。貯気槽領域に近いところでは流れは希薄波の通過後すぐに定常状態に近づくが、スロートの近傍では希薄波の通過後しばらくは激しく非線形な振動を繰り返し、貯気槽領域よりも遅れて定常状態に落ち着く。これは、スロートの近傍では管の半径が小さいために流量保存則に従って希薄波の振幅が増大し、その結果、希薄波の通過に対する反動がより大きくなるからである。図 2(a) の右図は、この過程における流速の時間変化 $\dot{v}(t, x)$ の様子を表したものである。流れが定常遷音速流状態に落ち着き始めた後は、流れは定常な“背景流”と非定常な“摂動”の足し合わせになっているとみなすことができる。従って、流れの物理量の時間微分をとったものは、流れの物理量から摂動成分を抽出したものと考えてよい。スロートよりやや上流 ($x \simeq 0.5L$) に着目すると、流れが落ち着き始めた $t \simeq 9L/c_s$ 頃から、上流の貯気槽に向かって振動数が一定の減衰振動波が放出されるが見える。しかも、この位置は $(\alpha, \beta) = (2, 0.01)$ の Laval 管のつくるポテンシャル障壁のピーク位置 $x_0 = 0.63L$ にほぼ等しい [図 6.1(d) 参照]。これらは準固有振動の一般的な特徴であることから、この減衰振動波が準固有振動であると推定される。

図 2(b) は、固定点 $x = x_{\text{obs}} = 2.0L$ における流速 v を時間の関数としてプロットしたものである。時刻 $t = 10L/c_s$ 頃から見え始める減衰振動波と 3 次 WKB 近似法を用いて算出した $n = 0$ 準固有振動の波形を比較すると、確かに両者が非常によく一致するのがわか



(a) 流速分布 $v(t,x)$ (左) 及び $\log|v(t,x)|$ (右) の時空図。右図上の破線と点線はそれぞれ音速点と衝撃波面の位置を表す。

(b) 固定点 $x_{\text{obs}} = 2.0L$ における流速 $v_{\text{obs}}(t) = v(t, x_{\text{obs}})$ 。実線はシミュレーション結果を、点線は最小減衰準固有振動モードによるフィットを表す。

図 6.3: タイプ II の数値シミュレーションの結果。ノズルパラメータは $(\alpha, \beta) = (2, 0.01)$ である。

る。 $t = 13L/c_s$ のあたりで波形が一度不連続に変化しているのは、スロート近傍で生成された衝撃波が観測点を通じたためである。

このような減衰振動は、タイプ II のシミュレーションの結果からも見る事ができた。タイプ II のシミュレーション結果の例を図 6.3 に示す。タイプ II の場合は、初めからすでに定常な遷音速流が形成されており、上流の流れを弱い衝撃波でわずかに乱すだけなので、放出される準固有振動の波形は最も安定である。

上と同様の数値シミュレーションを異なる管のパラメータ (α, β) について行い、波形のフィッティングによって準固有振動の中心振動数と減衰時間を測定した。図 6.4 はこの測定値と前節の半解析計算による算出値とを比較したものである。シミュレーションからの測定値と半解析計算からの算出との間の誤差は $\alpha \geq 2$ ではおおむね 10% 以内だった。

6.4 反射がある場合の準固有振動

準固有振動は定義により、outgoing 境界条件 (6.13a), (6.13b) を同時に満たす波動である。したがって、ある系が準固有振動モードを持つためには、これらの境界条件が満たされることが系の構造によって保障されていなければならない。遷音速流上ではこのうち、音速点側 ($x^* \rightarrow -\infty$) での境界条件 (6.13a) が満たされることは常に保障される。これはもちろん、音速点を超えて下流から上流へ伝播する音波が存在しえないためである。

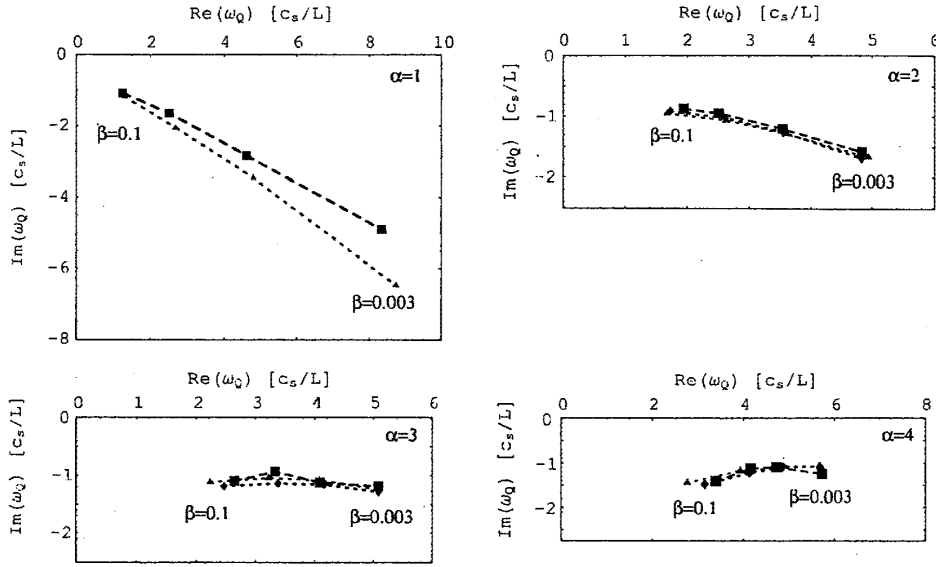


図 6.4: 遷音速流の $n=0$ 準固有振動数 ($\alpha=1, 2, 3, 4$; $\beta=0.1, 0.03, 0.01, 0.003$)。■印、▲印、◆印はそれぞれ数値実験からの測定値、Mashhoon の方法による計算値、3 次 WKB 近似法による計算値を表す。

一方、無限上流側 ($x^* \rightarrow +\infty$) での境界条件 (6.13b) が満たされるためには、ポテンシャル障壁から上流へ向かう波がどこかで反射されて再びポテンシャル障壁に戻ってくるようなことがないことが必要である。前節の数値シミュレーションでは、上流の境界で音波が全て外部に透過するという境界条件を設定していたので、準固有振動を観察することができた。しかしながら、実際の装置の境界（具体的には、貯気槽の終端）では一般に音波の反射が起こるため、境界条件 (6.13b) が実現されることは一般に保障されていない。本節では、上流の境界で音波の反射が起こるような状況下では準固有振動がどのように変化するかを議論する。

6.4.1 Boxed quasinormal modes (BQNMs)

5.5 節で見たように、実効ポテンシャル障壁の近傍に注入された摂動は、空間的に打ち切られた準固有振動の重ね合わせとして遠方に広がっていく。ここでは 5.5 節の議論を拡張し、空間領域が $x = x_c \gg x_0$ に境界を持ち、 $+x$ 方向に進む波動がこの境界上で $-x$ 方向へ反射されるような場合について考えてみる (図 6.5)。空間的に打ち切られた準固有振動はある時刻に境界に到達して反射される。これが再びポテンシャル障壁に入射するまでは、「入射波なし」の条件が満たされているためにポテンシャル障壁は準固有振動を放出しつづける。しかし、反射波の先頭部分がポテンシャル障壁に入射してしまうと、ポテンシャル障壁から放出される波はもはや outgoing 境界条件を満たす準固有振動ではなくなってしまう。このように、遠方の境界で波が反射される場合には、準固有振動は先頭の波形がポテンシャル障壁に戻ってくるまでに限って放出される。

それでは、境界で反射された波がポテンシャル障壁に到達した後は、どのような波動が放出されるのであろうか。準固有振動の類推から、波は依然として何らかの“固有振動”

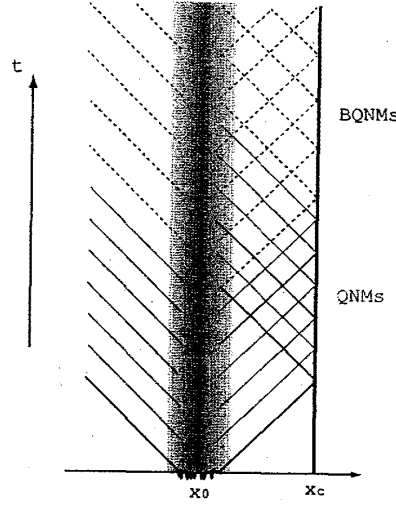


図 6.5: 準固有振動 (QNM) と BQNM の模式的な時空図。灰色の領域はポテンシャル障壁を表し、実線と破線はそれぞれ準固有振動と BQNM の位相一定線を表す。

の重ね合わせとして表現されることが予想される。また、波は $x^* \rightarrow -\infty$ 方向には反射されることがなく散逸することを考えれば、これらの“固有振動”は準固有振動と同様に有限の減衰時間を持つことも予想される。本論文では、この“固有振動”のことを文献 [2, 3] にならい、「囲われた準固有振動 (boxed quasionormal mode, BQNM)」と呼ぶことにする。

BQNM を定義するため、outgoing 境界条件を次のように一般化する。

$$H_\omega(x^*) \sim e^{-ikx^*}, \quad x^* \rightarrow -\infty \quad (6.14a)$$

$$H_\omega(x^*) \sim e^{+ikx^*} + \mathcal{R}_\omega e^{-ik(x^*-x_c^*)}, \quad x^* \rightarrow x_c^* \quad (6.14b)$$

ここで、 $\mathcal{R}_\omega \in [-1, 1]$ は境界壁の反射係数であり、真の観測量である流速 $v(\propto \partial_x H_\omega)$ にとって x_c^* が固定端 ($v|_{x_c^*} = 0$) のとき $\mathcal{R} = 1$ に、開放端 ($\partial_x v|_{x_c^*} = 0$) のとき $\mathcal{R} = -1$ になるように定義した。本論文では BQNM は、波動方程式 (6.9) の、境界条件 (6.14a) 及び (6.14b) を満たす解として定義する。

6.4.2 BQNM 振動数の半解析公式

BQNM の振動数を求めるために、前章で紹介した Mashhoon の方法を応用した近似公式を導く。まず、Mashhoon の方法と同様に、ポテンシャル障壁の形状 $V(x^*)$ を Pöschl-Teller ポテンシャルで近似する。このとき、波動方程式 (6.9) の境界条件 (6.14a) を満たす解を $H_\omega^{(L)}(x^*)$ とすると、 $H_\omega^{(L)}(x^*)$ は近似的に

$$H_\omega^{(L)} \sim \begin{cases} e^{-ik(x^*-x_0^*)}, & x^* \ll x_0^* \\ A_k e^{-ik(x^*-x_0^*)} + B_k e^{ik(x^*-x_0^*)}, & x^* \gg x_0^* \end{cases} \quad (6.15)$$

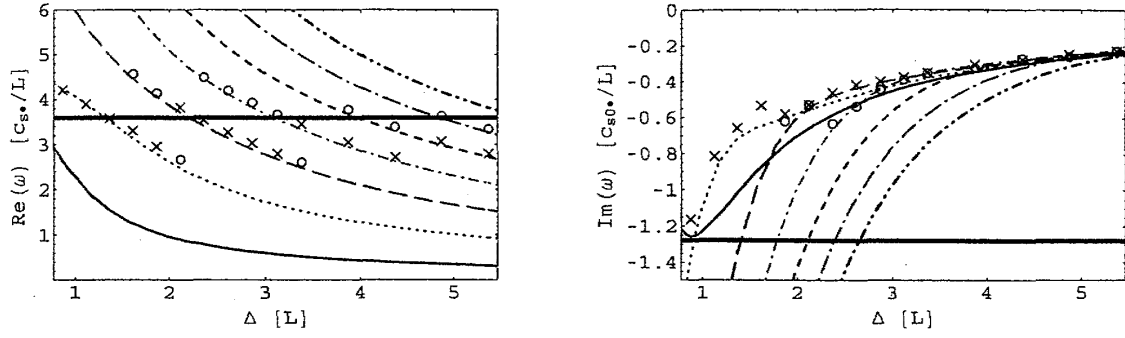


図 6.6: BQNM 振動数 ω_{nm} の Δ 依存性の例。左図は振動数の実部、右図は虚部である。細線は ω_{0m} , ($m = 0, \dots, 6$) を、 $\circ, \times$ の記号は数値シミュレーションで得られた波形の振動数を表す。また、比較のため、通常の準固有振動数 ω_0 を太い水平線で示してある。

と表される。ここで A_k, B_k はそれぞれ (5.14a), (5.14b) で定義された係数である。これと境界条件 (6.14b) とを比べると、 k が

$$\frac{\Gamma(s_+)\Gamma(s_-)\Gamma(-ik/K)}{\Gamma(s_+ - ik/K)\Gamma(s_- - ik/K)\Gamma(ik/K)} = \mathcal{R}_\omega e^{2ik\Delta} \quad (6.16)$$

を満たすとき、 $H_\omega^{(L)}$ は BQNM であることがわかる。ここで、 $\Delta = x_c^* - x_0^*$ とした。以下では簡単化のため、反射係数 $\mathcal{R}_\omega$ は ω に依らないとし、単に $\mathcal{R}$ と書く。さらに、BQNM の振動数 ω は準固有振動数 $\omega_n = -ic_{s0}K(s_+ + n)$ から大きく離れていないと仮定し、(6.16) の左辺を $k = k_n \equiv c_{s0}\omega_n$ のまわりで展開すると、

$$\frac{i(k_n - k)}{G_n K} \simeq \mathcal{R} e^{2ik\Delta} \quad (6.17)$$

が得られる。ここで

$$G_n = (-1)^n \frac{\Gamma(s_- - s_+ - n)\Gamma(s_+ + n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(s_+)\Gamma(s_-)\Gamma(-s_+ - n)} \quad (6.18)$$

である。式 (6.17) は解析的に解くことができ、解は

$$k = k_n + \frac{i}{2\Delta} W(2G_n K R \Delta e^{2ik_n \Delta}), \quad (6.19)$$

と表される。ここで、 $W(z)$ は Lambert の W 関数（あるいは、乗積対数関数）と呼ばれる複素関数であり、一般の複素数 z に対して多価である。(6.19) の第一項が反射波が存在しない場合の“通常の”準固有振動数であるのに対し、第二項は反射波が存在する場合に振動数がどの程度ずれるかを表す量である。そして、第二項が多価であるということは、「反射波が存在する場合、ポテンシャル障壁の持つ個々の準固有振動は、無限個の BQNM に分岐する」ということを表している。本論文では、第 n 準固有振動から分岐した BQNM を 0 以上の整数の組 (n, m) でラベルし、振動数の実部が小さなものから順に $m = 0, 1, 2, \dots$ とする。

半解析公式 (6.19) が求まったので、これを用いて Laval 管の中に実現される遷音速流の BQNM 振動数を調べてみる。図 6.6 は、ノズルパラメータ $(\alpha, \beta) = (2, 0.01)$ の Laval 管

の上流 ($x = x_c > x_0$) に、反射係数の小さい境界壁 $\mathcal{R} = 0.09$ を取り付けた場合の $n = 0$ の BQNM 振動数 ω_{0m} ($m = 0, \dots, 6$) を、 $\Delta = x_c^* - x_0^*$ の関数としてプロットしたものである。

まず、振動数の実部 $\text{Re}(\omega_{nm})$ に注目すると、 $\text{Re}(\omega_{nm}) \simeq (m+1)\pi c_{s*}/\Delta$ でよく近似できることがわかる。このことは、BQNM の波長 $\lambda_{nm} \simeq 2\pi c_{s*}/\text{Re}(\omega_{nm})$ がおおむね $2\Delta/(m+1)$ であることを意味するが、これは x_0 と x_c の間に閉じ込められた音波の固有振動の波長に等しい。この点については、上流側の領域が境界壁によって有限の長さに制限されたことで、ポテンシャル障壁から放出される音波はポテンシャル障壁と境界壁の間の距離の整数分の 1 の波長しか持てなくなったためと解釈できる。

次に、振動数の虚部 $\text{Im}(\omega_{nm})$ に注目すると、 Δ を大きくするにつれて各 BQNM の減衰率 $|\text{Im}(\omega_{nm})|$ は減少することがわかる。この理由は次のように考えられる。BQNM は減衰振動であるので、早い時刻にポテンシャル障壁から放出された波ほどその振幅が大きい。 Δ を大きくすると、放出された波が反射されてもとの場所に戻ってくるのにかかる時間がより長くなるため、戻ってきた波はより早い時刻に放出されたものになる。したがって、 $\mathcal{R}$ を固定して Δ を大きくすると、ポテンシャル障壁近傍で見た反射波の振幅は相対的に大きくなる。これは、 Δ を固定して $\mathcal{R}$ を大きくするときの効果と実質的に同じである。後で見るように、 $\mathcal{R}$ を大きくすると $|\text{Im}(\omega_{nm})|$ は一般に減少する。このため、 $\mathcal{R}$ を固定して Δ を大きくしても $|\text{Im}(\omega_{nm})|$ は同様に減少するのである。

一方、 Δ を固定したときの減衰率 $|\text{Im}(\omega_{nm})|$ を異なる m に属する BQNM の間で比較すると、もとの準固有振動の値 $\text{Re}(\omega_n)$ に近い中心振動数を持つモードほど、より小さい減衰率を持つことがわかる。そもそもポテンシャル障壁の準固有振動数は、ポテンシャル障壁の共鳴振動数であった。したがって、 Δ を固定して考えると、上流からの反射波がこれに近い振動数を持つモードほど下流側に透過しにくく、結果的にエネルギー減衰率を表す $|\text{Im}(\omega_{nm})|$ は他のモードより小さくなるのである。

また、BQNM の最小減衰モードは、もとの準固有振動の最小減衰モードよりも小さな減衰率を持つことも図からわかるが、これは上流でも反射によって波の散逸が抑えられているためである。

半解析公式 (6.19) から得られる以上の結果を確かめるため、上流に反射壁がある場合の数値シミュレーション (タイプ I) を行った。比較のため、その結果を図 6.6 上にプロットしてある。数値シミュレーションで得られた波形の振動数は、(6.19) から予測される BQNM のうち、減衰率の小さなモードと良く一致するのがわかる。これは、反射壁がない場合の波形が最小減衰準固有振動モードでよくフィットできるのと同じ理由による。また、 $\Delta \gtrsim 1.9L$ の数値シミュレーションでは、観測された波形から 2 種類の減衰振動を抽出することができた。これは、図 6.6(b) からわかるように、 Δ が大きくなると異なる BQNM 間の減衰率の差が小さくなり、より多くのモードが見えるようになるためである。

6.4.3 反射率が大きい場合の BQNM 振動数

(6.16) から公式 (6.19) を導く際、BQNM 振動数 ω_{nm} がもとの準固有振動数 ω_n からあまり離れていないという近似を用いた。これは、上の例のように境界壁の反射係数 $\mathcal{R}$ が小さい、つまり反射の弱い場合には満たされる。逆に、反射係数が 1 に近い場合にはこ

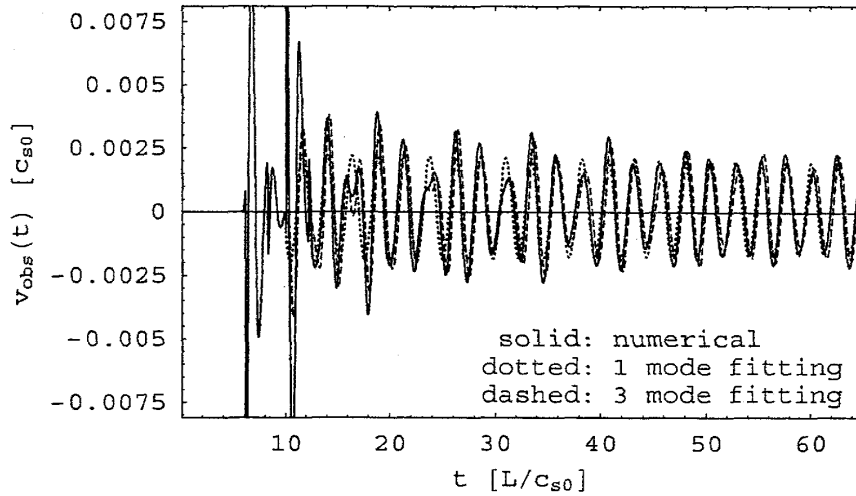


図 6.7: 完全反射壁 ($\mathcal{R} = 1.0$) がある場合にタイプ I の数値シミュレーションで見られる音波の波形。ノズルパラメータは $(\alpha, \beta) = (2, 0.01)$ 、境界壁の位置は $x = x_c = 3.0L$ としてある。実線は数値シミュレーションから得られた速度 $v_{\text{obs}}(t) = v(t, 2.0L)$ 、点線は振動数 $\omega L/c_{s*} = 2.66 - 0.00304i$ の減衰振動、破線は振動数 $\omega L/c_{s*} = 2.66 - 0.00304i, 3.46 - 0.0294i, 4.23 - 0.114i$ の減衰振動の重ね合わせを表す。

の近似は悪くなるので、この場合の BQNM 振動数は (6.16) に戻ってこれを数値的に解く必要がある。図 6.7 は、ノズルパラメータ $(\alpha, \beta) = (2, 0.01)$ の Laval 管に完全反射壁 $\mathcal{R} = 1.0$ を位置 $x_c = 3.0L$ に取り付けた場合の数値シミュレーション (タイプ I) から得られた音波の波形である。この波形からは、振動数の異なる 3 つの減衰振動 ($\omega L/c_{s*} = 2.66 - 0.00304i, 3.46 - 0.0294i, 4.23 - 0.114i$) を抽出することができた。この振動数は、方程式 (6.16) の数値解のうちの 3 つ ($\omega L/c_{s*} = 2.48 - 0.00427i, 3.37 - 0.0296i, 4.20 - 0.114i$) とよく一致する。また、同じ位置に $\mathcal{R} = 0.09$ の反射壁を取り付けた場合の最小減衰 BQNM の振動数が $\omega = 3.54 - 0.462i$ であることからわかるように、反射係数 $\mathcal{R}$ が 1 に近づけば近づくほど、BQNM の減衰率 $|\text{Im}(\omega)|$ は小さくなる。これは、反射が完全反射に近づくほど遠方へのエネルギー散逸が小さくなるために他ならない。

6.5 議論：流体の準固有振動の実験に向けて

この章で明らかにした事実を以下にまとめる。

- (1) Laval 管の中に形成される遷音速流は、Laval 管の構造で決まる準固有振動モードを持つ。
- (2) Laval 管の中に遷音速流が形成されたり、その遷音速流上に局所的な摂動が与えられると、摂動成分は空間的に打ち切られた準固有振動として遠方に広がっていき、流れは定常状態に落ち着いていく。

- (3) 上流側で波が下流に向けて反射される場合、与えられた摂動は通常の準固有振動の重ね合わせではなく、BQNMの重ね合わせになる。この場合、観測される減衰振動の中心振動数は反射が起こらない場合と大きく変わらないが、減衰時間は反射の強さに応じて長くなる。

この章を終えるにあたり、Laval管を用いた装置実験で準固有振動を観測するとき、どのような点に注意すべきかを議論することにする。今回行った数値シミュレーションは、当然ながらノイズレスであり、準固有振動が実際には検出できないほど減衰してもその波形を見ることが可能であった。しかしながら、実際の装置を用いた実験では多かれ少なかれ雑音が混入するため、減衰時間より長い時間にわたって準固有振動の波形を観測データから取り出すことは実質的に不可能である。そのため、実験に際して少なくとも次のような取り扱いが必要である。

- 準固有振動を励起する方法は、背景の定常遷音速流を可能な限り乱さない方法で行う。今回行った数値シミュレーションでは、タイプIの方法は準固有振動の放出の前に激しい背景流の変化を伴うのに対し、タイプIIの方法は流れをわずかに乱すだけでよいので、この点でタイプIIの方法はタイプIの方法よりも優れている。
- 準固有振動の振動周期に比べて減衰時間が長くなるようなLaval管を採用する。準固有振動のような減衰振動をノイズを含むデータから検出する場合、減衰時間がただ長いだけでは検出効率は上がらない。むしろ重要なのは、減衰時間程度の間に何サイクル分の振動が含まれるかである。リングダウン重力波のデータ解析の分野では、これを Q 値

$$Q \equiv \frac{\text{Re}(\omega)}{2|\text{Im}(\omega)|} \quad (6.20)$$

と呼ばれる指標で表す。一般に、 Q 値の大きい減衰振動ほどノイズを含むデータから検出しやすいと考えてよい。この量が無次元であることからわかるように、ブラックホールやLaval管のスケールを変えるだけでは Q 値は変化しない。ブラックホールの場合、角運動量ゼロ (Schwarzschild ブラックホール) では Q 値は小さく (最小減衰モードで $Q \simeq 2.1$)、角運動量が大きくなるに連れて Q 値は無限に大きくなることが知られている。今回考えたLaval管では、最も Q 値が大きい形状でもその値は高々 $O(1)$ であった。その理由は、Laval管のつくるポテンシャル障壁が $g = \sigma/c_s$ のみに依存する関数であり、 g の曲率以外にポテンシャルの構造を特徴付ける物理量が無いためである。これは Schwarzschild 時空が Schwarzschild 半径 r_g だけしかもっておらず、無次元の量を作るための他の物理量が存在しないことに対応する。このように、Laval管の形状自体を変えることで準固有振動の Q 値を大きくすることは非常に困難である。これについては、前節で議論した境界における反射をうまく利用するのが有効であろう。減衰振動の中心振動数を大きく変化させずに減衰時間を大きく増幅することができるということは、 Q 値を大きく増幅することができるということに他ならないからである。前節で示した計算結果は、境界が完全反射壁の場合は Q 値を 100 程度にまで増幅することが可能であることを示唆している。

7 まとめ

本論文では、遷音速流上で起こる、ブラックホールの Hawking 輻射と準固有振動に対応する現象について議論した。結論を以下にまとめる。

(1) Hawking 輻射

- Hawking 輻射が表面重力 κ で特徴付けられる Planck 分布を示すのは、ブラックホール形成前の真空を決定する固有振動解が、ホライズン近傍で指数関数的赤方偏移（引き延ばし）を受けることに起因する。従って、遷音速流形成直前に入射した正弦波の音波が音速点近傍でどのように変形されるかを見ることで、対応するブラックホールの Hawking 輻射のスペクトルを実験的に検証することができる。
- 今回行った数値実験では、表面重力 κ で特徴付けられる引き延ばしを受けた音波（圧力摂動）が $1/\kappa$ 程度の時間にわたって観測されることを示し、引き延ばされた波を含む音波から生成粒子スペクトルの古典的対応物を計算すると、確かにそれが Planck 分布に従うことを明らかにした。
- 装置を用いた実験に際しては、Laval 管の曲率半径よりも十分短い波長の音波を入射すれば、引き延ばされた波形を精度良く観測できると考えられる。

(2) 準固有振動

- 遷音速流は、ブラックホールと同様、音速点の上流側に音波を散乱する構造を持ち、この構造の存在により遷音速流は準固有振動モードを持つ。
- 準固有振動が上流の構造によって一部反射されて戻ってくるような場合、準固有振動数は変化を受ける。特に、準固有振動の減衰時間は必ず増幅する。これは、遠方への波の散逸が起こりにくくなったことを反映したものである。
- 実験において波形の検出を容易にするためには、大きい Q 値を与えるような遷音速流を形成する必要がある。ただ、Laval 管の形状の操作のみによって Q 値を大きくすることは難しいので、必要であれば貯気槽の内壁での反射を利用して Q 値を増幅するなどの工夫をするべきである。

謝辞

はじめに、本研究テーマを紹介して下さり、的確な助言と丁寧な指導をして下さった京都大学人間・環境学研究科の阪上雅昭教授に感謝致します。また、数値流体力学の親切な手解きとシミュレーションコードの提供をして下さった京都大学理学研究科天体核研究室の犬塚修一郎助教授、WKB 近似法による準固有振動数の計算に関する有益なコメントと Mathematica コードの提供をして下さった San Paulo 大学物理学研究所の Roman Konoplya 博士にお礼申し上げます。大阪大学理学研究科宇宙進化グループ、大阪市立大学理学研究科宇宙物理（重力理論）グループ、東京大学理学研究科宇宙理論研究室の皆様

には、研究室セミナーに招待して下さい、有益な議論をして頂いたことに感謝致します。京都大学工学研究科熱工学研究室の皆様には、Laval 管による実験に関する様々な議論に加わって下さったことにお礼申し上げます。最後に、大学院修士課程の2年間にわたってお世話になりました京都大学人間・環境学研究科宇宙論・重力グループの皆様、理学研究科天体核研究室並びに基礎物理学研究所の皆様には感謝致します。

A 計量テンソル

この章では、本論文の議論において最低限必要とする計量テンソルの概念と、それに関連する事項についてまとめる。より詳細については、相対論の標準的な教科書（例えば [27, 28]）を参照されたい。

一般相対性理論では、「曲がった時空」を「多様体 $\mathcal{M}$ 上に“距離”が定義されたもの」として取り扱う。この“距離”を定めるものが「計量テンソル (metric tensor)」であり、通常 g で表記する。

時空 $\mathcal{M}$ 上の2つの点（世界点） $x_A, x_B \in \mathcal{M}$ の間を結ぶ曲線（世界線）を考える。この曲線の線素の“長さ”（固有長）は一般に

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu} g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{A.1})$$

で定義される。ここで、 $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ であり、 x^μ は曲線上の世界点 x の座標である。一般に、 x^0 を時間座標、 x^i ($i = 1, 2, 3$) を空間座標とすることが多い。また、 $g_{\mu\nu}(x)$ は計量テンソル g を座標 $\{x^\mu\}$ で座標表示したものである。計量テンソル g や線素 ds^2 は、いずれも「計量」と呼ぶことが多い。

例えば、平坦な時空（Minkowski 時空）の計量は、4次元デカルト座標 $x^\mu = (ct, x, y, z)$ 表示では

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{A.2})$$

と書き表わされる。ここで $\eta_{\mu\nu} = \text{diag.}(-1, 1, 1, 1)$ (diag. は対角行列) である。任意のなめらかに曲がった時空上でも局所的に見ると平坦なので、時空上の任意の世界点に対して、その十分近傍に限って $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu}$ となるような座標系が存在する。このような座標系を「局所慣性系」と呼ぶ。局所慣性系の存在は物理的には、重力が局所的には慣性力と区別できないこと（等価原理）を意味する。

また、ある座標系で $g_{\mu\nu} \neq \eta_{\mu\nu}$ となるからといって、これが「時空が曲がっている」ことを意味するわけではない。例えば、平坦時空の計量 (A.2) は、空間方向を球座標 (r, θ, φ) で表せば $g_{\mu\nu} = \text{diag.}(-1, 1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$ となるが、これは座標系が“曲がっている”だけであって時空は依然として大局的に平坦である。このように、時空が曲がっているかどうかは計量テンソルの座標表示 $g_{\mu\nu}$ だけでは知ることができず、時空の「曲率」($g_{\mu\nu}$ の座標に関する2回微分に比例する量) を求めなければならない [27, 28]。

時空上の線素の固有長 ds^2 は一般に負の値をとりうる。例えば、平坦時空の計量 (A.2) において $(cdt)^2 > (dx)^2, dy = dz = 0$ とすると、 $ds^2 < 0$ となることは明らかである。世界線上の任意の線素の固有長が負になるとき、この世界線は「時間的 (time-like) である」

という。また、時間的世界線で結ばれる2点は、「互いに時間的である」という。同様に、 $ds^2 > 0$ であれば「空間的 (space-like)」、 $ds^2 = 0$ であれば「ヌル (null)」という。時空上の1点 x から（あるいは x に向かって）情報を伝達することが可能な領域は x に対して時間的な領域とヌルの領域に限られ、互いに空間的な2点は因果関係を持たない。

計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を用いると、一般の座標系 x^μ に対する d'Alembertian $\square$ は

$$\square = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu \quad (\text{A.3})$$

と表される。ここで g は $g_{\mu\nu}$ の行列式、 $g^{\mu\nu}$ は $g_{\mu\nu}$ の逆行列である。例として、球座標表示された平坦時空の計量 $g_{\mu\nu} = \text{diag.}(-1, 1, r^2, r^2 \sin^2 \theta)$ を考えると、 $g = -r^4 \sin^2 \theta$ および $g^{\mu\nu} = \text{diag.}(-1, 1, r^{-2}, r^{-2}(\sin \theta)^{-2})$ から

$$\square = -\partial_{ct}^2 + \frac{1}{r^2} \partial_r r^2 \partial_r + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \partial_\theta \sin \theta \partial_\theta + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 \quad (\text{A.4})$$

となり、よく知られた形が得られる。

B Schwarzschild 時空

Schwarzschild 解（時空）は、Einstein 方程式の静的・球対称・漸近的平坦な解である。Schwarzschild 時空の計量は次のように与えられる。

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 dt_s^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{B.1})$$

ここで、 $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$ は S^2 上の線素、 t_s は Schwarzschild 時間、 $r_g = 2GM_{\text{BH}}/c^2$ は Schwarzschild 半径である。この計量の $r \rightarrow \infty$ の極限からわかるように、 t_s は「空間的無限遠で静止する観測者の固有時間」という意味を持つ。本論文では、座標 $(ct_s, r, \theta, \varphi)$ を Schwarzschild 座標と呼ぶ。

B.1 Schwarzschild 時空上での自由粒子の運動

Schwarzschild 時空上での自由粒子の運動、特に自由落下運動を解析する。自由粒子の Lagrangian は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \\ &= \frac{m}{2} \left[-\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

である。ここでドットは粒子の固有時間 τ に関する微分を表す。この Lagrangian は一般論により測地線に沿って保存される運動の定数であり、その値は $-mc^2/2$ に等しい [27]。さらに、この Lagrangian は $x^0 (= ct_s)$, $x^3 (= \varphi)$ を含まないので（循環座標）、4 元運動量

$$p_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \quad (\text{B.3})$$

の第0成分と第3成分は運動の定数である。すなわち、

$$\dot{p}_0 = 0 \Rightarrow E \equiv -cp_0 = mc^2 \left(1 - \frac{r_g}{r}\right) \dot{t}_s = \text{const.} \quad (\text{B.4a})$$

$$\dot{p}_3 = 0 \Rightarrow L_z \equiv p_3 = mr^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = \text{const.} \quad (\text{B.4b})$$

ここで E, L_z はそれぞれ質点のエネルギーと z 軸まわりの角運動量である。さらに、時空の球対称性より一般性を失わずに $\theta = \pi/2$, $\dot{\theta} = 0$ としてよい。

自由粒子の一般の運動を求めるためには Euler-Lagrange 方程式 (測地線方程式) を解かなければならないが、特殊な運動に限って求める場合は運動の定数を利用することにより、運動を簡単に解くことができる。自由粒子が動径方向の自由落下運動を行う場合、 $L_z = 0$, $E = mc^2$ より

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}mc^2 = \mathcal{L} &= \frac{m}{2} \left[-\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 \right] \\ &= \frac{m}{2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} \left[-\left(\frac{E}{mc^2}\right)^2 c^2 + \dot{r}^2 \right] \\ &= \frac{m}{2} \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1} (-c^2 + \dot{r}^2) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

これを $\dot{r}$ について解くと、

$$v_{\text{ff}}(r) \equiv \frac{dr}{d\tau} = -c \sqrt{\frac{r_g}{r}} \quad (\text{B.6})$$

が得られる。但し、自由落下を考えたので符号を負に取った。(B.6) で定義した $v_{\text{ff}}(r)$ を本論文では“自由落下速度”と呼ぶ。 $v_{\text{ff}}(r)$ が $r = r_g$ で正則であることから、自由落下する粒子はホライズンを何事も無く横切ることがわかる。なお、 $r < r_g$ で $v_{\text{ff}}(r)$ は c を超えるが、粒子の測地線は $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 d\tau^2 < 0$ より常に時間的である。

B.2 Painlevé-Gullstrand 座標

Schwarzschild 座標 $(ct_s, r, \theta, \varphi)$ で座標表示された Schwarzschild 計量 (B.1) は、動径座標がホライズン $r = r_g$ のところに特異点を持つ。そのため、Schwarzschild 座標ではホライズンをまたいで時空を表現することができない。このことを理解するため、 ct_s, θ, φ が一定で r をパラメータとする曲線を無限遠 $r \rightarrow \infty$ からホライズンに向けて連続的に伸ばすことを考える。この曲線の各線素の固有長 ds^2 は、(B.1) より

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1 - \frac{r_g}{r}} \quad (\text{B.7})$$

となるが、 $r \rightarrow r_g$ で右辺の分母が発散するため、この曲線は $r = r_g$ をまたいで $r < r_g$ の領域へ伸ばすことができない。実は、以下で示すように、この特異点は Schwarzschild 時空自体の性質ではなく、Schwarzschild 座標の性質に起因する「見かけの特異点 (座標特異点)」である。

新しい時間変数 t_p を

$$cdt_p \equiv cdt_s + \frac{\sqrt{r_g/r} dr}{1 - \frac{r_g}{r}} \quad (\text{B.8})$$

で定義する。これは積分することができ、

$$ct_p = ct_s + 2\sqrt{r_g r} + r_g \ln \left(\frac{\sqrt{r} - \sqrt{r_g}}{\sqrt{r} + \sqrt{r_g}} \right) + \text{const.} \quad (\text{B.9})$$

となる。これを用いて Schwarzschild 計量 (B.1) を書き換えると、

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_g}{r} \right) c^2 dt_p^2 + 2c\sqrt{\frac{r_g}{r}} dr dt_p + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{B.10})$$

となる。座標系 $(ct_p, r, \theta, \varphi)$ は **Painlevé-Gullstrand 座標** と呼ばれ¹³、時間変数 t_p は **Painlevé-Gullstrand 時間** と呼ばれる。

Painlevé-Gullstrand 座標は Schwarzschild 座標と異なり、ホライズンをまたいで時空を覆うことができる。なぜならば、 t_p, θ, φ が一定で r をパラメータとする曲線を考えると、その線素の固有長は $ds^2 = dr^2$ となり、 $r = r_g$ をまたいで伸ばすことが可能だからである。このことから、上で見た $r = r_g$ での特異点が Schwarzschild 座標の座標特異点に過ぎないことがわかる。

Painlevé-Gullstrand 座標の主な特徴を以下に挙げる。

- t_p = 一定の時間的超曲面は 3 次元 Euclid 空間 E^3 である。このことは計量 (B.10) の表式において $dt_p = -$ とすればわかる。すなわち、Painlevé-Gullstrand 時間 t_p は空間方向が平坦に見えるようにとられたものである。
- 計量を“自由落下速度” $v_{\text{ff}}(r) = -c\sqrt{r_g/r}$ を用いて書き換えると、

$$\begin{aligned} ds^2 &= - \left(1 - \frac{v_{\text{ff}}(r)^2}{c^2} \right) c^2 dt_p^2 - 2v_{\text{ff}}(r) dr dt_p + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= -c^2 dt_p^2 + (dr - v_{\text{ff}}(r) dt_p)^2 + r^2 d\Omega^2 \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

となる。この式からわかるように、Schwarzschild 時空上で自由落下する観測者の固有時間 dr は Painlevé-Gullstrand 時間 dt_p に一致する。

なお、Schwarzschild 座標表示の計量 (B.1) は $r = 0$ にも特異点を持つが、これは Painlevé-Gullstrand 座標表示によっても解消されない。この特異点はホライズンでの見かけの特異点と異なり、Schwarzschild 時空自体の性質に起因する「真の特異点 (曲率特異点)」である。実際、 $r = 0$ では座標変換に対して不変な曲率が発散することが知られている。

¹³Lemaître 座標とも呼ばれる。

B.3 Kruskal 拡張

Schwarzschild 時空は時間反転不変な時空であり、実はブラックホールとホワイトホールを同時に含む。このことは、以下に示す Schwarzschild 時空の Kruskal 拡張によって端的に示される。

まず、遅延ヌル座標 u と先進ヌル座標 v を次で定義する。

$$u = ct - r^* \quad (-\infty < u < \infty) \quad (\text{B.12})$$

$$v = ct + r^* \quad (-\infty < v < \infty) \quad (\text{B.13})$$

ここで、

$$r^* = \int \frac{dr}{1 - \frac{r_g}{r}} = r + r_g \ln\left(\frac{r - r_g}{r_g}\right) \quad (r > r_g, -\infty < r^* < \infty) \quad (\text{B.14})$$

は Regge-Wheeler 座標¹⁴である。これらを用いると、Schwarzschild 計量 (B.1) は

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right) du dv + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{B.15})$$

と書き換えられる。さらに、新しいヌル座標

$$U = -e^{-\kappa u/c} \quad (-\infty < U < 0) \quad (\text{B.16})$$

$$V = +e^{+\kappa v/c} \quad (0 < V < \infty) \quad (\text{B.17})$$

を導入して (B.15) を書き換えると、

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{c^2(r - r_g)}{r\kappa^2 UV} dU dV + r^2 d\Omega^2 \\ &= -\frac{c^2(r - r_g)}{r\kappa^2 e^{\kappa(v-u)/c}} dU dV + r^2 d\Omega^2 \\ &= -\frac{r_g c^2}{r\kappa^2} e^{-2\kappa r/c} \left(\frac{r - r_g}{r_g}\right)^{1-2\kappa r_g/c} dU dV + r^2 d\Omega^2 \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

となる。 $dU dV$ にかかる因子を見ると、 κ を

$$\kappa = \frac{c}{2r_g} = \frac{c^3}{4GM_{\text{BH}}} \quad (\text{B.19})$$

とすれば、この計量は $r = r_g$ で正則になることがわかる。 κ をこのようにとるとき、座標 (U, V) を Kruskal 座標と呼ぶ。

(B.19) で定義された κ は、実は自由落下する粒子がホライズン上で受ける重力加速度に比例する。粒子の自由落下加速度を a_{ff} とすると、

$$a_{\text{ff}} = \frac{d}{d\tau} v_{\text{ff}}(r(\tau)) = \frac{dr}{d\tau} \frac{dv_{\text{ff}}}{dr} = -\frac{v_{\text{ff}}^2}{2r} \quad (\text{B.20})$$

¹⁴ 亀座標 (tortoise coordinate) とも呼ばれる。これは、 r^* がどれだけ減少しても ($r^* \rightarrow \infty$) ホライズン ($r = r_g$) に到達できないからである。

と表されるが、ホライズン $r = r_g$ 上では $v_{\text{ff}}^2 = -c$ なので、

$$|a_{\text{ff}}|_{r=r_g} = \frac{c^2}{2r_g} = c\kappa \quad (\text{B.21})$$

となることがわかる ($c = 1$ の単位系なら κ そのものである)。このような理由により、(B.19) で定義された κ は**表面重力 (surface gravity)** と呼ばれる。

計量がホライズン $r = r_g$ で正則であることから、Kruskal 座標 (U, V) はホライズン $r = r_g$ をまたいで定義できる。実際、

$$UV = -e^{\kappa(v-u)/c} = -e^{r^*/r_g} = -\frac{r - r_g}{r_g} e^{r/r_g} \quad (\text{B.22})$$

より、 $r = r_g$ が $\{U = 0\} \cup \{V = 0\}$ に対応し、 (U, V) を $-\infty < U, V < \infty$ ($UV < 1$) の領域に拡張できることがわかる。Kruskal 座標 (U, V) を用いて Schwarzschild 計量を表現することを Kruskal 拡張という。もとの $-\infty < U < 0, 0 < V < \infty$ の領域を Schwarzschild 時空の「外部領域」と呼び、これに対して $0 < U, V < \infty$ の領域を「ブラックホール領域」、 $-\infty < U, V < 0$ の領域を「ホワイトホール領域」と呼ぶ。残りの $0 < U < \infty, -\infty < V < 0$ の領域は、 $-\infty < U < 0, 0 < V < \infty$ で定義される外部領域とは因果関係の無い、もうひとつの外部領域である (補足 C 参照)。

一方、Kruskal 座標を用いても $r = 0$ の特異点は残るので、 (U, V) を $UV \geq 1$ の領域に拡張することはできない。

C Penrose ダイアグラム

時空の大局的な因果構造 (どの領域がどの別の領域と因果的に繋がっているか) を表現するには Penrose ダイアグラムが便利である。Penrose ダイアグラムとは、(i) ヌル方向を常に傾き 45 度に保ったまま、(ii) 無限遠方を含めて有限のパラメータで時空全体を記述する図のことをいう¹⁵。この章では、Penrose ダイアグラムの 3 つの具体例を示すことにする。

C.1 Minkowski 時空

Minkowski 時空 (平坦時空) の計量を球座標 (ct, r, θ, φ) で表すと、

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (\text{C.1})$$

である。角度方向 (θ, φ) は自明な球対称構造をもつので、以下では時間座標と動径座標の組 (ct, r) だけを考える。まず、座標 (ct, r) をヌル座標

$$u = ct - r \quad (\text{C.2})$$

$$v = ct + r \quad (\text{C.3})$$

¹⁵(i),(ii) はまとめて共形コンパクト化 (conformal compactification) と呼ばれる。

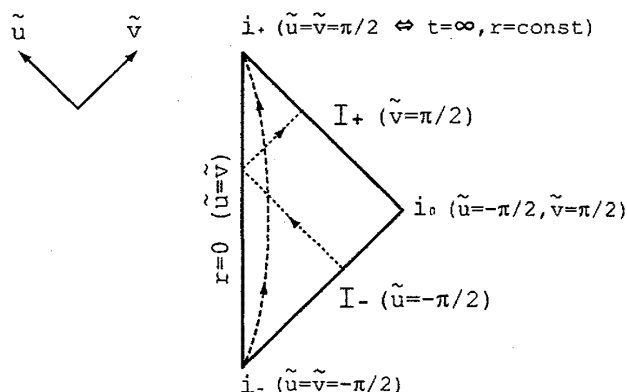


図 C.1: Minkowski 時空を表わす Penrose ダイアグラム。破線は物質粒子の軌跡（時間的測地線）、点線は光の軌跡（ヌル測地線）を表わす。

で書き換える。但し、 $r \geq 0$ なので

$$-\infty < u \leq v < \infty \quad (\text{C.4})$$

である。 ct 方向を縦軸、 r 方向を横軸と考えれば、 u, v 方向はそれぞれ互いに直交する傾き 45 度の直線に一致する。さらに、 (u, v) を有限パラメータ

$$\tilde{u} = \tan^{-1} u \quad (\text{C.5})$$

$$\tilde{v} = \tan^{-1} v \quad (\text{C.6})$$

で書き換える。但し、式 (C.4) より

$$-\frac{\pi}{2} < \tilde{u} \leq \tilde{v} < \frac{\pi}{2} \quad (\text{C.7})$$

である。座標 $(\tilde{u}, \tilde{v})$ を互いに直交する傾き 45 度の方角にとり、Minkowski 時空を表わしたものが図 C.1 である。ここで、ダイアグラム上の各点は半径 r の球面を表わすことに注意しておく。

Penrose ダイアグラム上では、時空全体を有限パラメータで記述したおかげで、「無限遠点」 $t = \pm\infty, r = \infty$ を書き込むことができる。図 C.1 上の $i_{\pm}, i_0, I_{\pm}$ はそれぞれ、

- $i_{\pm}$ [未来/過去の時間的無限遠 (future/past timelike infinity)] : $t = \pm\infty, r = \text{有限}$
- i_0 [空間的無限遠 (spacelike infinity)] : $r = \infty, t = \text{有限}$
- $I_{\pm}$ [未来/過去のヌル無限遠 (future/past null infinity)] : $t = \pm\infty, r = \infty, ct \mp r = \text{有限}$

を表わしている。

時空の因果構造を理解する上で、 $i_{\pm}$ と $I_{\pm}$ を区別することは本質的に重要である。 $i_{\pm}$ は物質粒子にとっての「無限の未来/過去」であるのに対し、 $I_{\pm}$ は光速で伝搬できる波動にとっての「無限の未来/過去」である。Penrose ダイアグラム上では、これらの区別が明瞭に表現される。

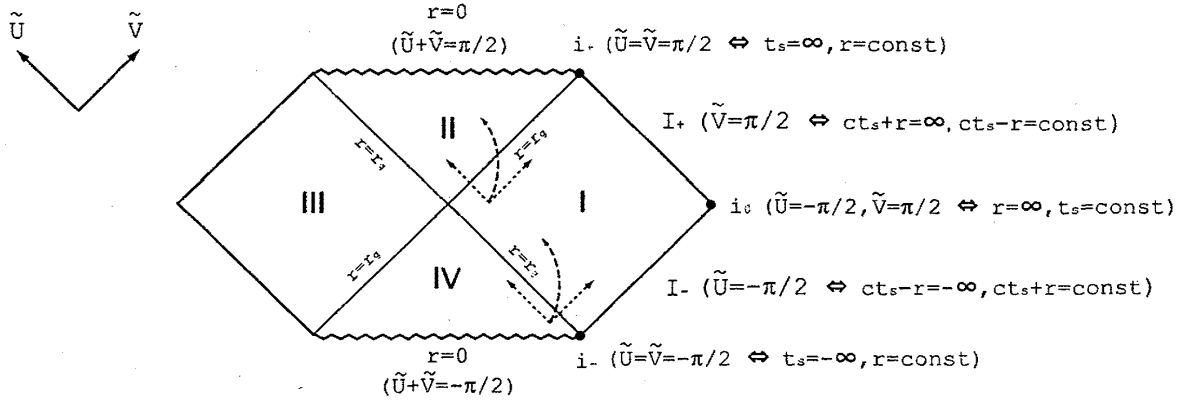


図 C.2: Schwarzschild 時空の Penrose ダイアグラム。領域 I は外部領域、II はブラックホール領域、IV はホワイトホール領域、III は領域 I と因果関係の無いもうひとつの外部領域である。破線の矢印は物質粒子の進行方向、点線の矢印は光の進行方向を表す。ジグザグの線は $r = 0$ の特異点である。

C.2 Schwarzschild 時空

Kruskal 座標表示による Schwarzschild 計量は、

$$ds^2 = -\frac{4r_g^3}{r} e^{-r/r_g} dU dV + r^2 d\Omega^2 \quad (C.8)$$

$$-\infty < U < \infty, -\infty < V < \infty; \quad UV = -\frac{r-r_g}{r_g} e^{r/r_g} < 1 \quad (C.9)$$

である。前節と同様に

$$\tilde{U} = \tan^{-1} U \quad (C.10)$$

$$\tilde{V} = \tan^{-1} V \quad (C.11)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \tilde{U} < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \tilde{V} < \frac{\pi}{2}; \quad -\frac{\pi}{2} < \tilde{U} + \tilde{V} < \frac{\pi}{2} \quad (C.12)$$

を導入することで、Kruskal 拡張された Schwarzschild 時空全体を有限パラメータ $(\tilde{U}, \tilde{V})$ で表現することができる。Schwarzschild 時空の Penrose ダイアグラムを図 C.2 に示す。図中には前節と同様に「無限遠点」を付加してある。

はじめに Kruskal 座標 (U, V) を定義した「外部領域」は図中の領域 I $(-\pi/2 < \tilde{U} < 0, 0 < \tilde{V} < \pi/2)$ に対応し、ブラックホール領域は領域 II $(0 < \tilde{U} < \pi/2, 0 < \tilde{V} < \pi/2, \tilde{U} + \tilde{V} < \pi/2)$ 、ホワイトホール領域は領域 IV $(-\pi/2 < \tilde{U} < 0, -\pi/2 < \tilde{V} < 0, \tilde{U} + \tilde{V} > -\pi/2)$ にそれぞれ対応する。図からわかるように、物質や光は領域 I から領域 II に進入することができるが、領域 II からは光でさえも領域 I に戻ることはできない。逆に、物質や光は領域 IV から領域 I へ進入することはできるが、領域 I から領域 IV へ戻ることはできない。領域 III $(0 < \tilde{U} < \pi/2, -\pi/2 < \tilde{V} < 0, \tilde{U} + \tilde{V} > -\pi/2)$ は領域 I, IV と因果的に繋がっているが、領域 I とは繋がっていない。

C.3 重力崩壊で形成される Schwarzschild ブラックホール

星が圧力によって自重を支えることができなくなると、自己重力によって暴走的に収縮する。これを重力崩壊という。星の内部の時空構造を厳密に知るためには Einstein 方程式を解かなければならないが、重力崩壊前であれば比較的平坦なので Minkowski 時空 (図 C.1) に近い。一方、外部の時空構造は Schwarzschild 時空で記述されるので [27, 28]、星が収縮してその半径が Schwarzschild 半径を下回るとブラックホール領域が形成され、星を構成する物質はそのまま中心の 1 点に落下し特異点を形成する。この状況を表わす Penrose ダイアグラムは模式的には図 3.1 のようになる。

D WKB 近似法

この章では、WKB 近似法を用いた散乱問題の解法について要説する。

1 次元 Schrödinger 型方程式は一般に

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 - V(x) \right] \Psi(x) = 0 \quad (\text{D.1})$$

と表される。ここではポテンシャル項 $V(x)$ の形として、 $x = 0$ で極大値をとり、無限遠 $x \rightarrow \pm\infty$ で 0 に収束するようなものを考える。

WKB 近似法とは短波長近似、すなわち $|\Psi'(x)/\Psi(x)| \sim \epsilon^{-1} |V'(x)/V(x)|$ とみなして波動関数を微小量 ϵ について摂動展開し、波動方程式を解く方法である。

まず、 ϵ 展開を見やすくするため、 $\xi = \epsilon x$ を用いて空間方向をスケールしなおし、波動方程式 (D.1) を

$$\left[\epsilon^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + Q(\xi) \right] \Psi(\xi) = 0 \quad (\text{D.2})$$

と書き直す。ここで、

$$Q(\xi) \equiv \omega^2 - V(\xi) \quad (\text{D.3})$$

である。

次に、波動関数 $\Psi(\xi)$ をアイコナール $S(\xi)$ を用いて

$$\Psi(\xi) = \exp \left[\frac{S(\xi)}{\epsilon} \right] \quad (\text{D.4})$$

と書くと、(D.2) は

$$(S'(\xi))^2 + Q(\xi) + \epsilon S''(\xi) = 0 \quad (\text{D.5})$$

と書き直される。さらに、アイコナール $S(\xi)$ を微小量 ϵ を用いて

$$S(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n S_n(\xi) \quad (\text{D.6})$$

と展開して波動方程式に代入し、 ϵ のべきについてまとめると、摂動方程式の系列

$$(S'_0)^2 + Q = 0 \quad (\text{D.7a})$$

$$S''_0 + 2S'_0 S'_1 = 0 \quad (\text{D.7b})$$

$$S''_1 + 2S'_0 S'_2 + (S'_1)^2 = 0 \quad (\text{D.7c})$$

$$S''_2 + 2S'_1 S'_2 + 2S'_0 S'_3 = 0 \quad (\text{D.7d})$$

$\vdots$

が得られる。(D.7)は、

$$S_0 = \pm i \int Q^{1/2} d\xi \quad (\text{D.8a})$$

$$S_1 = -\frac{1}{2} \ln S'_0 = -\frac{1}{4} \ln Q \quad (\text{D.8b})$$

$$S_2 = -\frac{1}{2} \int \frac{S''_1 + S'^2_1}{S'_0} d\xi = \mp \frac{1}{8} \int \left(\frac{Q''}{Q^{3/2}} - \frac{5Q'^2}{4Q^{5/2}} \right) d\xi \quad (\text{D.8c})$$

$$S_3 = -\frac{1}{2} \int \frac{S''_2 + 2S'_1 S'_2}{S'_0} d\xi = \frac{1}{16} \left(\frac{Q''}{Q^2} - \frac{5Q'^2}{4Q^3} \right) \quad (\text{D.8d})$$

$\vdots$

といった具合に、上から(次数の低いものから)逐次的に解くことができる。この逐次操作を ϵ の n 次までで打ち切るとき、この近似を n 次WKB近似と呼ぶ。0次WKB近似は幾何光学近似(アイコナール近似)とも呼ばれる。

以下、空間座標を x に戻す。無限遠 $x \rightarrow -\infty$ では $V(x) \rightarrow 0$ であるので、 Ψ は漸近的に

$$\Psi \sim Z^I_+ \psi^I_+ + Z^I_- \psi^I_- \quad (\text{D.9a})$$

$$\psi^I_{\pm} \sim e^{\pm i\omega x} \quad (\text{D.9b})$$

となる。同様に、 $x \rightarrow +\infty$ では

$$\Psi \sim Z^{\text{III}}_+ \psi^{\text{III}}_+ + Z^{\text{III}}_- \psi^{\text{III}}_- \quad (\text{D.10a})$$

$$\psi^{\text{III}}_{\pm} \sim e^{\pm i\omega x} \quad (\text{D.10b})$$

となる。以下での目標は、係数 $Z^I_{\pm}$ と $Z^{\text{III}}_{\pm}$ との間の関係を求める、すなわち次で定義される散乱行列 $(\mathcal{M}_V)_{ij}$ を求めることである。

$$\begin{pmatrix} Z^I_+ \\ Z^I_- \end{pmatrix} = \mathcal{M}_V \begin{pmatrix} Z^{\text{III}}_+ \\ Z^{\text{III}}_- \end{pmatrix} \quad (\text{D.11})$$

まず、空間領域を $Q(x)$ の符号によって3つの領域に分ける。 $Q(x) = 0$ となる点(古典的転回点)を x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)とし、

領域 I : $x < x_1$

領域 II : $x_1 \leq x \leq x_2$

領域 III : $x_2 < x$

と呼ぶことにする¹⁶。

よく知られるように、古典的転回点の近傍ではWKB近似は良い近似でなくなる。従って、古典的転回点近傍では、ポテンシャルの形を解析関数で近似した上で(D.1)を解析的に解くなどして、それぞれの古典的転回点をはさむ2つの領域におけるWKB近似解を接続する必要がある。通常のWKB近似を用いた散乱問題では、2つの古典的転回点 x_1, x_2 は十分離れていると考え、各古典的転回点の近傍でAiry関数を用いて解を近似し、領域Iと領域IIとの接続、領域IIと領域IIIとの接続を別々に行う。ところが、この方法は古典的転回点 x_1, x_2 が十分に離れていない場合には良い近似解法ではなくなる。ここでいう「十分に離れていない」とは、「領域II上でWKB近似が適用できる領域が存在しないほどに接近している」という意味である。例えば、準固有振動モードのうち n の小さいモードはこの場合に該当する。このような場合は、ポテンシャルの極大点 $x=0$ の周りで(D.1)を近似的に解き、領域Iと領域IIIとの間の接続を一挙に求める方が有効である。以下では、このアプローチで散乱行列 $(M_V)_{ij}$ を求めることにする。簡単のため、領域I,IIIでは1次WKB近似を採用する。高次WKB近似への拡張は、(計算は煩雑ではあるが)1次WKB近似の方法を単純に拡張することで系統的に行うことが可能である。現時点では、6次WKB近似まで拡張がなされている。

D.1 ポテンシャル極大点周りでの近似解

まず、古典的転回点が極大点に十分近いという仮定の下に、ポテンシャル障壁 $V(x)$ 、あるいは極大点 $x=0$ の周りで x の2次関数で近似する。

$$Q(x) \approx Q_0 + \frac{Q_0''}{2}x^2 \quad (\text{D.12})$$

ここで、 $Q_0 \equiv Q(0) < 0$, $Q_0'' \equiv Q''(0) > 0$ である。この近似のもとでは、古典的転回点の位置 x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) は

$$x_1 = -\sqrt{\frac{-2Q_0}{Q_0''}} = -\sqrt{\frac{2(\omega^2 - V_0)}{V_0''}} \quad (\text{D.13a})$$

$$x_2 = +\sqrt{\frac{-2Q_0}{Q_0''}} = +\sqrt{\frac{2(\omega^2 - V_0)}{V_0''}} \quad (\text{D.13b})$$

である、さらに、

$$k \equiv (2Q_0'')^{1/4}, \quad z \equiv e^{-i\pi/4} k x \quad (\text{D.14})$$

$$\nu + \frac{1}{2} \equiv i \frac{Q_0}{k^2} = i \frac{Q_0}{(2Q_0'')^{1/2}} \quad (\text{D.15})$$

を用いて書き換えると、(D.1)は近似的に

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \nu + \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4} \right] \Psi(z) = 0 \quad (\text{D.16})$$

¹⁶ 古典的転回点の存在は暗に仮定する。

と表される。これは1次元調和振動子の Schrödinger 方程式と同型であり、一般解は

$$\Psi(z) = AD_\nu(z) + BD_{-\nu-1}(iz) \quad (A, B \text{ は任意定数}) \quad (\text{D.17})$$

で与えられる。ここで $D_\nu(z)$ は放物円筒関数 (parabolic cylinder function) である。

D.2 遠方での WKB 近似解

領域 I では、(D.1) の解は (古典的転回点 x_1 近傍を除いて) WKB 関数

$$Q(x)^{-1/4} \exp \left[\pm i \int_x^{x_1} \sqrt{Q(x')} dx' \right] \quad (\text{D.18})$$

で良く近似される。ここで、波動関数の初期位相を固定するため、積分の上限を x_1 とした。 $x \rightarrow -\infty$ では $Q(x) \sim \omega^2$ となるので、漸近的境界条件 (D.9) を満たす WKB 近似解として

$$\begin{aligned} \Psi(x) \sim & Z_+^I Q(x)^{-1/4} \exp \left[+i \int_{x_1}^x \sqrt{Q(x')} dx' \right] \\ & + Z_-^I Q(x)^{-1/4} \exp \left[-i \int_{x_1}^x \sqrt{Q(x')} dx' \right] \end{aligned} \quad (\text{D.19})$$

が得られる。同様に、領域 III での WKB 近似解は

$$\begin{aligned} \Psi(x) \sim & Z_+^{\text{III}} Q(x)^{-1/4} \exp \left[+i \int_{x_2}^x \sqrt{Q(x')} dx' \right] \\ & + Z_-^{\text{III}} Q(x)^{-1/4} \exp \left[-i \int_{x_2}^x \sqrt{Q(x')} dx' \right] \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

となる。

D.3 解の接続

解の接続を古典的転回点の外側で行う。ポテンシャル極大点周りの近似解 (D.17) は、 $|z| \gg 1$ で漸近的に

$$\begin{aligned} \Psi & \sim \left[A + B \frac{(2\pi)^{1/2} e^{-i\pi\nu/2}}{\Gamma(\nu+1)} \right] z^\nu e^{-z^2/4} + \left[B e^{3i\pi(\nu+1)/2} - A \frac{(2\pi)^{1/2} e^{i\pi\nu/2}}{\Gamma(-\nu)} \right] z^{-(\nu+1)} e^{z^2/4} \\ & \sim \left[A + B \frac{(2\pi)^{1/2} e^{-i\pi\nu/2}}{\Gamma(\nu+1)} \right] e^{-i\pi\nu/4} (kx)^\nu e^{i(kx)^2/4} \\ & \quad + \left[B e^{3i\pi(\nu+1)/2} - A \frac{(2\pi)^{1/2} e^{i\pi\nu/2}}{\Gamma(-\nu)} \right] e^{i\pi(\nu+1)/4} (kx)^{-(\nu+1)} e^{-i(kx)^2/4} \\ & \quad \left(|z| \gg 1, \arg z = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x \ll -k^{-1} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.21})$$

$$\begin{aligned} \Psi & \sim A z^\nu e^{-z^2/4} + B z^{-(\nu+1)} e^{-i\pi(\nu+1)/2} e^{z^2/4} \\ & \sim A e^{-i\pi\nu/4} (kx)^\nu e^{i(kx)^2/4} + B e^{-i\pi(\nu+1)/4} (kx)^{-(\nu+1)} e^{-i(kx)^2/4} \\ & \quad \left(|z| \gg 1, \arg z = \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow x \gg k^{-1} \right) \end{aligned} \quad (\text{D.22})$$

のようにふるまう。

一方、領域 I での WKB 近似解 (D.19) に Q の近似形 (D.12) を代入すると、

$$\Psi \sim \left(\frac{k}{2e^{i\pi/4}} \right)^{1/2} \left[Z_-^I F(\nu)^{-1} e^{-i\pi\nu/4} (-kx)^\nu e^{i(kx)^2/4} + Z_+^I F(\nu) e^{i\pi\nu/4} (-kx)^{-(\nu+1)} e^{-i(kx)^2/4} \right] \quad (\text{D.23})$$

ここで、

$$F(\nu) = \left(\nu + \frac{1}{2} \right)^{(\nu+1/2)/2} e^{-(\nu+1/2)/2} \quad (\text{D.24})$$

とした。同様に、領域 III では、

$$\Psi \sim \left(\frac{k}{2e^{i\pi/4}} \right)^{1/2} \left[Z_+^{\text{III}} F(\nu)^{-1} e^{-i\pi\nu/4} (kx)^\nu e^{i(kx)^2/4} + Z_-^{\text{III}} F(\nu) e^{i\pi\nu/4} (kx)^{-(\nu+1)} e^{-i(kx)^2/4} \right] \quad (\text{D.25})$$

である。

最後に、(D.21) と (D.23)、(D.22) と (D.25) をそれぞれ照合 (match) し、 A, B を消去することにより、

$$\begin{pmatrix} Z_+^I \\ Z_-^I \end{pmatrix} = \mathcal{M}_V \begin{pmatrix} Z_+^{\text{III}} \\ Z_-^{\text{III}} \end{pmatrix} \quad \mathcal{M}_V = \begin{pmatrix} \frac{(2\pi)^{1/2}}{F(\nu)^2 \Gamma(-\nu)} & -e^{i\pi\nu} \\ e^{i\pi\nu} & \frac{iF(\nu)^2 e^{i\pi\nu} (2\pi)^{1/2}}{\Gamma(\nu+1)} \end{pmatrix} \quad (\text{D.26})$$

が得られる。以上で 1 次 WKB 近似の下での散乱行列 $\mathcal{M}_V$ が求まった。

E Pöschl-Teller ポテンシャルの散乱問題

Schrödinger 型の同次波動方程式

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 - V_{\text{PT}}(x) \right] \psi(x) = 0 \quad (\text{E.1})$$

の散乱問題を考える。ここで $V_{\text{PT}}(x)$ は Pöschl-Teller ポテンシャルであり、

$$V_{\text{PT}}(x) = \frac{V_0}{\cosh^2(Kx)} \quad (\text{E.2})$$

で定義される。ここで $V_0 \equiv V_{\text{PT}}(0) > 0$ はポテンシャルの極大値、 $-2K^2 \equiv V_{\text{PT}}''(0)/V_0 < 0$ は極大点における曲率である。

表記を簡単にするため、 $z \equiv Kx$, $\Omega \equiv \omega/K$, $h \equiv 4V_0/K^2$ を新たに導入して (E.1), (E.2) を次のように書き換える。

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} + \Omega^2 - U(z) \right] \psi(z) = 0 \quad (\text{E.3})$$

$$U(z) = \frac{h}{4 \cosh^2 z} \quad (\text{E.4})$$

E.1 波動方程式の一般解

まずは波動方程式 (E.3) の一般解を求めることから始める。新座標 u を

$$u \equiv \frac{1}{2}(1 + \tanh z) \quad (\text{E.5})$$

と定義し、(E.3) を u に関する微分方程式に書き直すと、

$$\frac{d^2 \psi}{du^2} + \left[\frac{1}{u} - \frac{1}{1-u} \right] \frac{d\psi}{du} + \frac{1}{4} \left[\frac{\Omega^2}{u^2(1-u)^2} - \frac{h}{u(1-u)} \right] \psi = 0 \quad (\text{E.6})$$

が得られる。これは $u = 0, 1, \infty$ に確定特異点を持つ Fuchs 型微分方程式である。従って、 $\psi(u)$ を新たに

$$\psi(u) = u^p(1-u)^q F(u) \quad (\text{E.7})$$

とおき、 p, q を適当に決めれば、(E.6) は $F(u)$ の超幾何微分方程式に帰着させることができる。

(E.7) を (E.6) に代入して整理すると、

$$u(1-u) \frac{d^2 F}{du^2} + \left[2p+1 + 2(p+q+1)u \right] \frac{dF}{du} - \left[p(p+1) + q(q+1) + 2pq + \frac{h}{4} \right] F + \left[\frac{p^2 + \Omega^2/4}{u} + \frac{q^2 + \Omega^2/4}{1-u} \right] F = 0 \quad (\text{E.8})$$

となる。これと超幾何微分方程式

$$u(1-u) \frac{d^2 F}{du^2}(\alpha, \beta, \gamma; u) + \left[\gamma - (\alpha + \beta + 1)u \right] \frac{dF}{du}(\alpha, \beta, \gamma; u) - \alpha\beta F(\alpha, \beta, \gamma; u) = 0 \quad (\text{E.9})$$

とを比較すると、 p, q を

$$p^2 + \frac{\Omega^2}{4} = 0 \quad \text{i.e.} \quad p = \pm \frac{i\Omega}{2} \quad (\text{E.10a})$$

$$q^2 + \frac{\Omega^2}{4} = 0 \quad \text{i.e.} \quad q = \pm \frac{i\Omega}{2} \quad (\text{E.10b})$$

のようにとれば $F(u)$ を超幾何関数 $F(\alpha, \beta, \gamma, u)$ にできることがわかる。 α, β, γ は係数比較により

$$\gamma = 2p+1 \quad (\text{E.11a})$$

$$\alpha + \beta = 2(p+q) + 1 \quad (\text{E.11b})$$

$$\alpha\beta = p(p+1) + q(q+1) + 2pq + \frac{h}{4} \quad (\text{E.11c})$$

から決まる。特に (E.11b) と (E.11c) より

$$\alpha, \beta = \frac{1}{2} [2(p+q) + 1 \pm (1-h)^{1/2}] \equiv \sigma_{\pm} \quad (\text{E.12})$$

である。以上から、

$$\begin{aligned} \psi^{(L)} &\equiv u^p (1-u)^q F(\sigma_+, \sigma_-, \gamma; u) \\ &= e^{(p-q)z} (e^z + e^{-z})^{-(p+q)} F\left(\sigma_+, \sigma_-, \gamma; \frac{1}{2}(1 + \tanh z)\right) \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

は波動方程式 (E.3) の解であることがわかる。

また、(E.3) は変換 $z \rightarrow -z$ ($\Leftrightarrow u \rightarrow 1-u$) に対して不変に保たれることから、

$$\begin{aligned} \psi^{(R)} &\equiv (1-u)^p u^q F(\sigma_+, \sigma_-, \gamma; 1-u) \\ &= e^{(q-p)z} (e^z + e^{-z})^{-(p+q)} F\left(\sigma_+, \sigma_-, \gamma; \frac{1}{2}(1 - \tanh z)\right) \end{aligned} \quad (\text{E.14})$$

も解であることがわかる。

$\psi^{(L,R)}$ は超幾何関数の z 依存性から明らかに線形独立である。従って、両方とも $p = -i\Omega/2, q = +i\Omega/2$ ととり、 C, D を任意定数すれば、

$$\psi(z) = C\psi^{(L)}(x) + D\psi^{(R)}(x) \quad (\text{E.15})$$

は波動方程式 (E.3) の一般解である。但し、

$$\psi^{(L)}(x) = e^{-i\omega x} F\left(\sigma_+, \sigma_-, 1 - i\frac{\omega}{K}; \frac{1}{2}(1 + \tanh Kx)\right) \quad (\text{E.16})$$

$$\psi^{(R)}(x) = e^{+i\omega x} F\left(\sigma_+, \sigma_-, 1 - i\frac{\omega}{K}; \frac{1}{2}(1 - \tanh Kx)\right) \quad (\text{E.17})$$

$$\sigma_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \left(1 - \frac{4V_0}{K^2} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{E.18})$$

である。ここで表記を元に戻した。

E.2 $\psi^{(L,R)}$ の漸近形

(E.3) の解 $\psi^{(L,R)}$ の物理的な意味を見るため、これらの漸近的振る舞いを調べることにする。

まず $\psi^{(L)}$ の漸近形を調べる。 $F(\alpha, \beta, \gamma; u \rightarrow 0) \rightarrow 1$ より、 $x \rightarrow -\infty$ では

$$\psi^{(L)}(x) \sim e^{-i\omega x} \quad (\text{E.19})$$

となる。一方、超幾何関数の性質

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma)} F(\alpha, \beta, \gamma; u) \\ &= \Gamma(\alpha + \beta - \gamma) (1-u)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1; 1-u) \\ &\quad + \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1; 1-u) \end{aligned} \quad (\text{E.20})$$

(ここで Γ はガンマ関数) を用いると、 $x \rightarrow +\infty$ では

$$\psi^{(L)}(x) \sim A_\omega e^{-i\omega x} + B_\omega e^{i\omega x} \quad (\text{E.21})$$

$$A_\omega \equiv \frac{\Gamma(1 - i\omega/K)\Gamma(-i\omega/K)}{\Gamma(\sigma_+ - i\omega/K)\Gamma(\sigma_- - i\omega/K)} \quad (\text{E.22a})$$

$$B_\omega \equiv \frac{\Gamma(1 - i\omega/K)\Gamma(+i\omega/K)}{\Gamma(\sigma_+)\Gamma(\sigma_-)} \quad (\text{E.22b})$$

のように振る舞うことがわかる。つまり、 $\psi^{(L)}(x)$ は「 $x \rightarrow +\infty$ から入射した平面波は振幅比にして $1/|A_\omega|$ だけ透過し、 $|B_\omega/A_\omega|$ だけ反射される」ということを表している。

一方で $\psi^{(R)}(x)$ は、前節の議論から明らかなように、 $\psi^{(L)}(x)$ の状況を空間反転 ($x \rightarrow -x$) させて見たものである。

参考文献

- [1] N. D. Birrell and P. C. W. Davis, *Quantum fields in curved space* (Cambridge University Press, 1982)
- [2] V. Cardoso, O. J. C. Dias, J. P. S. Lemos, and S. Yoshida, *Phys. Rev. D* **70**, 044039 (2004)
- [3] V. Cardoso, J. P. S. Lemos, and S. Yoshida, *Phys. Rev. D* **70**, 124032 (2004)
- [4] V. Ferrari and B. Mashhoon, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 1361 (1984); *Phys. Rev. D* **30**, 295 (1984)
- [5] L. J. Garay et al., *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4643 (2001); *Phys. Rev. A* **63**, 023611 (2001)
- [6] S. K. Godunov, *Mat. Sb.* **4**, 271 (1959)
- [7] S. W. Hawking, *Nature* **248**, 30 (1974); *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975)
- [8] S. Hod, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4293 (1998)
- [9] S. Iyer, *Phys. Rev. D* **35**, 3632 (1987).
- [10] S. Iyer and C. M. Will, *Phys. Rev. D* **35**, 3621 (1987)
- [11] R. A. Konoplya, *Phys. Rev. D* **68**, 024018 (2003); *J. Phys. Stud.* **8**, 93 (2004)
- [12] R. A. Konoplya and A. Zhidenko, *Phys. Lett.* **B644**, 186 (2007)
- [13] E. Leaver, *Proc. R. Soc. London A* **402**, 285 (1985)
- [14] H. Nakano et al., *Phys. Rev. D* **71**, 084006 (2005)

- [15] H-P. Nollert, *Class. Quant. Grav.* **16**, R159 (1999)
- [16] H-P. Nollert and B. G. Schmidt, *Phys. Rev. D* **45**, 2617 (1992)
- [17] M. Nouri-Zunoz and T. Padmanabhan, arXiv:gr-qc/9812088
- [18] M. a. Sakagami and A. Ohashi, *Prog. Theor. Phys.* **107**, 1267 (2002); 阪上雅昭, 大橋憲, 流体でのホーキング輻射, 物性研究 76-3 (2001)
- [19] B. F. Schutz and C. M. Will, *Astrophys. J.* **291**, L33 (1985)
- [20] Y. Sun and R. H. Price, *Phys. Rev. D* **38**, 1040 (1988)
- [21] N. Szpak, arXiv:gr-qc/0411050
- [22] E. F. Toro, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction* (Springer-Verlag, Berlin, 1999)
- [23] W. G. Unruh, *Phys. Rev. Lett.* **46**, 1351 (1981)
- [24] B. J. van Leer, *J. Comput. Phys.* **23**, 276 (1977)
- [25] M. Visser, *Class. Quant. Grav.* **15**, 1767 (1998)
- [26] 北里渉, Laval Nozzle 流動場における音波の挙動 (ブラックホールに関連した放射現象とのアナロジーを求めて), 京都大学修士論文, 2006
- [27] 佐々木節, 一般相対論, 産業図書, 1996
- [28] 佐藤勝彦, 相対性理論, 岩波基礎物理シリーズ 9, 岩波書店, 1996, 第 7 章
- [29] 高野健介, ブラックホールと超音速流とのアナロジーに基づくホーキング輻射理論の実験的検証, 京都大学修士論文, 2004
- [30] 中村卓史, 三尾典克, 大橋正健 編著, 重力波をとらえる—存在の証明から検出へ, 京都大学学術出版会, 1998
- [31] リープマン, ロシュコ 著, 気体力学, 物理学叢書, 吉岡書店, 1960, 第 2 章・第 5 章