

爆風伝播の高近似計算

東京電機大学 桜井 明

瞬間エネルギー点源からの爆風の伝播の問題は $f(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$, $\lambda(y)$, $0 \leq x, y \leq 1$ についての以下の式の解を求めることに帰着する。¹⁾

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}\lambda f + (f-x)\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{r}h\frac{\partial g}{\partial x} \\ (f-x)\frac{\partial h}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial h}{\partial y} = -h\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{x}{f}\frac{\partial f}{\partial x}\right) \\ -\lambda g + (f-x)\frac{\partial g}{\partial x} + \lambda y\frac{\partial g}{\partial y} = -rg\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{x}{f}\frac{\partial f}{\partial x}\right) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} f(1, y) = \frac{2}{r+1}(1-y) \\ g(1, y) = \frac{2r}{r+1} - \frac{r-1}{r+1}y \\ h(1, y) = \frac{r+1}{r-1}\left(1 + \frac{2}{r-1}\right)^{-1} \end{cases} \quad (2)$$

$$\lambda = \left[(\alpha+1)J - \frac{1}{r-1}y\right]\left(J - y\frac{dJ}{dy}\right)^{-1}, \quad J = \int_0^1 \left(\frac{r}{2}hf^2 + \frac{g}{r-1}\right)x^\alpha dx$$

$\alpha = 0, 1, 2$; r : 比熱の比

(3)

ここで、条件(3)は次の条件

$$f(0, y) = 0 \quad (4)$$

で置きかえることも出来る。

いま、 $f(x, y)$, $g(x, y)$, $h(x, y)$ を形式的に

$$\begin{cases} f = f^{(0)}(x) + y f^{(1)}(x) + y^2 f^{(2)}(x) + \dots \\ g = g^{(0)}(x) + y g^{(1)}(x) + y^2 g^{(2)}(x) + \dots \\ h = h^{(0)}(x) + y h^{(1)}(x) + y^2 h^{(2)}(x) + \dots \end{cases} \quad (5)$$

とおくと (3) から

$$J = J_0 (1 + \sigma_1 y + \sigma_2 y^2 + \dots)$$

$$\text{ここで } J_0 = \int_0^1 \left(\frac{\gamma}{2} h^{(0)} f^{(0)2} + \frac{g^{(0)}}{\gamma-1} \right) x^\alpha dx$$

$$\sigma_1 J_0 = \int_0^1 \left(\gamma h^{(0)} f^{(0)} f^{(1)} + \frac{\gamma}{2} f^{(0)2} h^{(1)} + \frac{g^{(0)}}{\gamma-1} \right) x^\alpha dx$$

となり、これから

$$\lambda(y) = (\alpha+1)(1 + \lambda_1 y + \lambda_2 y^2 + \dots) \quad (6)$$

$$\text{但し、} \lambda_1 = \sigma_1 - \frac{1}{J_0(\alpha+1)(\gamma-1)}, \quad \lambda_2 = 2\sigma_2, \dots$$

となるが、 $f^{(i)}(x)$, $g^{(i)}(x)$, $h^{(i)}(x)$, λ_i ($\lambda_0 \equiv 1$) は $i=0$ の場合から出発して、以下のように順次に定めることが出来る。このことは非線形系では、常に可能とは限ら

ないことに注意しよう。

即ち、(5), (6) を (1), (2) に代入すると、以下のように $\lambda^{(i)}$ を固有値として含む $f^{(i)}(x)$, $g^{(i)}(x)$, $h^{(i)}(x)$ に関する 聯立常微分方程式の系とこれに対する $x=1$ の境界条件をうる。

$$\left\{ \begin{array}{l} (f^{(0)} - x)h^{(0)}f^{(0)'} + \frac{1}{\gamma} g^{(0)'} = \frac{\alpha+1}{2} f^{(0)} h^{(0)} \\ f^{(0)'} + \frac{\alpha}{x} f^{(0)} = (x - f^{(0)}) \frac{h^{(0)'}}{h^{(0)}} \\ \gamma(f^{(0)'} + \frac{\alpha}{x} f^{(0)}) - \alpha - 1 = (x - f^{(0)}) \frac{g^{(0)'}}{g^{(0)}} \end{array} \right. \quad (7)$$

$$f^{(0)}(1) = \frac{2}{\gamma+1}, \quad g^{(0)}(1) = \frac{2\gamma}{\gamma+1}, \quad h^{(0)}(1) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h^{(0)}(f^{(0)} - x)f^{(0)'} + \frac{1}{\gamma} g^{(0)'} = -\left(\frac{\alpha+1}{2} + f^{(0)'}\right)h^{(0)}f^{(0)} \\ \quad + \left\{\frac{\alpha+1}{2} f^{(0)} + (x - f^{(0)})f^{(0)'}\right\}h^{(0)} + \frac{\alpha+1}{2} \lambda_1 g^{(0)} h^{(0)} \quad (8) \\ h^{(0)}f^{(1)'} - (x - f^{(0)})h^{(1)'} = -(h^{(0)'} + \frac{\alpha}{x} h^{(0)})f^{(1)} - (f^{(0)'} + \frac{\alpha}{x} f^{(0)} + \alpha + 1)h^{(1)} \\ \gamma g^{(0)}f^{(1)'} - (x - f^{(0)})g^{(1)'} = -(g^{(0)'} + \frac{\alpha\gamma}{x} g^{(0)})f^{(1)} - \gamma(f^{(0)'} + \frac{\alpha}{x} f^{(0)}) + (\alpha+1)\lambda_1 g^{(0)} \end{array} \right.$$

$$f^{(1)}(1) = -\frac{2}{\gamma+1}, \quad g^{(1)}(1) = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \quad h^{(1)}(1) = -\frac{2(\gamma+1)}{(\gamma-1)^2}$$

— — —

これから (6) の条件と組合せるか、あるいは (4) の条件から出る $f^{(i)}(0)=0$ と組合せると $f^{(i)}$, $g^{(i)}$, $h^{(i)}$, λ_i が $i=0$ から出発して順次に定まることになる。

さて $i=0$ および $i=1$ の場合はパラメタ $\alpha=0, 1, 2$ について γ の種々の値をとって、また $i=2$ の場合も $\alpha=1, \gamma=1.4$ の場合だけは以前から計算されていた。¹⁾ その後、 $i=3$ の場合も $\gamma=1.4$ として $\alpha=0, 1, 2$ の場合に計算された。²⁾ ここでは、それらをさらに進めて、 α のすべての値に対して、 $\gamma=1.2, 1.4$ および 1.667 の場合を $i=4$ まで計算した。

ところで、このような高近似の場合、実際の計算にあたって以下のような配慮が必要であった。

まず、 $i (> 0)$ 番目の場合の計算には $i-1$ 番目までの解の値が必要であるが、これらをすべて記憶させることは能率が悪く、また容量上も殆んど不可能である。そこで、前の段階で求められた $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i-1}$ の値だけは用いるが、それ以外は未知として、 $i=0, 1, \dots, i$ の場合のすべての式を聯立させ、 λ_i は λ の固有値として求めるのが便利であった。たとえば $i=4$ のとき、未知関数 $f^{(0)}(x), g^{(0)}(x), h^{(0)}(x); \dots; f^{(4)}(x), g^{(4)}(x), h^{(4)}(x)$ をそれらの初期値 $f^{(0)}(1), g^{(0)}(1), h^{(0)}(1); \dots; f^{(4)}(1), g^{(4)}(1), h^{(4)}(1)$ のもとに 15 元の聯立常微分方程式 ((7), (8) など) で $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ は既知、 λ_4 を固有値として 条件 (6) もしくは (4) を満足するように求める。

$f^{(i)}(x)$ の $x \sim 0$ での値は λ_i の値に極めて敏感である。

従って、解を $x=0$ の近くまで決定するには λ_i の値を高精度に求める必要があり、そのためには $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{i-1}$ の値も精密に求まっている必要がある。

実際の計算では、まず λ_i の粗値を条件 (6) を用いて決定する。これには、解 $f^{(i)}, g^{(i)}, h^{(i)}$ は λ_i について 1 次式になっていることを利用し、 $f^{(i)} = f_1^{(i)}(x) + \lambda_i g_2^{(i)}(x)$, $g^{(i)} = g_1^{(i)}(x) + \lambda_i g_2^{(i)}(x)$, $h^{(i)} = h_1^{(i)}(x) + \lambda_i h_2^{(i)}(x)$ とおくと $f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \dots, h_2^{(i)}$ についての λ_i が含まれる方程式系をうる。これを初期値のもとに解き、その解を (6) に代入することにより λ_i の値が求まる。この λ_i の値を出発値として条件 (4) からの式 $f^{(i)}(0)=0$ を満足するように計算を繰返し、出来る限りの精度で λ_i を決定すると同時に解が $x=0$ の近くまで求まることになる。

以下の (付) に $i=4$ の計算のための 15 元方程式と $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ の計算結果が示してある。そこで $\alpha=2$, $\gamma=1.2$ の場合は計算精度の不足のため結果が出なかったものもある。

-
- 1) A. Sakurai: Basic Developements in Fluid Dynamics I, Academic Press (1965) 309
 - 2) G.G. Back & J.H. Lee: AIAA Journal 7 (1969) 742.

(附1) $i=4$ の方程式

$$\left[(f^{(0)} - x) h^{(0)} f_x^{(0)} + \frac{1}{\gamma} g_x^{(0)} = \frac{\alpha+1}{x} f^{(0)} h^{(0)} \right. \quad (A1)$$

$$h^{(0)} f_x^{(0)} - (x - f^{(0)}) h_x^{(0)} = -\frac{\alpha}{x} f^{(0)} h^{(0)} \quad (A2)$$

$$\left[\gamma g^{(0)} f_x^{(0)} - (x - f^{(0)}) g_x^{(0)} = g^{(0)} \left(\alpha+1 - \frac{\alpha\gamma}{x} f^{(0)} \right) \right. \quad (A3)$$

$$\left[h^{(0)} (f^{(0)} - x) f_x^{(0)} + \frac{1}{\gamma} g_x^{(0)} = - \left(\frac{\alpha+1}{x} + f_x^{(0)} \right) h^{(0)} f^{(0)} \right. \quad (A4)$$

$$+ \left\{ \frac{\alpha+1}{x} f^{(0)} + (x - f^{(0)}) f_x^{(0)} \right\} h^{(0)} + \frac{\alpha+1}{x} \lambda_1 f^{(0)} h^{(0)}$$

$$h^{(0)} f_x^{(0)} - (x - f^{(0)}) h_x^{(0)} = - \left(h_x^{(0)} + \frac{\alpha}{x} h^{(0)} \right) f^{(0)} \quad (A5)$$

$$- \left(f_x^{(0)} + \frac{\alpha}{x} f^{(0)} + \alpha+1 \right) h^{(0)}$$

$$\left[\gamma g^{(0)} f_x^{(0)} - (x - f^{(0)}) g_x^{(0)} = - \left(g_x^{(0)} + \frac{\alpha\gamma}{x} g^{(0)} \right) f^{(0)} \right. \quad (A6)$$

$$- \gamma \left(f_x^{(0)} + \frac{\alpha}{x} f^{(0)} \right) g^{(0)} + (\alpha+1) \lambda_1 g^{(0)}$$

$$\left[h^{(0)} (f^{(0)} - x) f_x^{(0)} + \frac{1}{\gamma} g_x^{(0)} = - \left\{ \frac{\alpha}{x} (\alpha+1) + f_x^{(0)} \right\} h^{(0)} f^{(0)} \right. \quad (A7)$$

$$+ \left\{ \frac{\alpha+1}{x} f^{(0)} + (x - f^{(0)}) f_x^{(0)} \right\} h^{(0)} + \frac{\alpha+1}{x} \lambda_2 f^{(0)} h^{(0)}$$

$$- \frac{\alpha+1}{x} f^{(0)} h^{(0)} + \frac{\alpha+1}{x} (-f^{(0)} h^{(0)} + f^{(0)} h^{(0)}) \lambda_1$$

$$- \left\{ f^{(0)} h^{(0)} - (x - f^{(0)}) h^{(0)} \right\} f_x^{(0)} - f^{(0)} h^{(0)} f_x^{(0)}$$

$$h^{(0)} f_x^{(0)} - (x - f^{(0)}) h_x^{(0)} = - \left(h_x^{(0)} + \frac{\alpha}{x} h^{(0)} \right) f^{(0)} - \left\{ f_x^{(0)} + \frac{\alpha}{x} f^{(0)} \right.$$

$$\left. + x(\alpha+1) \right\} h^{(0)} - (\alpha+1) \lambda_1 h^{(0)} - h^{(0)} f_x^{(0)} - f^{(0)} h_x^{(0)} - \frac{\alpha}{x} h^{(0)} f^{(0)} \quad (A8)$$

$$\begin{aligned}
 \tau g^{(n)} f_x^{(n)} - (x - f^{(n)}) g_x^{(n)} &= - \left(g_x^{(n)} + \frac{\alpha \tau}{x} g^{(n)} \right) f^{(n)} \\
 &- \tau \left(f_x^{(n)} + \frac{\alpha}{x} f^{(n)} + \frac{\alpha+1}{\tau} \right) g^{(n)} + (\alpha+1) \lambda_2 g^{(n)} \\
 &- \frac{\alpha \tau}{x} g^{(n)} f^{(n)} - \tau g^{(n)} f_x^{(n)} - f^{(n)} g_x^{(n)}
 \end{aligned} \quad (A9)$$

$$\begin{aligned}
 h^{(n)} (f^{(n)} - x) f_x^{(n)} + \frac{1}{\tau} g_x^{(n)} &= - \left\{ \frac{5}{x} (\alpha+1) + f_x^{(n)} \right\} h^{(n)} f^{(n)} \\
 &+ \left\{ \frac{\alpha+1}{x} f^{(n)} + (x - f^{(n)}) f_x^{(n)} \right\} h^{(n)} + \frac{\alpha+1}{x} \lambda_3 f^{(n)} h^{(n)} \\
 &+ \frac{\alpha+1}{x} \left\{ (f^{(n)} h^{(n)} - f^{(n)} h^{(n)}) \lambda_2 + (f^{(n)} h^{(n)} - f^{(n)} h^{(n)} - 3 f^{(n)} h^{(n)}) \lambda_1 \right\} \\
 &- \left\{ f^{(n)} h^{(n)} - (x - f^{(n)}) h^{(n)} \right\} f_x^{(n)} - \left\{ f^{(n)} h^{(n)} - (x - f^{(n)}) h^{(n)} + f^{(n)} h^{(n)} \right\} f_x^{(n)} \\
 &- (f^{(n)} h^{(n)} + f^{(n)} h^{(n)}) f_x^{(n)} - \frac{\alpha+1}{x} f^{(n)} h^{(n)} - \frac{3}{x} (\alpha+1) f^{(n)} h^{(n)}
 \end{aligned} \quad (A10)$$

$$\begin{aligned}
 h^{(n)} f_x^{(n)} - (x - f^{(n)}) h_x^{(n)} &= - \left(h_x^{(n)} + \frac{\alpha}{x} h^{(n)} \right) f^{(n)} - \left\{ f_x^{(n)} + \frac{\alpha}{x} f^{(n)} \right\} \\
 &+ 3 (\alpha+1) \left\{ h^{(n)} - (\alpha+1) (h^{(n)} \lambda_2 + x h^{(n)} \lambda_1) \right\} - h^{(n)} f_x^{(n)} \\
 &- h^{(n)} f_x^{(n)} - f^{(n)} h_x^{(n)} - f^{(n)} h_x^{(n)} - \frac{\alpha}{x} (f^{(n)} h^{(n)} + f^{(n)} h^{(n)})
 \end{aligned} \quad (A11)$$

$$\begin{aligned}
 \tau g^{(n)} f_x^{(n)} - (x - f^{(n)}) g_x^{(n)} &= - \left\{ g_x^{(n)} + \frac{\alpha \tau}{x} g^{(n)} \right\} f^{(n)} \\
 &- \tau \left\{ f_x^{(n)} + \frac{\alpha}{x} f^{(n)} + \frac{x(\alpha+1)}{\tau} \right\} g^{(n)} + (\alpha+1) g^{(n)} \lambda_3 \\
 &- \tau \left(f_x^{(n)} + \frac{\alpha}{x} f^{(n)} \right) g^{(n)} - \tau \left(f_x^{(n)} + \frac{\alpha}{x} f^{(n)} + \frac{\alpha+1}{\tau} \lambda_1 \right) g^{(n)} \\
 &- f^{(n)} g_x^{(n)} - f^{(n)} g_x^{(n)}
 \end{aligned} \quad (A12)$$

$$\begin{aligned}
& h^{(0)}(f^{(0)}-x)f_x^{(0)} + \frac{1}{\gamma} g_x^{(0)} = - \left\{ \frac{\gamma}{x}(\alpha+1) + f_x^{(0)} \right\} h^{(0)} f^{(0)} \\
& + \left\{ \frac{\alpha+1}{x} f^{(0)} - (f^{(0)}-x)f_x^{(0)} \right\} h^{(0)} + \frac{\alpha+1}{x} f^{(0)} h^{(0)} \lambda_4 \\
& - \left(\frac{\alpha+1}{x} \lambda_2 + f_x^{(0)} \right) h^{(0)} f^{(1)} + \frac{\alpha+1}{x} (h^{(0)} f^{(0)} - h^{(0)} f^{(1)}) \lambda_3 \\
& + \frac{\alpha+1}{x} (h^{(0)} f^{(1)} - 3h^{(0)} f^{(2)}) \lambda_2 + \frac{\alpha+1}{x} (h^{(0)} f^{(1)} - h^{(0)} f^{(2)}) \\
& - 3h^{(0)} f^{(2)} - 5h^{(0)} f^{(3)}) \lambda_1 - \frac{\alpha+1}{x} (h^{(0)} f^{(1)} + 3h^{(0)} f^{(2)} + 5h^{(0)} f^{(3)}) \\
& - (h^{(0)} f^{(1)} + h^{(2)} f^{(2)} + h^{(1)} f^{(2)}) f_x^{(0)} \\
& - \left\{ (f^{(0)}-x)h^{(2)} + h^{(2)} f^{(1)} + h^{(1)} f^{(2)} + h^{(0)} f^{(3)} \right\} f_x^{(1)} \\
& - \left\{ (f^{(0)}-x)h^{(2)} + h^{(0)} f^{(2)} \right\} f_x^{(2)} - \left\{ (f^{(0)}-x)h^{(1)} + h^{(0)} f^{(1)} \right\} f_x^{(3)}
\end{aligned} \tag{A13}$$

$$\begin{aligned}
& h^{(0)} f_x^{(0)} - (x-f^{(0)}) h_x^{(0)} = - (h_x^{(0)} + \frac{\alpha}{x} h^{(0)}) f^{(0)} \\
& - (h_x^{(1)} + \frac{\alpha}{x} h^{(1)}) f^{(2)} - (h_x^{(2)} + \frac{\alpha}{x} h^{(2)}) f^{(2)} - (h_x^{(0)} + \frac{\alpha}{x} h^{(0)}) f^{(1)} \\
& - \left\{ f_x^{(0)} + \frac{\alpha}{x} f^{(0)} + x(\alpha+1) \right\} h^{(0)} - \left\{ f_x^{(1)} + 3(\alpha+1) \lambda_1 \right\} h^{(0)} \\
& - \left\{ f_x^{(2)} + x(\alpha+1) \lambda_2 \right\} h^{(0)} - \left\{ f_x^{(0)} + (\alpha+1) \lambda_3 \right\} h^{(0)}
\end{aligned} \tag{A14}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma g^{(0)} f_x^{(0)} - (x-f^{(0)}) g_x^{(0)} = - (g_x^{(0)} + \frac{\alpha\gamma}{x} g^{(0)}) f^{(0)} \\
& - \gamma \left\{ f_x^{(0)} + \frac{\alpha}{x} f^{(0)} + \frac{3(\alpha+1)}{\gamma} \right\} g^{(0)} - \gamma \left\{ f_x^{(1)} + \frac{\alpha}{x} f^{(1)} \right. \\
& + \frac{x(\alpha+1) \lambda_1}{\gamma} \left. \right\} g^{(0)} - \gamma \left\{ f_x^{(2)} + \frac{\alpha}{x} f^{(2)} + \frac{(\alpha+1) \lambda_2}{\gamma} \right\} g^{(0)} \\
& - \gamma \left(f_x^{(0)} + \frac{\alpha}{x} f^{(0)} \right) g^{(1)} + (\alpha+1) g^{(0)} \lambda_4 - f^{(0)} g_x^{(2)} - f^{(2)} g_x^{(0)} - f^{(0)} g_x^{(1)}
\end{aligned} \tag{A15}$$

(付 2) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ の計算値

α	σ	λ_1	λ_2
0	1.2	-2.2442308530503970 Q+00	3.4564683964561380 Q+00
	1.4	-2.1437700653773060 Q+00	2.7221028299593660 Q+00
	1.67	-2.0686906527673010 Q+00	2.2732415035195760 Q+00
1	1.2	-2.0423854156179400 Q+00	2.5499151501268420 Q+00
	1.4	-1.9835631599572110 Q+00	2.1016031889128730 Q+00
	1.67	-1.9374332774541770 Q+00	1.8086491784128960 Q+00
2	1.2	-1.9665644515181170 Q+00	2.2672147750430060 Q+00
	1.4	-1.9181543431493730 Q+00	1.8997950898808980 Q+00
	1.67	-1.8785212257677740 Q+00	1.6498428416281740 Q+00

α	σ	λ_3
0	1.2	-7.3818170703124990 Q+00
	1.4	-4.1620569256591800 Q+00
	1.67	-2.6939388964843750 Q+00
1	1.2	-4.9557340409278870 Q+00
	1.4	-2.9746408536314950 Q+00
	1.67	-1.9914195486940150 Q+00
2	1.2	-4.22443826403064013988034092977840 Q+00
	1.4	-2.5998920246215970 Q+00
	1.67	-1.7628672472451570 Q+00

α	σ	λ_4
0	1.2	1.9833198189735413 Q+01
	1.4	7.4358017444610596 Q+00
	1.67	3.5221500396728516 Q+00
1	1.2	1.28013690965443527325362538249464 Q+01
	1.4	5.2164118436630815 Q+00
	1.67	2.5920618039162946 Q+00
2	1.2	—————
	1.4	4.51333719374365974208451746108039 Q+00
	1.67	2.2821958264822513 Q+00