

熱流の不安定性と熱音響現象

Instability of Heat Flow and Thermoacoustic Phenomena

阪大院 基礎工 杉 本 信 正

Nobumasa SUGIMOTO

Graduate School of Engineering Science, Osaka University

概要

熱音響現象とは熱的な要因で発生する音に関連した様々な現象である。その中で、ここで述べるのは温度勾配のある固体壁に接した気体の粘性や熱伝導性の拡散的作用により、攪乱が不安定化する結果出現する振動や波動現象である。簡単のため、温度勾配のある平行平板間のチャンネルに挟まれた気体を考える。温度勾配は平板に沿って両面で同じ勾配を課し、現象は平面内で起きるものとする。重力を無視すると、気体が静止しているならば圧力はチャンネル内で一様である。チャンネルの幅（高さ）が温度勾配の代表長さに比して小さいと仮定すると、気体の温度は壁の温度に等しいと近似できる。

静止気体は力学的には平衡状態にあるが、平板（固体）内のみならず気体中にもチャンネル方向の温度勾配に沿って熱流が定常的に流れるため、熱的には非平衡な状態におかれている。そこに熱流や気体に何らかの攪乱が加わったとする。運動方程式だけを考えると、流れがなく粘性があるので攪乱は安定に振る舞うと考えられるが、一方、エネルギー式では背後に流れる定常的な熱流が攪乱にどのような影響を与えるかは即断できない。もちろん、攪乱は熱伝導性によって拡散するけれども、背後の熱流からエネルギーをもらい不安定化する可能性も、物質流れの安定性との類推から予想される。もし不安定化すれば、温度の攪乱は圧力や密度の攪乱を誘起し、それが運動方程式や連続の式を通して気体の変動を引き起こす可能性がある。

攪乱が初期に局所的であっても、音によってそれは気体全体に即座に拡がり、その周波数がチャンネル内の気体の固有振動数に近い場合には攪乱は成長し、不安定化が促進される。こうして出現する気体の振動や波動がここで述べる熱音響現象である。このように考えると、物質流れの安定性と同じように、熱流の安定性が議論できる。

流れの安定性の線形解析は、約 1 世紀前にオア (Orr) とゾンマーフェルト (Sommerfeld) によって独立に導かれた方程式を基礎に研究し尽くされている。これに対して、熱流の安定性という見方はこれまでなかったが、オア・ゾンマーフェルト方程式に相当する方程式は、約 40 年前にロット (Rott) によって導かれている。チャンネル幅が温度勾配の代表長さより小さいとする細管近似の下、ロットは以下の方程式を導いた：

$$\omega^2[1 + (\gamma - 1)f^*]P + \frac{d}{dx} \left[a_e^2(1 - f) \frac{dP}{dx} \right] - \frac{a_e^2}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \left(\frac{f^* - f}{1 - \text{Pr}} \right) \frac{dP}{dx} = 0. \quad (1)$$

ここで、 x をチャンネル方向の座標として、 $P(x)$ は圧力攪乱 $p' [= P(x) \exp(i\omega t)]$ の複素振幅であり、 ω は角振動数、 $T_e(x)$ は平板および静止気体の局所温度、 $a_e(x)$ は局所断熱音速 $\sqrt{\gamma R T_e}$ である。ただし、 R は気体定数であり、 γ は比熱比である。方程式に含まれる f は温度により決まる x の関数であり、 η をチャンネル幅 H と気体の動粘性率 ν_e で $(i\omega/\nu_e)^{1/2}H$ とすると、 $f = \tanh \eta/\eta$ によって与えられる。また、 f^* は、プラントル数を Pr とすると、 $f(\sqrt{\text{Pr}}\eta)$ である。

微分方程式 (1) は温度分布 T_e を与えると係数がその関数として決まり、 x の二箇所で同次の境界条件を課すと、 ω に対する固有値問題が設定される。角周波数 ω は一般には複素数になり、虚部がゼロになる場合が臨界状態を与える。この条件は高温部と低温部との温度比と、チャンネル幅に対する拡散層厚さの比によって与えられるが、これを解析的に求めることは極めて難しい。そこで式 (1) をシューティング法で数値的に解くことが行われる。この方法により、色々な条件下での臨界条件を得ることができる。

固有値問題の解析とは別に、気体中の圧力波の伝播について考える。ロットの方程式が導かれたのと同じ細管近似の下、時間変化を単一のフーリエ成分だけに制限することなく任意の微小攪乱の振る舞いを調べる。細管近似をすると圧力は断面内で一様と見なせるので、超過圧 p' は x と時間 t だけの関数になる。この p' を支配する波動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_e^2 \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{a_e^2 \sqrt{\nu_e}}{H} \mathcal{M} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \right] + \frac{\gamma - 1}{\sqrt{\text{Pr}}} \frac{\sqrt{\nu_e}}{H} \mathcal{M}_P \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} \right) \\ - \frac{a_e^2}{T_e} \frac{dT_e}{dx} \frac{\sqrt{\nu_e}}{H} \left[\frac{1}{1 - \text{Pr}} \mathcal{M} \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) - \frac{1}{(1 - \text{Pr})\sqrt{\text{Pr}}} \mathcal{M}_P \left(\frac{\partial p'}{\partial x} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

となる。ここで、 $\mathcal{M}_P[\phi]$ は次式で与えられる関数 $\phi(x, t)$ の汎関数

$$\mathcal{M}_P[\phi(x, t)] \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^t \frac{G[\nu_e(t - \tau)/\text{Pr}H^2]}{\sqrt{t - \tau}} \phi(x, \tau) d\tau, \quad (3)$$

であり、積分核であり緩和関数でもある $G(t)/\sqrt{\pi t}$ は次式で定義される：

$$\frac{G(t)}{\sqrt{\pi t}} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \exp \left(-\frac{n^2}{t} \right) \right]. \quad (4)$$

また、 $\mathcal{M}[\phi]$ は $\mathcal{M}_P[\phi]$ で Pr を形式的に 1 とおいた汎関数である。熱音響波動方程式 (2) において単一の時間フーリエ成分を考えると、当然ロットの式に帰着する。方程式 (2) の利点は、ロットの式では取り扱えない初期値問題の解析を可能にする点である。なお、初期条件を与えるとときには積分の下限をゼロにとる。

初期値問題においては、経過時間 t によって方程式 (2) は近似できる。これは、 t と代表拡散時間 H^2/ν_e との比で定義されるデボラ数 $\text{De} (= H^2/\nu_e t)$ の大小によって決まる。短時間の振る舞いは、実質的には拡散層が薄いと近似した境界層理論の波動方程式に、一方長時間の振る舞いは、(3) で与えられる履歴が消えた拡散・波動方程式によって記述できる。こうした近似方程式を用いると、時間により変化する現象の理解が容易になる。また臨界条件も比較的容易に解析的に求めることが出来る。この例は、次ページからの「拡散層厚さに応じた近似理論によるループ管路内の熱音響振動の解析」と題する報告をご覧頂きたい。

熱流の不安定により攪乱が成長するにつれ、波としての、また渦の生成による非線形性が線形的な成長を抑えるように働き、この結果有限振幅の振動が出現する。実際に観測される熱音響振動・波動はこれらがバランスした非線形の領域にある。非線形領域での振る舞いについては理論的にはあまり手が付けられておらず、未知なことが多い。現在、熱音響現象を利用した熱機関が考案されているが、実用化には出力や効率はまだ低い。新しいブレークスルーには非線形現象の解明が不可欠である。詳細については日本流体力学会誌「ながれ」に発表予定である。