

多重ゼータ値と超幾何関数の接続公式

近畿大・理工 青木貴史 (AOKI Takashi)

近畿大・理工 大野泰生 (OHNO Yasuo)

多重ゼータ値の歴史はオイラー [3] にまで遡るが、多くの数学者の注目を集め出したのは比較的最近である。ここ十数年の間に、多重ゼータ値は、数論は勿論のこと、結び目の量子不変量、場の量子論等、様々な分野で登場し、その結果、異分野同士の思わぬ関係が多重ゼータ値を要として見出され、それが新たな興味を引き起こしつつある。ここでは、超幾何関数の接続公式から導かれる、多重ゼータ値の間に成立する線型関係式の新しい族について紹介する。

次のような微分方程式の初等的問題を考える。

問題 x, z をパラメータとする 2 階非斉次微分方程式

$$t^2(1-t) \frac{d^2\Phi_0}{dt^2} + t\left((1-t)(1-x) - x\right) \frac{d\Phi_0}{dt} + (x^2 - z^2) \Phi_0 = t \quad (1)$$

の原点における正則解 (ベキ級数解)

$$\Phi_0(t) = \Phi_0(x, z; t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$$

は一意的に定まる。この解 $\Phi_0(t)$ の $t=1$ における値 (が存在すると仮定して) $\Phi_0(1)$ を求めよ。

これに答えるためには、まず $\Phi_0(t)$ を求めなければならない。微分方程式の知識が多少あれば、 $\Phi_0(t)$ の求め方としては、すぐに次の 2 つの方法を思いつく：

- (1) 定数変化法を用いる。
- (2) 未定係数法により $\Phi_0(t)$ の展開係数 a_n を定める。

実は、これらの方法以外に、もう一つ $\Phi_0(t)$ を作る方法がある。

- (3) 多重ゼータ値を用いて構成された母関数 $\Phi_0(t)$ が、微分方程式 (1) を満たす。
- (2), (3) を比較することにより、(等号付き) 多重ゼータ値の新しい関係式が得られる。高さ $s \geq 1$, 重さ $k \geq 2s$ の許容的インデックスの全体を $I_0(k, s)$ で表す。

定理 2 [1] $s \geq 1, k \geq 2s$ を満たす、すべての自然数 s, k に対して次の等式が成り立つ：

$$\sum_{k \in I_0(k, s)} \zeta^*(k) = 2 \binom{k-1}{2s-1} (1 - 2^{1-k}) \zeta(k). \quad (2)$$

証明の方針を述べる前に、記号の説明をする必要がある。多重インデックス $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ ($k_i \in \mathbb{Z}$, $k_i > 0$) は $k_1 \geq 2$ であるとき許容的 (admissible) または収束インデックスであると呼ばれる。許容的多重インデックス $\mathbf{k}$ に対して多重ゼータ値 $\zeta^*(\mathbf{k})$ を次のように定義する：

$$\zeta^*(\mathbf{k}) = \zeta^*(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}}.$$

通常、多重ゼータの文献で多く見られる定義とは若干異なり、和を取る条件に等号が入っていることに注意しておくが、詳細は参考文献を参照されたい。

証明の方針 インデックス $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ と不定元 t に対して

$$L_{\mathbf{k}}^*(t) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 1} \frac{t^{m_1}}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}} \quad (|t| < 1).$$

とおくと、明らかに $L_{\mathbf{k}}^*(1) = \zeta^*(\mathbf{k})$ である。さらに

$$X_0(k, s; t) = \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, s)} L_{\mathbf{k}}^*(t)$$

とおけば、 $X_0(k, s; 1)$ は定理の式の左辺である。不定元 x, z に対して

$$\Phi_0(t) = \sum_{k, s \geq 0} X_0(k, s; t) x^{k-2s} z^{2s-2}$$

により $\Phi_0(t)$ を定めると、これは (1) の原点におけるベキ級数解になっていることがわかる。従って $\Phi_0(1)$ を x, z について展開して $x^{k-2s} z^{2s-2}$ の係数を見れば、定理の左辺が得られる。

一方、(2) に従って計算すれば $\Phi_0(t)$ の t^n の係数 a_n ($n \geq 1$) は次の形に求まる：

$$a_n = \frac{\Gamma(n)\Gamma(n-x)\Gamma(1-x-z)\Gamma(1-x+z)}{\Gamma(1-x)\Gamma(1-x-z+n)\Gamma(1-x+z+n)}.$$

ここに $\Gamma(z)$ はガンマ函数である。従って $\Phi_0(1) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ である。この和を計算するために a_n を次の形に変形する：

$$a_n = \sum_{l=1}^n \left(\frac{A_{n,l}^{(+)}}{x+z-l} + \frac{A_{n,l}^{(-)}}{x-z-l} \right)$$

ただし、

$$A_{n,l}^{(\pm)} = (-1)^l \binom{n-1}{l-1} \frac{(\pm z - l + 1)(\pm z - l + 2) \dots (\pm z - l + n - 1)}{(\pm 2z - l + 1)(\pm 2z - l + 2) \dots (\pm 2z - l + n)}.$$

である。従って、和の順序を交換すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{l=1}^n \left(\sum_{n=l}^{\infty} A_{n,l}^{(+)} \frac{1}{x+z-l} + \sum_{n=l}^{\infty} A_{n,l}^{(-)} \frac{1}{x-z-l} \right)$$

を得るが、 n に関する $A_{n,l}^{(\pm)}$ の和は次のように求められる:

$$\sum_{n=l}^{\infty} A_{n,l}^{(\pm)} = (-1)^l \frac{(\pm z - l + 1)(\pm z - l + 2) \cdots (\pm z - 1)}{(\pm 2z - l + 1)(\pm 2z - l + 2) \cdots (\pm 2z)} F(l, \pm z, \pm 2z + 1, 1).$$

ここに $F(\alpha, \beta, \gamma; t)$ はガウスの超幾何級数である。ガウスの公式

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}$$

により

$$\sum_{n=l}^{\infty} A_{n,l}^{(\pm)} = \pm \frac{(-1)^l}{z}$$

となる。よって

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{z} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{1}{x+z-l} - \frac{1}{x-z-l} \right).$$

を得るが、右辺を x と z に関して展開し $x^{k-2s} z^{2s-2}$ の係数を見ると

$$2 \binom{k-1}{2s-1} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l^k}$$

となっているが、 $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l^k} = (1 - 2^{1-k})\zeta(k)$ を用いて書き直すと定理の式 (2) の右辺を得る。

さて、上述の方法 (1)、すなわち定数変化法を用いて解いてみればどうなるか。齊次方程式の解の基本系は、超幾何函数を用いて書き下すことができる。それを用いて定数変化法を実行し、得られた解に $t = 1$ を代入した式を接続公式により変形すると、定理 2 と同等な式として次の定理を得る:

定理 3 パラメータについての適当な条件の下に、次の式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} \int_0^1 (1-t)^{z-x} F(1-x+z, 1+z, 2-x; t) dt \\ = \frac{1}{z} \sum_{l=1}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{1}{x+z-l} - \frac{1}{x-z-l} \right). \end{aligned}$$

参考文献

- [1] T. Aoki and Y. Ohno, Sum relations for multiple zeta values and connection formulas for the Gauss hypergeometric functions, preprint (arXiv.org:math.NT/0307264).
- [2] T. Arakawa and M. Kaneko (荒川恒男, 金子昌信), 多重ゼータ値および多重L値ノート, www.math.kyushu-u.ac.jp/~mkaneko/mzv-lecnote.pdf
- [3] L. Euler, Meditationes circa singulare serierum genus, Novi Comm. Acad. Sci. Petropol bf 20 (1775), 140-186, reprinted in Opera Omnia ser. I, vol. 15, B. G. Teubner, Berlin (1927), 217-267.
- [4] M. Hoffman and Y. Ohno, Relations of multiple zeta values and their algebraic expression, *J. Algebra*, **262** (2003), 332-347.
- [5] M. Kaneko (金子昌信), 多重ゼータ値, 数学 **54** (2002), 404-415.
- [6] Y. Kombu (昆布康博), 多重ゼータ値の和公式と超幾何微分方程式, 近畿大学大学院修士論文 (2003).
- [7] T. Q. T. Le and J. Murakami, Kontsevich's integral for the Homfly polynomial and relations between values of multiple zeta functions, *Topology and its Applications*, **62** (1995), 193-206.
- [8] Y. Ohno, A generalization of the duality and sum formulas on the multiple zeta values. *J. Number Theory*, **74** (1999), 39-43.
- [9] Y. Ohno and D. Zagier, Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height, *Indag. Math.*, **12** (2001), 483-487.
- [10] J. Okuda and K. Ueno, Relations for multiple zeta values and Mellin transforms of multiple polylogarithms. preprint (arXiv.org:math.NT/0301277).
- [11] T. Terasoma, Mixed Tate motives and multiple zeta values, *Invent. Math.*, **149** (2002), 339-369.
- [12] D. Zagier, Values of zeta functions and their applications. In Proceedings of ECM 1992, *Progress in Math.*, **120** (1994), 497-512.