

修士論文 (2004年度)

2 レーン TASEP モデルにおけるキンの同期

京都大学 理学研究科 光藤 哲也¹

概要

Asymmetric Simple Exclusion Process(ASEP) は、輸送現象を記述するモデルとして知られ、1次元において厳密に解ける。さらに、一次元で両端に開放境界条件を課した場合、粒子の出入りする割合に対して相図が書ける。なかでも、低密度相と高密度相の相境界で渋滞の界面(キンク)の拡散が定常的に見られる領域があり、そこでは、キンクがブラウン運動をしているように見える。そしてそのパワースペクトルは角振動数のべき乗 $\omega^{-3/2}$ に比例する。

我々は開放境界 ASEP を2レーンに拡張してその性質を調べてみた。まず、一次元で厳密解を求めるのに使われた Matrix Product Ansatz を用いて定常解を求めて、あるパラメーター領域についての解が求まることがわかった。

また、我々は2レーンの場合のキンの運動についても調べた。我々は、キンの位置を決めるためにレーン毎の総粒子数に着目し、2点関数を1点関数で近似するという平均場近似を行って、解析を試みた。その結果、レーンチェンジの割合が非等方な場合、レーン毎の粒子数に差が残るものの、界面は一致することがわかった。この解析結果は、モンテカルロシミュレーションの結果と一致した。また、2レーンモデルでのキンの運動での平均場近似の妥当性をシミュレーション結果と比較した。

目次

1 導入	424
2 1レーン ASEP モデル	426
2.1 ASEP の定式化	426
2.1.1 マスター方程式	426
2.1.2 ブラケットを用いた定式化	430
2.2 連続極限	432
2.3 開放境界条件 TASEP	433
2.3.1 Matrix Product Ansatz	434
2.3.2 キンの運動	435
2.3.3 固有値分布	436

¹E-mail: mitsudo@scphys.kyoto-u.ac.jp

3	2 レーンモデル	438
3.1	モデルの導入	438
3.2	行列積仮説による厳密解	439
3.3	キンクの運動	441
3.3.1	キンクの拡散	442
3.3.2	キンクの位置	442
3.3.3	平均場解析	443
3.3.4	近似の妥当性	445
3.3.5	議論	449
4	今後の課題	449
5	結論	450
A	計算補足	451
A.1	1次元閉塞境界条件下でのブラウン運動するキンクのパワースペクトル	451
A.2	$\sum_{j=1}^L \langle \tau_{j,1} \rangle (1 - \langle \tau_{j,2} \rangle)$ の計算	452
A.3	$\langle N_R \rangle$ の計算	453
B	driven lattice gas	454

1 導入

排他的相互作用をもつ粒子系は古くから研究がなされてきた。近年、平衡から離れた系である粉体や交通流などの排他相互作用をする多体系について注目が集まり、インターネットでのデータパケットの転送もそのような粒子系として捉えられることができるため、排他相互作用のある粒子系に新たな注目が集まるようになっている。また、平衡から離れた系での統計力学についても、興味が集まっている。

そのような排他相互作用をもつ粒子系を記述するシンプルなモデルの一つに Asymmetric Simple Exclusion Process(ASEP) がある。ASEP とは、格子上で粒子が排他相互作用をしながらブラウン運動をしているモデルである (図 1)。つまり、粒子は、ある割合で隣り合う空いているサイトに移動し、移る先のサイトに粒子がある場合は粒子は移動しない、というルールに従う。

ASEP では非平衡定常状態の厳密解が求まる [1, 2, 3, 4]。近年研究が進み、様々な境界条件の元での定常解や周期 (periodic) 境界の元での非定常解なども求まっている。周期境界条件については、定常解を求めるのは難しくない。閉塞 (closed) 境界条件については、定常解が [5] で求まっている。粒子が一方方向にしか進まない Totally ASEP(TASEP) で、開放 (open) 境界条件での定常解を行列積仮説 (Matrix Product Ansatz 略して MPA) を用いて求めたのが [6] である。さらに、MPA を用いて開放境界 ASEP の定常解が [7, 8] で求まっている。また、バルク領域でマスター方

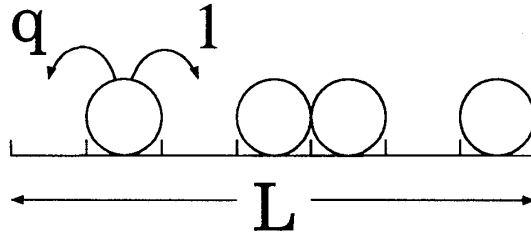


図 1: ASEP の模式図

程式が完全に解かれ [9]、周期境界にその手法が応用されている [10]。これらは連続時間のモデルであるが、離散時間発展のモデルについても調べられている [11, 12, 13, 14, 15]。また、様々な拡張モデルが議論されている。なかでも 2 種類の粒子のあるモデルが最近注目を集めている [16]。

開放境界条件 ASEP は境界での粒子の出入りする割合によって相図が書ける。バルクの密度によって大まかに三つの相に別けられるが、さらに詳しくわけることもしける [17]。その三つの相は、低密度相、高密度相、最大流量相と呼ばれる。また、低密度相と高密度相との相境界の領域において、低密度の領域と高密度の領域との境界が安定に存在し、そのキンクがブラウン運動をしていることが知られている [18, 19, 20, 21, 22]。

ASEP のカレント (流量) の他時刻自己相関関数が、ランダム行列 [23] との関連から [24, 25] において求められている。また、多核型核成長モデル PNG が ASEP と対応がつけられ、PNG における高さの他時刻自己相関関数がランダム行列理論で現れる分布関数になることが知られている [25, 26, 27]。

ASEP は確率過程の 1 モデルとして数学的研究がなされている [4, 28, 29]。文献 [29] には、Zero Range Process (ZRP) および ASEP とそれらの関係についても書かれてある。ZRP とは ASEP と同じく格子上で粒子がブラウン運動をするが、各サイトに無限個の粒子が存在できて、粒子が移動する割合が粒子がいるサイトでの粒子数に依存するようなモデルである。さらに ASEP は、Appendix で見るように、最近接サイトにのみ移動する排他相互作用のある格子ガスモデルと等しい。

また、ASEP は交通流のモデルとも関連がある [30]。TASEP は、セルラーオートマトン (CA) のルール 184 の時間発展に確率をいれたモデルになっている。ルール 184 は、交通流のモデルである Nagel-Schreckenberg モデルの最高速度が $v_{max} = 1$ である場合に対応している。ルール 184 は逆超離散化法によって非粘性 Burgers 方程式にマップできる [31]。Burgers 方程式は、衝撃波を記述する方程式として知られ、非線形波動の基本的な方程式である [32]。

また ASEP は非対称でない場合は Heisenberg の XXZ 鎖に帰着できる。その関連で密度行列繰り込み群を使ったアプローチもなされている [33]。

さて、ASEP では、これまでは一次元のモデルについての研究がほとんどである。しかし、多次元に拡張したモデルを研究することは、非常に重要なことである。そこで、我々は多次元への拡張の最も簡単な場合である 2 レーンモデルの性質を調べることにした。TASEP の 2 レーンモデ

ルには様々なものがある。周期境界条件の2レーンモデルについては[34]で詳細に調べられており、境界のない場合について調べたのは[35]である。開放境界条件については、ある位置 x における1レーン目と2レーン目のサイトの二つのサイトからなるクラスターを使って定常解などが[36]において調べられている。これらのモデルではレーンチェンジのルールがそれぞれ異なっている。レーンチェンジをするときに、前を参照する場合[34]、前とその隣を参照する場合と[35]、前を参照しない場合[36]とがある。[37]では、レーンチェンジはしないが、各粒子が移動する割合が隣のレーンに依存するというので、2レーンモデルになっている。

我々は、レーンチェンジの割合を非対称にとることができる2レーンTASEPモデルを導入し、その定常解の性質を調べ、さらに、キンクの運動の様子も調べた。

本論文は、まず2章において、1次元ASEPについてどのように定式化されるかを述べる。また、厳密解を得る方法のMPAについて述べる。3章においては、2レーンモデルを導入し、その定常解について述べる。また、キンクの運動について論じる。4章において議論を述べる。また5章で結論を述べる。

2 1レーンASEPモデル

本章では、純粋に一次元系である1レーンASEPモデルについての紹介と簡単なレビューを行う。なお、2.4.2節の内容は文献[22, 38]に基づいている。

2.1 ASEPの定式化

2.1.1 マスター方程式

格子ガスとは、格子上をランダムに動く粒子の多体系である[2, 3]。中でも、粒子が右隣に移る確率と左隣に移る確率とが異なっていて、粒子同士が排他相互作用をしているものは、ASEPと呼ばれる確率過程と同じである。排他相互作用とは、ある粒子が移動しようとした先に粒子があれば、その粒子は動かないことを指す。また、移動先が空いていれば粒子は移動する。

一次元ASEPは次のように定式化される。 j 番目のサイトでの粒子の有無を τ_j で表し、 $\tau_j = 1$ なら粒子が存在し、 $\tau_j = 0$ なら粒子が存在しないことを表す。 $P(\tau_1, \dots, \tau_L)$ を系が $\tau_1, \dots, \tau_L$ にある確率であると定義する。 $L = 1$ だと、 $P(0)$ は粒子がサイト1にない確率、 $P(1)$ は粒子がサイト1にある確率を表す。 $L = 2$ だと、 $P(0, 0)$ は粒子がサイト1と2にない確率、 $P(0, 1)$ は粒子がサイト1になくてサイト2にある確率、 $P(1, 0)$ は粒子がサイト1にあってサイト2にない確率、 $P(1, 1)$ は粒子がサイト1と2にある確率を表す。粒子は各サイト独立に存在するので、各サイト毎に独立に粒子の存在確率が決まる。よって、 $L = 2$ のときに粒子がサイト1にある確率は、 $P(1, 0) + P(1, 1)$ で表される。 j 番目のサイトの密度 ρ_j は、 $\rho_j \equiv \sum_{\tau_1 \dots \tau_L} \tau_j P(\tau_1, \dots, \tau_L)$ で定義され、カレント J_j は $J_j \equiv \sum_{\tau_1 \dots \tau_L} \tau_j (1 - \tau_{j+1}) P(\tau_1, \dots, \tau_L)$ で定義される。

ASEP の時間発展ルールは、移動先が空いている場合粒子は単位時間当たり割合 q で左に移り、割合 1 で右に移る。本論文では一貫して平均粒子流が左から右へと流れるものとするので、 $0 \leq q \leq 1$ である。

系を完全に決めるには、境界条件を設ける必要がある。境界条件には、周期境界条件、閉塞境界条件、開放境界条件の三種類が考えられる。それぞれの境界条件に対する解の違いを簡単のため $L = 2$ の場合について求めてみる。平衡系との違いは、周期境界条件の解と閉塞境界条件の解が異なり、 $q \rightarrow 1$ の極限で等しくなる点である。また、 $q = 1$ でも、境界で出入りする割合が両端で異なると、解の様子も違って来る。

周期境界条件では、粒子の存在確率の時間発展は連続時間の場合、次のようになる。時刻 t での $P(\tau_1, \tau_2)$ の値を $P(\tau_1, \tau_2; t)$ として、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} P(0, 0; t) &= 0 \\ \frac{d}{dt} P(0, 1; t) &= -(1+q)P(0, 1; t) + (1+q)P(1, 0; t) \\ \frac{d}{dt} P(1, 0; t) &= (1+q)P(0, 1; t) - (1+q)P(1, 0; t) \\ \frac{d}{dt} P(1, 1; t) &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

となる。離散時間だと、時間発展は時間ステップを Δt として、

$$\begin{aligned} P(0, 0; t + \Delta t) &= P(0, 0; t) \\ P(0, 1; t + \Delta t) &= (1 - (1+q)\Delta t)P(0, 1; t) + (1+q)\Delta t P(1, 0; t) \\ P(1, 0; t + \Delta t) &= (1+q)\Delta t P(0, 1; t) - (1 - (1+q)\Delta t)P(1, 0; t) \\ P(1, 1; t + \Delta t) &= P(1, 1; t) \end{aligned} \quad (2)$$

と、書ける。 L が大きいときに、これを逐一 $\tau_j = 0, 1$ について書いていたら繁雑になるので、ベクトルを用いるとすっきりと記述が可能になる。実際 (1) 式は、連続時間だと、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} P(0, 0; t) \\ P(0, 1; t) \\ P(1, 0; t) \\ P(1, 1; t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(1+q) & 1+q & 0 \\ 0 & 1+q & -(1+q) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(0, 0; t) \\ P(0, 1; t) \\ P(1, 0; t) \\ P(1, 1; t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

で、(2) 式は離散時間だと

$$\begin{pmatrix} P(0, 0; t + \Delta t) \\ P(0, 1; t + \Delta t) \\ P(1, 0; t + \Delta t) \\ P(1, 1; t + \Delta t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - (1+q)\Delta t & (1+q)\Delta t & 0 \\ 0 & (1+q)\Delta t & 1 - (1+q)\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P(0, 0; t) \\ P(0, 1; t) \\ P(1, 0; t) \\ P(1, 1; t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

と、書き換えられる。さらに、ベクトル

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} P(0, 0; t) \\ P(0, 1; t) \\ P(1, 0; t) \\ P(1, 1; t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

用いると、(3) 式は

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}(t) = h_{1,2}\mathbf{P}(t) \quad (6)$$

となり、(4) 式は

$$\mathbf{P}(t + \Delta t) = T_{1,2}\mathbf{P}(t) \quad (7)$$

と書ける。(6),(7) 式の形に書くと、あとは、遷移率行列の形を変えるだけで他の境界条件の場合も取り扱える。閉塞境界条件の場合は、

$$h_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q & 1 & 0 \\ 0 & q & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - q\Delta t & \Delta t & 0 \\ 0 & q\Delta t & 1 - \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8)$$

となる。開放境界条件の場合は、左端で粒子が入って来る割合を α とし、右端から出て行く割合を β とすると、

$$h_{1,2} = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & -q - \beta - \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & q & -1 & \beta \\ 0 & \alpha & 0 & -\beta \end{pmatrix} \quad (9)$$

$$T_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha\Delta t & \beta\Delta t & 0 & 0 \\ 0 & 1 - (q + \beta + \alpha)\Delta t & \Delta t & 0 \\ \alpha\Delta t & q\Delta t & 1 - \Delta t & \beta\Delta t \\ 0 & \alpha\Delta t & 0 & 1 - \beta\Delta t \end{pmatrix} \quad (10)$$

である。

実は、マスター方程式を解くことは、固有値問題を解くことと等価である。行列 H に対して、

$$H\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p} \quad (11)$$

という、固有値方程式を考える。確率密度ベクトルは固有関数による展開が可能であり、

$$\mathbf{P}(t) = \sum_j e^{\lambda_j t} \mathbf{p}_j \quad (12)$$

と、表現できる。ここで、一般にマルコフ過程の H に対応する λ_j は $\text{Re}\lambda_j \leq 0$ を満たすことが知られている。この H の場合、必ずゼロ固有値が存在する。つまり、長時間後の統計的定常状態を知りたいのなら、 $\lambda_0 = 0$ に対応した固有ベクトルについて調べればよいことになる。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}(t) = \mathbf{p}_0 \quad (13)$$

この $\mathbf{p}_0$ を、定常状態と呼ぶ。また、全ての固有値が求まるなら、系の時間発展までわかったことになる。

これらの定常解は容易に求めることができる。周期境界条件の場合は、初期条件に解が依存する。初期条件が

$$\mathbf{P}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad or \quad \mathbf{P}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

なら

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(0) \quad (15)$$

となり、一方、初期条件が

$$\mathbf{P}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad or \quad \mathbf{P}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

なら

$$\mathbf{P}(\infty) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

である。閉塞境界条件の場合も、初期条件に解が依存する。初期条件が

$$\mathbf{P}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad or \quad \mathbf{P}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (18)$$

なら

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}(0) \quad (19)$$

となり、初期条件が

$$\mathbf{P}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad or \quad \mathbf{P}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (20)$$

なら

$$\mathbf{P}(\infty) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+q} \\ \frac{q}{1+q} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (21)$$

となる。解が(15)(19)式の場合は、初期の状態とまったく変わらないことを示しており、実際、粒子の出入りの無い周期境界と閉塞境界では、系が粒子で埋まっている場合と系に粒子がまったく無い場合とでは時間発展しないことに対応している。

一方、開放境界条件の場合は、初期条件に依らず、定常解が

$$\mathbf{P}(\infty) = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{\alpha} \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 1 + q + \alpha + \beta} \\ \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 1 + q + \alpha + \beta} \\ \frac{q + \alpha + \beta}{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 1 + q + \alpha + \beta} \\ \frac{\alpha}{\beta} \frac{1}{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + 1 + q + \alpha + \beta} \end{pmatrix} \quad (22)$$

となる。

2.1.2 ブラケットを用いた定式化

ASEP のマスター方程式はブラケットを用いて表すこともできる [39]。スピン系のアップダウンが粒子の有無に対応していると考え、粒子が無い状態を $|0\rangle$ で表し、粒子がある状態を $|1\rangle$ で表すと、

$$\langle 0|0\rangle = \langle 1|1\rangle = 1 \quad \langle 0|1\rangle = \langle 1|0\rangle = 0 \quad (23)$$

を満たし、その表現は、

$$|0\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (24)$$

である。 $L = 2$ の場合、系が $\{\tau_1, \tau_2\}$, $\tau_i = 0, 1$ である状態は

$$|\tau_1\rangle \otimes |\tau_2\rangle \quad (25)$$

と書ける。確率密度ベクトルは $|P(t)\rangle$ で、

$$|P(t)\rangle = \sum_{\tau_1, \tau_2} P(\tau_1, \tau_2; t) |\tau_1\rangle \otimes |\tau_2\rangle \quad (26)$$

と、定義される。規格化は

$$\langle s| = (\langle 0| + \langle 1|) \otimes (\langle 0| + \langle 1|) \quad (27)$$

を用いて、

$$\langle s|P(t)\rangle = \sum_{\tau_1, \tau_2} P(\tau_1, \tau_2; t) = 1 \quad (28)$$

と表すことができる。期待値は、スピン行列で構成できる行列 A (もしくはその表現に対応する演算子) を用いて、

$$\langle A \rangle = \langle s|A|P(t)\rangle \quad (29)$$

と、書ける。密度の期待値は、

$$n_1|\tau_1\rangle = \delta_{1,\tau_1}|\tau_1\rangle \quad \langle \tau_1|n_1 = \langle \tau_1|\delta_{1,\tau_1} \quad (30)$$

となる演算子 n_1 を用いて、

$$\begin{aligned}
\langle n_1 \rangle &= \langle s | \tau_1 | P(t) \rangle \\
&= (\langle 0 | + \langle 1 |) \otimes (\langle 0 | + \langle 1 |) n_1 \sum_{\tau_1, \tau_2} P(\tau_1, \tau_2; t) |\tau_1\rangle \otimes |\tau_2\rangle \\
&= (\langle 0 | + \langle 1 |) \otimes (\langle 0 | + \langle 1 |) \sum_{\tau_1, \tau_2} P(\tau_1, \tau_2; t) \delta_{1, \tau_1} |\tau_1\rangle \otimes |\tau_2\rangle \\
&= (\langle 0 | + \langle 1 |) \otimes (\langle 0 | + \langle 1 |) \sum_{\tau_2} P(1, \tau_2; t) |1\rangle \otimes |\tau_2\rangle \\
&= (\langle 0 | + \langle 1 |) \otimes (\langle 0 | + \langle 1 |) P(1, 0; t) |1\rangle \otimes |0\rangle + (\langle 0 | + \langle 1 |) \otimes (\langle 0 | + \langle 1 |) P(1, 1; t) |1\rangle \otimes |1\rangle \\
&= P(1, 0; t) + P(1, 1; t)
\end{aligned} \tag{31}$$

と、計算できることがわかる。

ASEP は粒子の存在確率の時間発展をブラケットを用いてマスター方程式で記述することができる。連続時間の場合、

$$\frac{d}{dt} |P(t)\rangle = H |P(t)\rangle \tag{32}$$

で、離散時間の場合、

$$|P(t + \Delta t)\rangle = T |P(t)\rangle \tag{33}$$

ここで、 H, T は遷移率行列で表現される演算子である。その表現は、閉塞境界条件の場合 (バルクの運動)

$$H = \sum_{j=1}^{L-1} h_{j,j+1} = \sum_{j=1}^{L-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q & 1 & 0 \\ 0 & q & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{j,j+1} \tag{34}$$

$$T = \sum_{j=1}^{L-1} T_{j,j+1} = \sum_{j=1}^{L-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - q\Delta t & \Delta t & 0 \\ 0 & q\Delta t & 1 - \Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{j,j+1} \tag{35}$$

で、ある。ただし $h_{j,j+1}$ は、省略して書いてあり、実際は $j, j+1$ のサイト以外には恒等演算子としてかかるので、

$$h_{j,j+1} = I \otimes \cdots \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q & 1 & 0 \\ 0 & q & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{j,j+1} \otimes \cdots \otimes I \tag{36}$$

と表現されるべきである。また、スピン行列の表現

$$s_j^x \rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_j \quad s_j^y \rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}_j \quad s_j^z \rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}_j \quad I_j \rightarrow \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_j \tag{37}$$

を用いて、 $s_j^\pm, n_j, t_j$

$$s_j^+ = s_j^x - i s_j^y \quad s_j^- = s_j^x + i s_j^y \quad n_j = s_j^z - I_j \quad t_j = s_j^z + I_j \quad (38)$$

を導入すると、遷移率行列 $h_{j,j+1}$ は

$$h_{j,j+1} = -q t_j n_{j+1} + q s_j^- s_{j+1}^+ - n_j t_{j+1} + s_j^+ s_{j+1}^- \quad (39)$$

と、表すことができる。また、

$$\begin{aligned} h_{j,j+1} = & (1+q)(s_j^x s_{j+1}^x + s_j^y s_{j+1}^y - s_j^z s_{j+1}^z + I_j I_{j+1}) \\ & + (1-q)(s_j^z I_{j+1} + I_j s_{j+1}^z - i s_j^y s_{j+1}^x + i s_j^x s_{j+1}^y) \end{aligned} \quad (40)$$

とも書き表せる。

期待値の時間発展は、

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{d}{dt} \langle s | A | P(t) \rangle = \langle s | A H | P(t) \rangle \quad (41)$$

という関係式で求めることができる。

2.2 連続極限

1次元の ASEP の密度の時間発展方程式は、平均場近似をして、格子間隔の3次以上の項を無視することで空間連続の方程式を求めることが出来て、非粘性 Burgers 方程式になる [40]。密度 $\langle \tau_j \rangle$ のバルクでの時間発展方程式は、

$$\frac{d}{dt} \langle \tau_j \rangle = \langle \tau_{j-1} \rangle (1 - \langle \tau_j \rangle) - \langle \tau_j \rangle (1 - \langle \tau_{j+1} \rangle) - q \langle \tau_j \rangle (1 - \langle \tau_{j-1} \rangle) + q \langle \tau_{j+1} \rangle (1 - \langle \tau_j \rangle) \quad (42)$$

とかける。 $\langle \tau_j \rangle = u(x; t)$ とし、格子間隔 a を導入して、

$$\langle \tau_{j+1} \rangle \simeq u(x+a; t) = u(x; t) + \frac{\partial u(x; t)}{\partial x} a + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u(x; t)}{\partial x^2} a^2 \quad (43)$$

と展開して、(42) に代入する。また、時間を a でスケールしてから $a \rightarrow 0$ とすると、

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x; t) + \frac{\partial}{\partial x} u(x; t) (1 - u(x; t)) = 0 \quad (44)$$

となって、非粘性 Burgers 方程式が導かれる。さらに、

$$u(x; t) = \frac{\partial}{\partial x} h(x; t) \quad (45)$$

となる $h(x; t)$ については、

$$\frac{\partial}{\partial t} h(x; t) + \left(\frac{\partial}{\partial x} h(x; t) \right)^2 = 0 \quad (46)$$

とも書けるが、この (46) 式は非粘性 KPZ 方程式 [41] のノイズを無視した形になっていることがわかる。(44) 式と (46) 式は有限時間で爆発することが知られている [42]。爆発を抑えるには粘性

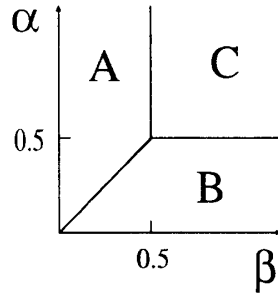


図 2: 1次元開放境界 TASEP の相図

拡散項を付け足した方程式を考える必要がある。(44) 式と (46) 式に粘性拡散項を付けた方程式がそれぞれ Burgers 方程式とノイズの無い KPZ 方程式である。

これらの成長する界面についてのモデルは、KPZ ユニバーサリティークラスとしてまとめられている [43]。KPZ 方程式における結晶高さゆらぎは、系の大きさ L についてスケーリングが成り立って、そのスケーリングが

$$w(t, L) \propto L^{\frac{1}{2}} f(t/L^{\frac{3}{2}}) \quad (47)$$

となることが知られている。

2.3 開放境界条件 TASEP

ASEP の簡単な極限であるモデルに TASEP がある。TASEP は右（左）の一方向にしか粒子が進まない。ASEP の $q \rightarrow 0$ の極限に当たる。この TASEP は交通流での Nagel-Schreckenberg モデル [44] の簡単な場合に対応する。これは、交通流における車同士の排他相互作用が TASEP の排他相互作用という性質が共通であるからである。

1次元 ASEP の開放境界条件の定常状態は、バルクの密度によって、おおまかに 3つの相に分けることができる (図 2)。それらは、

- A : 高密度相 (添字 *high* を用いる)
- B : 低密度相 (添字 *low* を用いる)
- C : 最大流量相 (添字 *max* を用いる)

である。

バルクでの密度とカレントは、行列積仮説を使って厳密に求めることができる。低密度相では、

$$\rho_{low} = \alpha \quad J_{low} = \alpha(1 - \alpha) \quad (48)$$

高密度相では、

$$\rho_{high} = 1 - \alpha \quad J_{high} = \alpha(1 - \alpha) \quad (49)$$

最大流量相では、

$$\rho_{max} = \frac{1}{2} \quad J_{max} = \frac{1}{4} \quad (50)$$

である。相境界 (phase boundary) の領域では、 L が大きいときは (添字 pb を用いて)

$$\rho_{pb}(j) = \alpha + (1 - 2\alpha)\frac{j}{L} \quad J_{pb} = \alpha(1 - \alpha) \quad (51)$$

となっている。

2.3.1 Matrix Product Ansatz

定常状態を求めることは、周期境界条件の場合は簡単で、一様解が解になっていることがわかる。しかし、開放境界条件の場合は簡単でないことが $L = 2$ の解の議論から想像できる。系のサイズが $L = 1, 2, 3$ くらいまでなら、連立方程式を解くことで定常解が求まる。しかし、大きな L については連立方程式を解くことは簡単ではない。そこで、行列積仮説 (MPA) を用いて特解を求める方法が有効になる [6, 45]。実際 MPA によって定常状態を厳密に求めることが可能になった。

その概略を説明しよう。遷移率行列 H が、

$$H = h_1 + \sum_{j=1}^{L-1} h_{j,j+1} + h_L \quad (52)$$

のように、左端、バルク、右端の三つの部分に分けて書けるような場合に、MPA では、粒子の有無に対応した行列 E, D を使って定常状態を定義する。 j 番目のサイトでの粒子の有無を τ_j と表すと、系が状態 $\{\tau_1, \dots, \tau_L\}$ にあるときの確率を、

$$|P\rangle = \frac{1}{Z_L} \langle W | \prod_{j=1}^L (D\tau_j + E(1 - \tau_j)) | V \rangle \quad (53)$$

と書く。ここで、

$$Z_L = \sum_{\tau_1 \dots \tau_L} \langle W | \prod_{j=1}^L (D\tau_j + E(1 - \tau_j)) | V \rangle \quad (54)$$

である。(53) 式が定常状態を表す為には、 $\langle W |, |V\rangle, E, D$ は次の関係式を満たす必要がある。

$$h_{j,j+1} \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} = \zeta \left[\begin{pmatrix} \bar{E} \\ \bar{D} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \bar{E} \\ \bar{D} \end{pmatrix} \right] \quad (55)$$

$$\langle W | h_1 \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} = -\zeta \langle W | \begin{pmatrix} \bar{E} \\ \bar{D} \end{pmatrix} \quad (56)$$

$$h_L \begin{pmatrix} E \\ D \end{pmatrix} | V \rangle = \zeta \begin{pmatrix} \bar{E} \\ \bar{D} \end{pmatrix} | V \rangle \quad (57)$$

$$\langle W | V \rangle = 1 \quad (58)$$

$\bar{E}, \bar{D}$ は E, D に共役な行列と呼ばれていて、この関係式を満たすものなら何でもよい。これらの行列の具体的な表現を求める方法については、[4, 46] に詳しい。ここで定義された $|P\rangle$ が定常状態を与えるのは、これらの関係式を使って $H|P\rangle$ が分解されて 0 になることで理解できる。

一番簡単な場合である E, D が行列ではなくスカラーである場合を考えてみる。1次元の ASEP では、 $\bar{E} = -\bar{D} = -1$ と $\bar{E}, \bar{D}$ が与えられることが知られている。すると、

$$E = \frac{1}{\alpha} \quad D = \frac{1}{\beta} \quad \alpha + \beta = 1 \quad (59)$$

ということがわかり、

$$|P\rangle = \alpha^L (1 - \alpha)^L \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{L - \sum_{j=1}^L \tau_j} \left(\frac{1}{1 - \alpha}\right)^{\sum_{j=1}^L \tau_j} \quad (60)$$

となることがわかる。この場合の密度とカレントは、

$$\rho = \alpha \quad J = \alpha(1 - \alpha) \quad (61)$$

である。

以上で紹介したのは連続時間版の MPA であるが、離散時間版についても MPA が存在する [11, 12, 13, 14, 15]。

ASEP の離散時間発展のモデルには、時間更新の方法により以下のように分類される。

- ordered sequential update
- sublattice parallel update
- parallel update

ordered sequential update とは、系の右から左へ 1 サイトずつ更新していく方法である。sublattice parallel update とは、まず奇数番目のサイトを更新してから次に偶数番目のサイトを更新する方法である。parallel update とは、全サイトを一気に更新する方法である。通常の CA (Cellular Automaton) では parallel update が用いられている。

2.3.2 キンクの運動

相境界のパラメーター領域では、低密度領域と高密度領域との界面が定常的に存在していることが知られている。実は、この界面 (キンク²) はブラウン運動をしている。端まで拡散することもあるが、跳ね返って来て、やはりキンクは定常的に系の中に存在する。つまり、開放境界条件下では、キンクの位置は閉塞境界のブラウン運動をしていることがわかる。実際に、拡散係数が求まっていて、

$$D = \frac{2\alpha(1 - \alpha)}{1 - 2\alpha} \quad (62)$$

となることが知られている [19]。キンクの左側が低密度で、急激にある位置から右側が高密度になっていることから、このキンクを階段関数を用いて、

$$\rho_{kink}(j) = \alpha + (1 - 2\alpha)\theta(j - x) \quad (63)$$

²この場合、密度の急激な変化を示す点を表す。(図 3 参照)

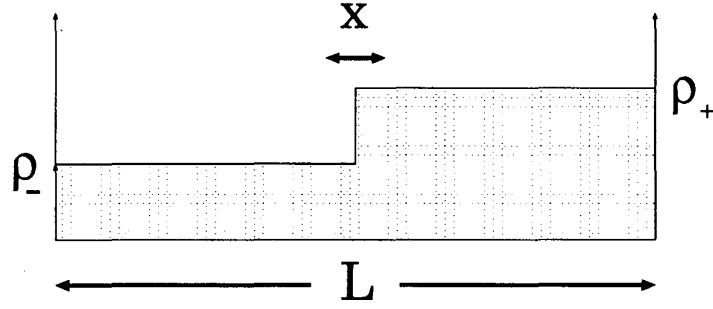


図 3: $\alpha = \beta < 1/2$ の場合のある時間における密度プロファイルの概念図

と表すことができる。ここで、

$$\theta(z) = \begin{cases} 1 & \text{for } z \geq 0 \\ 0 & \text{for } z < 0 \end{cases} \quad (64)$$

である。 x はキンの位置を表す。閉塞境界のブラウン運動の定常存在確率は位置に依らず一定で、

$$P_{\text{kink}}(x) = \frac{1}{L} \quad (65)$$

なので、定常密度は、

$$\rho_{\text{pb}}(j) = \sum_{x=1}^L P_{\text{kink}} \rho_{\text{kink}} = \alpha + (1 - 2\alpha) \frac{j}{L} \quad (66)$$

となり、厳密解の結果とも一致する。さらに、反射境界のブラウン運動は時間発展まで厳密に求めることができる。そこで、他時刻自己相関関数を計算することで、パワースペクトルを求めることが出来て、角周波数を ω とすると、 $\omega^{-\frac{3}{2}}$ に比例することがわかった (Appendix)。

$$I(\omega) \sim \sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)(1-2\alpha)^3}{2L^2}} \omega^{-\frac{3}{2}} \quad (67)$$

これは、モンテカルロシミュレーションで確認されたべき則と、係数まできれいに一致した。

よって、このキンク描像は、ASEP におけるキンクを論ずる上で確かなものであるといえることができる。

2.3.3 固有値分布

1次元 TASEP の遷移率行列 H の固有値を直接計算することは難しいが、数値的に求めることができる。この場合固有値は、遷移率行列 H が非エルミート行列なので、QR 法を使う [47]。QR 法とは任意の実行列 A が相似変換により直交行列 Q と上 Hessenberg 行列 R ($R_{ij} = 0; i + 1 > j$) の積に分解できること ($A = QR$) を利用する方法である。詳細は省略する。 L が大きい場合にはメモリの問題で数値計算は困難だが、 L が小さい場合には可能で、図 4 のような固有値分布になることがわかる。

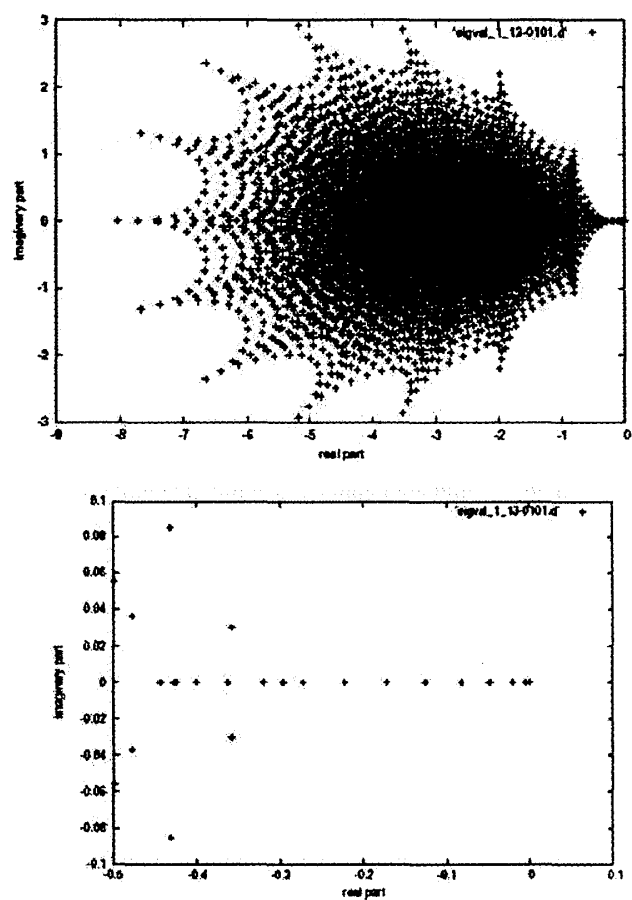


図 4: 上図は $L = 13, \alpha = \beta = 0.1$ の場合の複素平面上の固有値分布。下図は実部の 0 付近の拡大図。

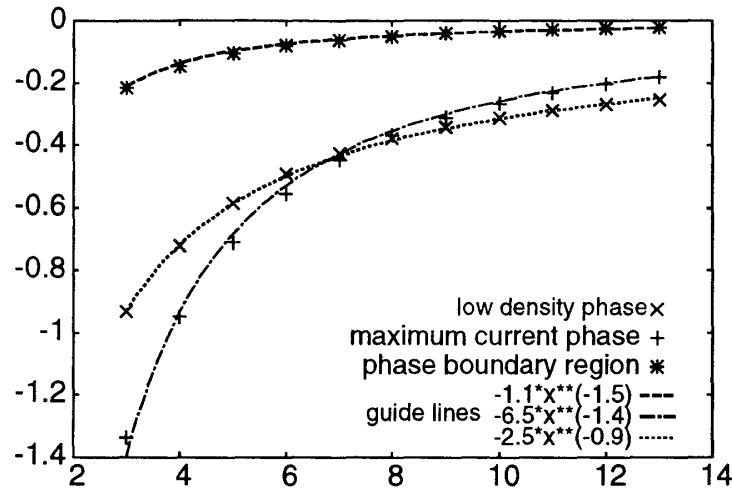


図 5: 第二最大固有値の絶対値の L 依存性。+ が $\alpha = \beta = 1.0$ の場合。× が $\alpha = 0.1, \beta = 1.0$ の場合。* が $\alpha = \beta = 0.1$ の場合。線はガイドライン。

相境界の領域 $\alpha = \beta \ll 0.5$ においては、0 固有値に近い値が多く存在していることが見て取れる。これは、他の領域では見られない特徴である。相境界の領域は他よりも緩和時間が長いことがこの固有値分布を見ることから予想される。実際に他の領域との第二最大固有値を比べて L 依存性を調べてみた。最大固有値は必ず 0 であるが、第二最大固有値の出来る範囲での L 依存性を調べてみると、共存相では $L^{-3/2}$ に比例していることがわかる (図 5)。また、最大流量相では 1.4 と 1.5 に近い値を示しているが、低密度相においては 0.9 であり、異なった振舞をしているようである。周期境界の場合には第二最大固有値の大きさが $L^{-3/2}$ に比例するということが、Bethe 仮説法の解析からわかっているが [48, 49]、まだ両者の関係はわかっていない。非ゼロ固有値である比較的実部のゼロに近い固有値は、時間発展において比較的長く系を支配するので、非常に重要であり、その性質の詳細がわかると ASEP ならずともそれと関連した非平衡系の研究に重要な示唆を与えるだろう。

3 2 レーンモデル

3.1 モデルの導入

1 レーンのモデルを多レーンに拡張することは重要である。1 次元のモデルを 2 レーンに拡張すると、粒子がレーンを移動することで粒子の入れ替わりが起こる。すると、解析的な扱いが異なり、物理的にも 1 次元と異なる振舞いが予想される。しかし、いきなり多レーンモデルを扱うのは困難なので、まずは一番簡単な拡張であるレーンを二つにしたモデルを扱うことにする。

図 6 のように、2 レーンモデルを導入する。まず、1 次元鎖を 2 本並べる。空間は離散、時間は連続で扱う。左端に粒子がないときに粒子の入る割合をそれぞれ α_1, α_2 とし、右端に粒子があるときに右端から粒子が出て行く割合を β_1, β_2 とする。さらに、2 レーン目から 1 レーン目に粒子

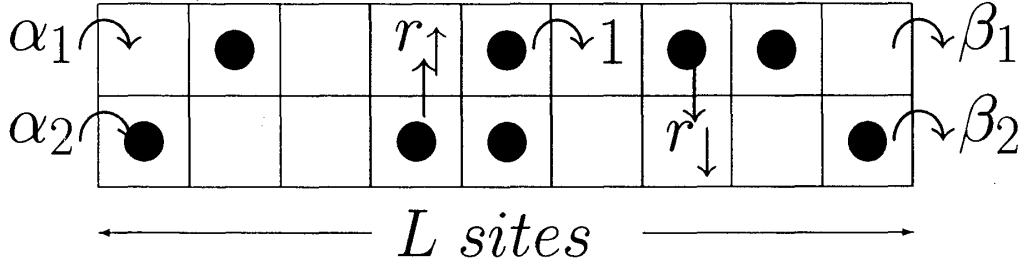


図 6: 2 レーン TASEP のスナップショット

が移る割合を $r_\uparrow$ 、1 レーン目から 2 レーン目に移る割合を $r_\downarrow$ とする。レーンチェンジは、となりが空いていたら行われることとする。粒子はそれぞれ単位時間当たり 1 の割合で右に移り、行き先に粒子がある場合は運動せずに留まる。

パラメーターの取り方によって、系の様子は様々なふるまいをする。レーン毎に見ると、1 レーンの定常状態の組合せの状態が実現することが予想されるし、シミュレーションでも確認することができる。例えば、1 レーン目は低密度相で 2 レーン目は高密度相が実現するような境界のパラメーターをとったとき、レーンチェンジの割合としては、1 レーン目から 2 レーン目へと移る割合の方が多くなるようにパラメーターをとる。しかし、どのパラメーター領域でどのような定常状態が実現し、相図のようなものを書けるかどうかについては、シミュレーションをすることでわかるが、今のところきっちりと求めてはいない。

3.2 行列積仮説による厳密解

次に、1 次元で成功した行列の方法を使って、この 2 レーンモデルの定常状態の解析をする。1 次元では、各サイトに粒子の有無に対応した 2 状態を考えていたが、ここでは、各サイトに 4 状態があるとして考える。すなわち、両レーンに粒子が無い状態、1 レーン目に粒子が在る状態、2 レーン目に粒子が在る状態、両レーンに粒子が在る状態の 4 状態である。各状態に対応して、4 つの行列 A, B, C, D を考えると、系の確率密度ベクトルは、

$$|P\rangle = \frac{1}{Z_L} \langle W | \prod_{i=1}^L ((1 - \tau_{i,1})(1 - \tau_{i,2})A + (1 - \tau_{i,1})\tau_{i,2}B + \tau_{i,1}(1 - \tau_{i,2})C + \tau_{i,1}\tau_{i,2}D) |V\rangle \quad (68)$$

と書け、分配関数に当たる Z_L は、

$$Z_L = \langle W | (A + B + C + D)^L |V\rangle \quad (69)$$

である。ここで、 $\tau_{i,1}, \tau_{i,2} = 0, 1$ で i 番目のサイトでの粒子の有無を表す。系の時間発展はマスター方程式、

$$\frac{d}{dt}|P\rangle = H|P\rangle \quad H = h_1 + \sum_{i=1}^{L-1} h_{i,i+1} + h_L \quad (70)$$

で表されるが、以下の条件を満たすような a, b, c, d が存在すれば、 $H|P\rangle = 0$ であることが知られている。つまり、 $|P\rangle$ が定常状態の解になっていることがわかる。 a, b, c, d は行列でも構わないが、定数で考えてみる。

$$h_{i,i+1} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \zeta \left[\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \right] \quad (71)$$

$$\langle W|h_1 \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = -\zeta \langle W| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad (72)$$

$$h_L \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} |V\rangle = \zeta \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} |V\rangle \quad (73)$$

ζ は定数である。遷移行列は、

$$h_{j,j+1} = \begin{pmatrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r_{\downarrow} \mathbf{I} & r_{\uparrow} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & r_{\downarrow} \mathbf{I} & -r_{\uparrow} \mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \quad (74)$$

$$h_1 = \begin{pmatrix} -\alpha_1 - \alpha_2 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_2 & -\alpha_1 & 0 & 0 \\ \alpha_1 & 0 & -\alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \end{pmatrix} \quad (75)$$

$$h_L = \begin{pmatrix} 0 & \beta_2 & \beta_1 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & 0 & \beta_1 \\ 0 & 0 & -\beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta_1 - \beta_2 \end{pmatrix} \quad (76)$$

である。 O, I はそれぞれ 4×4 行列で、全ての成分が0であるものと、単位行列である。 $\langle W|, |V\rangle$ についても、上の条件 (71,72,73) を満たせばどんなものでもよい。

まず、(71)(72)(73) 式の中で矛盾が無いような条件を求めて行く。すると、以下の条件式が出てくる。

$$\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = 1 \quad \frac{r_{\downarrow}}{r_{\uparrow}} = \frac{\alpha_1 \beta_2}{\alpha_2 \beta_1} \quad (77)$$

この条件式を満たす場合、(72,73) 式を分けて書くと

$$\langle W|A = \frac{\zeta}{\alpha_1 \alpha_2} \langle W| \quad (78)$$

$$D|V\rangle = \frac{\zeta}{\beta_1 \beta_2} |V\rangle \quad (79)$$

$$\langle W|B = \frac{\zeta}{\alpha_1 \beta_2} \langle W| \quad , \quad B|V\rangle = \frac{\zeta}{\alpha_1 \beta_2} |V\rangle \quad (80)$$

$$\langle W|C = \frac{\zeta}{\alpha_2 \beta_1} \langle W| \quad , \quad C|V\rangle = \frac{\zeta}{\alpha_2 \beta_1} |V\rangle \quad (81)$$

ということがわかる。条件 (77) 式の時、解は簡単に求まって、分配関数は、

$$Z_L = \langle W|X^L|V\rangle = \left(\frac{\zeta}{\alpha_1 \alpha_2 \beta_1 \beta_2} \right)^L \quad (82)$$

である。さらに密度や流量は、

$$\langle n_{j,1} \rangle = \alpha_1 \quad (83)$$

$$\langle n_{j,2} \rangle = \alpha_2 \quad (84)$$

$$J_1 = \alpha_1(1 - \alpha_1) \quad (85)$$

$$J_2 = \alpha_2(1 - \alpha_2) \quad (86)$$

となる。

ここで求まった解は、1 レーン解と同じであり、レーンチェンジの効果が消えている。また、この領域では、2 点関数が1 点関数の積と等しくなる。

3.3 キנקの運動

2 レーンモデルにおけるキנקの運動を解析することが本論文の中核をなす。この節では文献 [50] に基づき、キנקが互いに同期して行くことを示す。

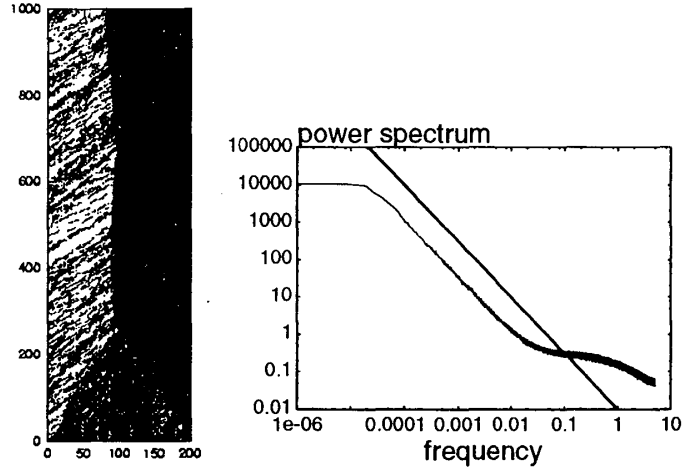


図 7: 左図はシミュレーションによる時間発展の様子。点が粒子を示す。横軸が位置で縦軸が時間を表す。2 レーンあるうちの 1 レーン目の様子。パラメーターは、 $\alpha_1 = \beta_1 = 0.1, \alpha_2 = \beta_2 = 0.15, r_l = 0.11, r_f = 0.1, L = 200$ 。右図は同じパラメーターで同じレーンで系の真中でとったパワースペクトル。側の線は $\omega^{-3/2}$ に比例する線。

3.3.1 キンクの拡散

今度は、2 レーンモデルでのキンクの運動を考えてみる。まず、キンクが現れるかどうか確かめる必要がある。モンテカルロシミュレーションの結果が図 7 に示してある。

このように、大体 $\alpha_1 = \beta_1 < 1/2, \alpha_2 = \beta_2 < 1/2$ の領域でキンクが安定に現れることがわかる。定点パワースペクトルをとって見たのが図 7 右で、1 レーンと同様なべき関数 $I(\omega) \sim \omega^{-3/2}$ に従うことがわかる。

では、2 レーンモデルに拡張したときに、このキンクの運動はどうなっているのだろうか。レーン間の移動を許すと、粒子は空いているところに移動しようとするので、キンクがお互いに同期して動くことが予想される。このことを解析的に示してみよう。

3.3.2 キンクの位置

まず、キンクの位置を、レーン内にある総粒子数 $\langle N_\ell \rangle = \sum_{j=1}^L \langle \tau_{j;\ell} \rangle$ を使って、

$$x_\ell = \frac{\langle N_\ell \rangle - \rho_{\ell,+} L}{\rho_{\ell,-} - \rho_{\ell,+}} \quad (87)$$

と定義する。この定義の妥当性は、キンクを表す式 (63) から示される。この 2 レーンモデルの場合、 j 番目のサイトの ℓ 番目のレーンの密度を $\langle \tau_{j;\ell} \rangle$ と書くと、

$$\langle \tau_{j;\ell} \rangle = \rho_{\ell,-} + (\rho_{\ell,+} - \rho_{\ell,-}) \theta(j - x_\ell) \quad (88)$$

となる。ここで、 $\rho_{\ell,\pm}$ は ℓ レーンの密度を表し、 $\rho_{\ell,-}$ がキンクの位置の左側の密度で $\rho_{\ell,+}$ が右側の密度を表す。 x_ℓ は ℓ レーン目のキンクの位置を示す。(88) 式の両辺を 1 から L まで足し合わせて、式変形すると (87) 式が導かれる。

3.3.3 平均場解析

この節ではキンの位置の運動をレーン内にある総粒子数の時間発展方程式を平均場近似を使って議論する。

以下では、レーン毎の総粒子数に着目していく。 $\langle N_\ell \rangle$ についての時間発展方程式をマスター方程式を元に導くことができ、

$$\frac{d}{dt} \langle N_\ell \rangle = \langle s | N_\ell H | P(t) \rangle \quad (89)$$

とあらわされるが、 $\ell, \ell' = 1, 2; \ell \neq \ell'$ に対して計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle N_\ell \rangle &= \alpha_\ell (1 - \langle \tau_{1;\ell} \rangle) - \langle \tau_{L;\ell} \rangle (1 - \beta_\ell) \\ &\quad + (\ell' - \ell) \sum_{j=1}^L [r_\uparrow \langle \tau_{j;\ell'} (1 - \tau_{j;\ell}) \rangle - r_\downarrow \langle \tau_{j;\ell} (1 - \tau_{j;\ell'}) \rangle] \end{aligned} \quad (90)$$

となることがわかる。ここで、 $\ell' - \ell = \pm 1$ は符号を表す。このままでは扱えそうもないので、両端からの寄与 (第一項と第二項) を無視して、 $\langle N_G \rangle = \frac{\langle N_2 \rangle + \langle N_1 \rangle}{2}$ と $\langle N_R \rangle = \langle N_2 \rangle - \langle N_1 \rangle$ を導入すると、方程式は、

$$\frac{d}{dt} \langle N_G \rangle = 0 \quad (91)$$

$$\frac{d}{dt} \langle N_R \rangle = -2r_\uparrow \langle N_R \rangle + 2(r_\downarrow - r_\uparrow) \sum_{j=1}^L \langle \tau_{j;1} (1 - \tau_{j;2}) \rangle \quad (92)$$

となる。 $r_\downarrow = r_\uparrow$ のとき、方程式 (92) は簡単になり、

$$\frac{d}{dt} \langle N_R \rangle = -2r_\uparrow \langle N_R \rangle \quad (93)$$

となる。このとき、 $\langle N_R \rangle$ は指数関数的に減衰して 0 になる。

しかし、 $r_\downarrow \neq r_\uparrow$ の場合は、(92) 式の右辺第二項に現れる 2 点関数 $\langle \tau_{j;1} \tau_{j;2} \rangle$ を求める必要がある。一般には、2 点関数を求めるには 3 点関数の情報が必要になって来る。全ての多点関数を求めることは非常に難しいので、どこかで近似をしてこの階層構造を切ってやる必要がある。そこで、まず、一番簡単な方法である、平均場近似で考える。平均場近似とは、ここでは、2 点関数を 1 点関数の積で置き換えるというものである。つまり、

$$\sum_{j=1}^L \langle \tau_{j;1} (1 - \tau_{j;2}) \rangle \simeq \sum_{j=1}^L \langle \tau_{j;1} \rangle (1 - \langle \tau_{j;2} \rangle) \quad (94)$$

である。

平均場近似の式 (94) を使うには $\langle \tau_{j;\ell} \rangle$ の時間発展が求まる必要がある。そこで、 $\langle \tau_{j;\ell} \rangle$ の発展方程式は、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \tau_{j;\ell} \rangle &= \langle \tau_{j-1;\ell} \rangle (1 - \langle \tau_{j;\ell} \rangle) - \langle \tau_{j;\ell} \rangle (1 - \langle \tau_{j+1;\ell} \rangle) \\ &\quad - (\ell' - \ell) r_\downarrow \langle \tau_{j;\ell} \rangle (1 - \langle \tau_{j;\ell'} \rangle) + (\ell' - \ell) r_\uparrow \langle \tau_{j;\ell'} \rangle (1 - \langle \tau_{j;\ell} \rangle) \end{aligned} \quad (95)$$

である。この方程式を解析的に解くことは出来ないので、近似的に密度 $\langle \tau_{j;\ell} \rangle$ の時間発展を求めて行く。その近似とは、密度がキंक描像を保ったまま時間発展する、というものである。つまり、 $\langle \tau_{j;\ell} \rangle$ が

$$\langle \tau_{j;\ell} \rangle = \rho_{\ell;-}(t) + (\rho_{\ell;+}(t) - \rho_{\ell;-}(t))\theta(j - x_\ell(t)) \quad (96)$$

である、とする (以下では時間依存を意味する (t) を略する)。 $\rho_{\ell;\pm}$ は j によらないので、(95) 式の j 方向のカレントを無視することができるため、

$$\frac{d}{dt}\rho_{\ell;\pm} = -(\ell' - \ell)r_\downarrow\rho_{\ell;\pm}(1 - \rho_{\ell';\pm}) + (\ell' - \ell)r_\uparrow\rho_{\ell';\pm}(1 - \rho_{\ell;\pm}) \quad (97)$$

という方程式に従うことがわかる。これは、変数変換して $\rho_{G;\pm} = \frac{\rho_{2;\pm} + \rho_{1;\pm}}{2}$ と $\rho_{R;\pm} = \rho_{2;\pm} - \rho_{1;\pm}$ を用いると、

$$\frac{d}{dt}\rho_{G;\pm} = 0 \quad (98)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{R;\pm} = -(r_\uparrow + r_\downarrow)\rho_{R;\pm} + \frac{1}{2}(r_\downarrow - r_\uparrow)\rho_{R;\pm}^2 + (r_\downarrow - r_\uparrow)(\rho_{G;\pm} - \rho_{G;\pm}^2) \quad (99)$$

と書くことが出来る。式 (98)(99) 式は可解でその解は

$$\rho_{G;\pm} = \rho_{G;\pm}^0 \quad (100)$$

$$\rho_{R;\pm} = \omega_\pm + \frac{2\gamma}{\epsilon} \frac{e^{-\gamma t}}{e^{-\gamma t} - C_\pm} \quad (101)$$

であたえられる。ここで、 $\epsilon, \gamma, \omega_\pm, C_\pm$ は

$$\epsilon = r_\downarrow - r_\uparrow \quad \gamma = \frac{1}{2}(r_\downarrow - r_\uparrow)(\omega_+ - \omega_-) \quad (102)$$

$$\omega_\pm = \frac{r_\downarrow + r_\uparrow \pm \sqrt{(r_\downarrow + r_\uparrow)^2 - 2(r_\downarrow - r_\uparrow)^2(\alpha_1 + \alpha_2 - (\alpha_1 + \alpha_2)^2/2)}}{r_\downarrow - r_\uparrow} \quad (103)$$

$$C_\pm = \frac{\rho_{R;\pm}^0 - \omega_+}{\rho_{R;\pm}^0 - \omega_-} \quad (104)$$

である。初期条件である $\rho_{G;\pm}^0$ と $\rho_{R;\pm}^0$ は、一次元の定常密度と同じであると仮定する。つまり、

$$\rho_{G;-}^0 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \quad \rho_{R;-}^0 = \alpha_2 - \alpha_1 \quad (105)$$

$$\rho_{G;+}^0 = \frac{2 - \alpha_1 - \alpha_2}{2} \quad \rho_{R;+}^0 = \alpha_1 - \alpha_2. \quad (106)$$

である。よって、解を $\rho_{\ell;\pm}$ で表すと、

$$\rho_{1;-} = \rho'_1 - \frac{\gamma}{\epsilon} \frac{e^{-\gamma t}}{e^{-\gamma t} - C_-} \quad \rho_{2;-} = \rho'_2 + \frac{\gamma}{\epsilon} \frac{e^{-\gamma t}}{e^{-\gamma t} - C_-} \quad (107)$$

と、

$$\rho_{1;+} = 1 - \rho'_2 - \frac{\gamma}{\epsilon} \frac{e^{-\gamma t}}{e^{-\gamma t} - C_+} \quad \rho_{2;+} = 1 - \rho'_1 + \frac{\gamma}{\epsilon} \frac{e^{-\gamma t}}{e^{-\gamma t} - C_+} \quad (108)$$

となる。ここで、

$$\rho'_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \omega_-}{2} \quad \rho'_2 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \omega_-}{2} \quad (109)$$

である。密度のキンク形の (88) 式を (92) 式に代入して、(94) 式を使うと、 $x_1 < x_2$ の場合、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle N_R \rangle &= -(2r_\uparrow + \epsilon(1 - \rho_{2;-} + \rho_{1;+})) \langle N_R \rangle \\ &\quad + 2\epsilon\rho_{1;+}\rho_{2;-}L + 2\epsilon(1 - \rho_{1;+} - \rho_{2;-}) \langle N_G \rangle \end{aligned} \quad (110)$$

となり、 $x_1 > x_2$ の場合、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle N_R \rangle &= -(2r_\uparrow + \epsilon(1 - \rho_{2;+} + \rho_{1;-})) \langle N_R \rangle \\ &\quad + 2\epsilon\rho_{1;-}\rho_{2;+}L + 2\epsilon(1 - \rho_{1;-} - \rho_{2;+}) \langle N_G \rangle \end{aligned} \quad (111)$$

となる。(110) 式と (111) 式は解くことが出来て、時間発展が求まる (Appendix)。長時間後の $t \rightarrow \infty$ の解は、 $x_1 < x_2$ の場合は (135) 式から、

$$\langle N_R \rangle_\infty = \frac{\epsilon\rho'_2(1 - \rho'_2)L}{r_\uparrow - \epsilon\rho'_2} \quad (112)$$

となり、 $x_1 > x_2$ の場合は (134) 式から、

$$\langle N_R \rangle_\infty = \frac{\epsilon\rho'_1(1 - \rho'_1)L}{r_\uparrow + \epsilon\rho'_1} \quad (113)$$

となる。これらの結果は、レーン間の平均総粒子数の差が最終的に残ることを示す。

この解析結果をモンテカルロシミュレーションと比較してみたのが図 8 である。 $\frac{r_\uparrow}{r_\downarrow} = 1.1$ の場合にシミュレーションと解析結果 (134)(135) 式の比較を行うと、両者は良く一致していることがわかる。

総粒子数の差が残るものの、キンの位置は同期する。(113) 式もしくは (112) 式を (87) に代入すると、(103) を使って、

$$x_2(\infty) - x_1(\infty) = 0 \quad (114)$$

となることがわかる。

3.3.4 近似の妥当性

次に、解析において近似を用いたので、その妥当性を議論したいと思う。ここでは、モンテカルロシミュレーションにより、比較する。次のように定義される値 A

$$A = \frac{\sum_{j=1}^L \langle \tau_{j;1} \tau_{j;2} \rangle - \sum_{j=1}^L \langle \tau_{j;1} \rangle \langle \tau_{j;2} \rangle}{\sum_{\ell=1}^2 \sum_{j=1}^L \langle \tau_{j;\ell}^2 \rangle} \quad (115)$$

をシミュレーションにより求めた。まず、解析結果と比較してよい一致が見られた場合の A の値が図 9 である。 $t = 30$ から $t = 100$ の間はほとんど 0 になっているとみてよい。キンの同期が進行するのはこの時間領域なので、近似はうまくいっていると思われる。

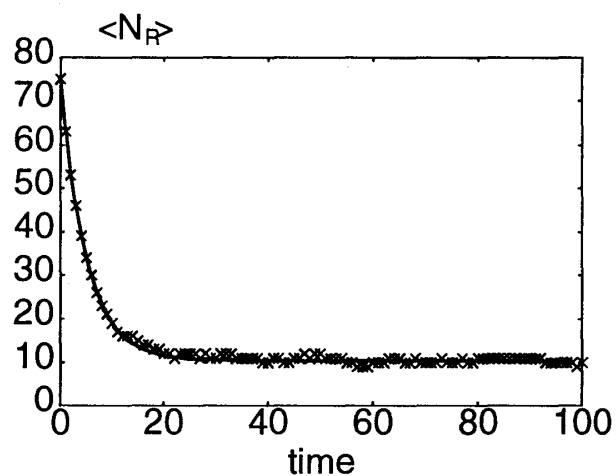


図 8: $\langle N_R \rangle$ の時間発展のシミュレーションと解析結果の比較。解 (134) が直線で示されており、シミュレーション結果は $\times$ で示されている。パラメーターは $\alpha_1 = \beta_1 = 0.1, \alpha_2 = \beta_2 = 0.15, r_1 = 0.11, r_1 = 0.1, L = 1000$ である。初期条件は、 $\langle N_R \rangle_0 = 75$ で、1000 のサンプル平均をとっている。

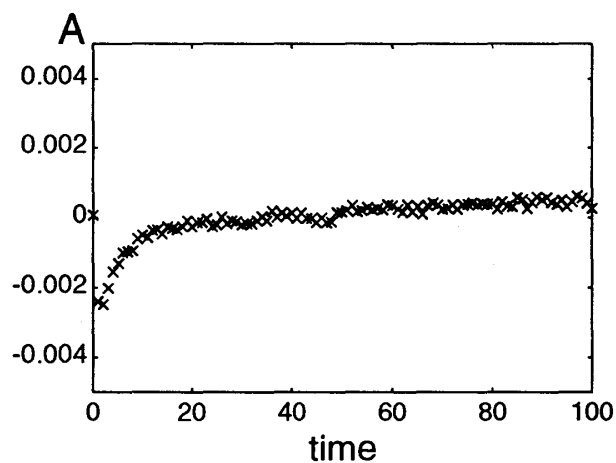


図 9: シミュレーションで得られた値 A の時間発展を表す。パラメーターは図 8 と同じパラメーターである。

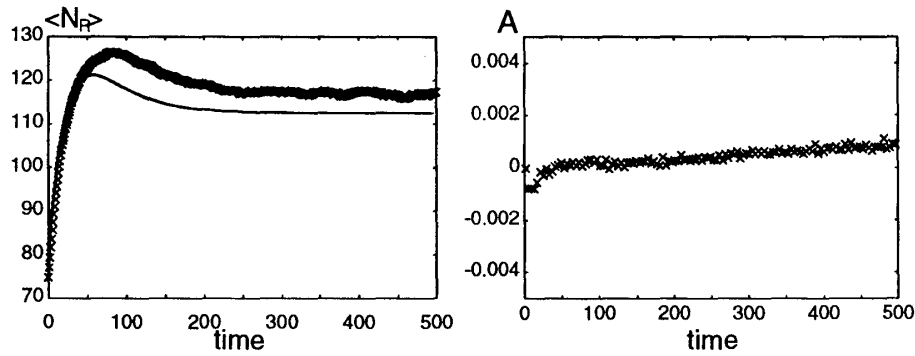


図 10: 左の図は $\langle N_R \rangle$ の時間発展のシミュレーションと解析結果の比較である。解 (134) が直線で示されており、シミュレーション結果は $\times$ で示されている。右の図はシミュレーションで得られた値 A の時間発展を表す。両図でのパラメータは $\alpha_1 = \beta_1 = 0.1, \alpha_2 = \beta_2 = 0.15, r_{\downarrow} = 0.03, r_{\uparrow} = 0.01, L = 1000$ である。初期条件は、 $\langle N_R \rangle_0 = 75$ で、1000 のサンプル平均をとっている。

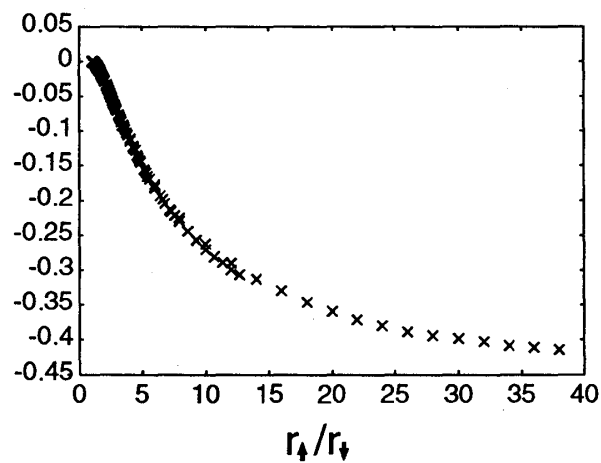


図 11: $\frac{r_{\downarrow}}{r_{\uparrow}}$ に対して $\langle N_R \rangle$ の解析結果とシミュレーション結果のずれをプロットした。パラメータは $\alpha_1 = \beta_1 = 0.1, \alpha_2 = \beta_2 = 0.15, L = 1000$ である。

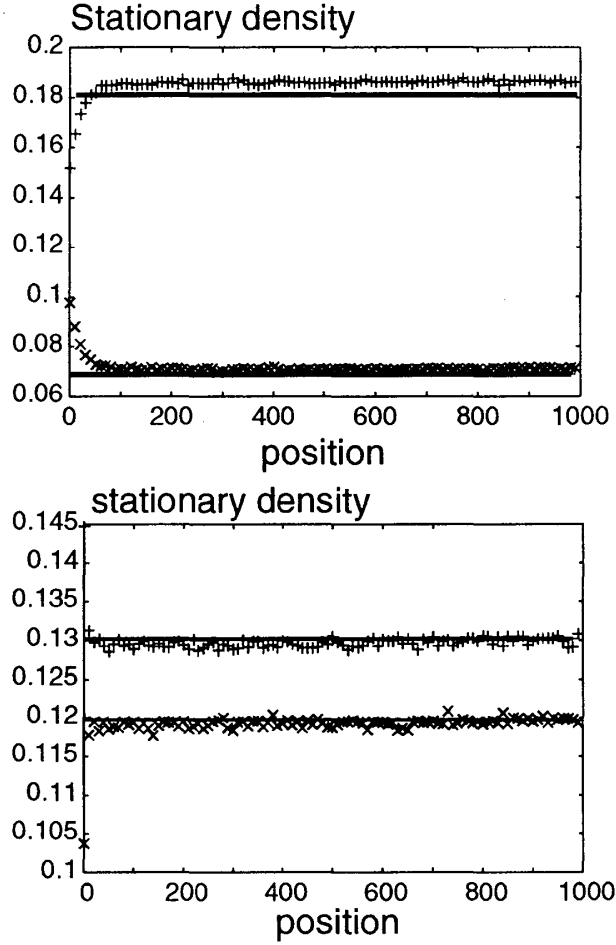


図 12: 定常密度 ρ'_1, ρ'_2 のシミュレーションとの比較。+ は 1 レーン目、 $\times$ は 2 レーン目の密度のシミュレーション結果を表す。直線は ρ'_1, ρ'_2 の値。パラメータは $\alpha_1 = 0.1, \beta_1 = 0.9, \alpha_2 = 0.15, \beta_2 = 0.85, L = 1000$ で、上図では $r_l = 0.03, r_f = 0.01$ で下図では $r_l = 0.11, r_f = 0.1$ である。

しかし、平均場近似による解析がうまくいかない領域も存在する。実際、 $\frac{r_l}{r_f} = 3$ の場合、図 10 の左の図は、シミュレーションから得られた $\langle N_R \rangle$ と解析結果がずれることを示している。キンの位置はこの場合は、一致しない。解析結果とのずれを $\frac{r_l}{r_f}$ に対してプロットしたのが図 11 である。

ここでのパラメータ値 $\frac{r_l}{r_f} = 3$ は平均場近似の成立する場合である $r_l = r_f$ から大きくずれているので近似の破れは当然ではあるが、もう少し理由を探してみる。この場合の値 A が図 10 の右の図に示されている。値 A は $t = 30$ から $t = 200$ の間でほとんど 0 になることがわかる。従って、相関効果が重要になったために近似が破れたとも言い切れない。

次に ρ'_1, ρ'_2 が実際のキンの両側の密度をシミュレーションとあっているかを確認してみる。図 12 によると、解析結果とのずれがある場合には、 ρ'_1, ρ'_2 の値がずれる。このずれがキンの位置がずれる原因になっている。

さらに、図 13 に最終的なキンの位置の解析結果とのずれを $\delta = r_l/r_f - 1$ に対してプロット

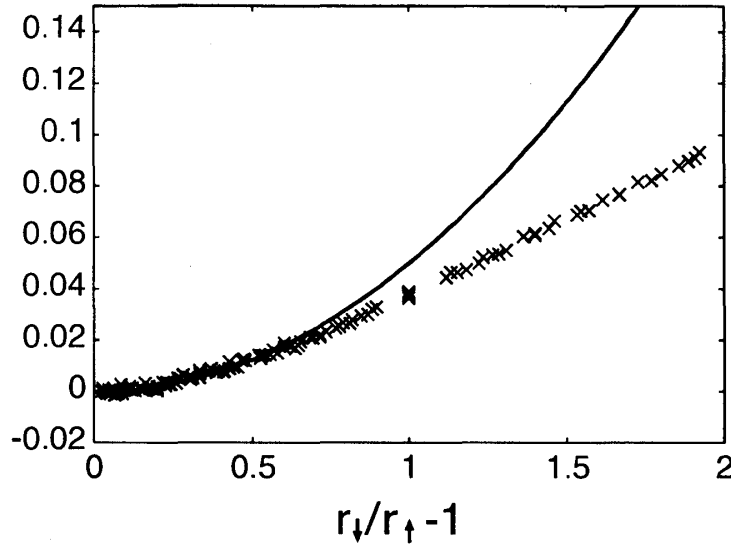


図 13: 最終的なキンクの位置のずれを $\delta = r_1/r_1 - 1$ に対してプロットしたもの。太線は δ^2 に比例する曲線をあらわし、 $\times$ はシミュレーションと解析結果との最終的なキンクの位置のずれを示す。パラメーターは $\alpha_1 = \beta_1 = 0.1, \alpha_2 = \beta_2 = 0.15, L = 1000$ である。

した。 δ が 0 の近傍では、ずれ方は δ^2 に比例している。つまり、 δ^2 が無視できるが δ の効果が現れる領域においては、平均場近似はなりたっていることが、この図から見て取れる。

3.3.5 議論

前節の終わりでは、シミュレーション結果と解析結果がずれるのは ρ'_1, ρ'_2 の値がずれることが原因だと述べたが、では、この ρ'_1, ρ'_2 の値がずれるのは何によるのであろうか？ それは、 $\rho_{G;\pm}$ の値が初期条件の (105)(106) 式から変化することに原因があるのではないだろうか。図 12 と同じく、対応する定常密度において $\langle \tau_{j;1} \rangle_\infty + \langle \tau_{j;2} \rangle_\infty$ をプロットしたのが図 14 である。

ρ'_1, ρ'_2 は、(103) 式を通じて $\rho_{G;\pm}$ の値に依っている。ずれの原因の結論としては、定常密度をレーンについて足し合わせたものを時間に依らず一定であると仮定したが、実際は一定ではなく変化することだと思われる。

4 今後の課題

今後の課題としては、まず、今回はレーンを 2 レーンに拡張したが、さらにマルチレーンにした場合のキンクの運動がどうなるか、ということを考えてみたい。レーンチェンジの割合がレーンによらず一定の値の場合は、 $r_1 \neq r_1$ で粒子数にずれが見られるとき、粒子数のずれが各レーン毎に等間隔にできるだろうと思われる。また、粒子が運動する領域が広がるので、2 レーンの場合よりも緩和時間が長くなると思われる。

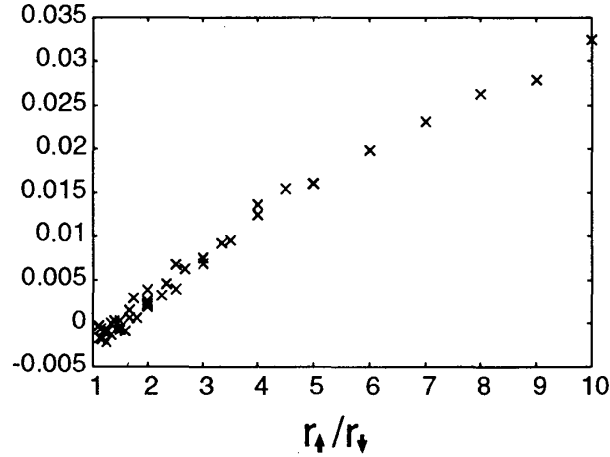


図 14: $\frac{r_+}{r_-}$ に対して定常密度を真中の位置でレーンについて足し合わせたものの解析結果とシミュレーション結果のずれをプロットした。パラメーターは $\alpha_1 = \beta_1 = 0.1, \alpha_2 = \beta_2 = 0.15, L = 1000$ である。

文献 [51] では 1 次元 Burgers 方程式に現れる衝撃波と膨張波の衝突について調べている。1 次元 Burgers 方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} u(1-u) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (116)$$

であるが、 $\nu \rightarrow 0$ の極限で初期条件により二つの解を持つことが知られている。それは、衝撃波解と膨張波解である。なかでも、衝撃波同士の衝突では、質量と運動量に見立てた保存則が成り立っていることが知られている。

我々のモデルは 2 レーンモデルで、Burgers 方程式の 1 つの拡張した式になっている。そこで、この問題と比較して、多レーンモデルにおいて衝撃波衝突の問題を論じることが期待できる。その場合に、単純に衝突則が成り立つのか、成り立たないならそれに変わる衝突則があるのか、などを調べることができるだろう。

さらに、2 レーンモデルの定常解の厳密解を求める為にも、行列積仮説での行列が 2×2 行列の場合にどうなるかを計算してみると、さらに定常解について理解が深まるだろう。

また、レーンチェンジのルールが今回は前のサイトを参照しないモデルなのだが、交通流を考える上では前を参照することは重要で、1 レーンよりもカレントが大きくなることが期待される。実際、本論文では触れていないものの、現実的なレーンチェンジのルールを採用した TASEP で、輸送効率の上昇が見られることが、筆者のシミュレーションによって確認されている [52]。その解析などができると面白いと思う。

5 結論

一次元 TASEP モデルを 2 レーンに拡張し、その性質を調べた。まず、定常解を一次元で成功した行列積仮説に基づいて解析し、一次元解と同じ解が求まるパラメーター領域を求めた。さらに、

2 レーンモデルにおいてキンクの運動を調べた。レーンチェンジの効果で、二つのキンクの位置は同期することがわかった。レーンチェンジの割合が非対称な場合には、レーン毎の総粒子数に差が残るものの、キンクの位置は同期することがわかった。

まず、丁寧に指導してくださり、辛抱強く原稿の推敲をしてくださった、指導教官である早川尚男先生に謝辞を述べたいと思います。また、拙い説明にもつきあってくださり、的確なコメントをしてくださった、武末真二先生にも感謝します。投稿論文のプレプリントにいち早く反応してくださり、有用なコメントをたくさん頂き、西成活裕先生にも感謝の意を述べたいと思います。研究会や学会の場で、議論に応じてくださったりコメントをくださったりした、笹本智弘さん、日永田泰啓さんにも感謝します。また、G.M.Schütz さんには、国際学会で快く議論に応じてくださり、プレプリントにもコメントをくださり、非常に感謝しています。そして、研究室のみんなや友達にもなにかと助けてもらいました。最後に家族にも謝辞を述べたいと思います。

A 計算補足

A.1 1次元閉塞境界条件下でのブラウン運動するキンクのパワースペクトル

ここでは、1次元でのキンクのパワースペクトルが $\omega^{-3/2}$ に比例することの導出過程を簡単に説明する。詳細は文献 [22] にある。

キンクの位置を X とすると、位置 x における密度は、

$$\tau(x, t) = \alpha + (1 - 2\alpha)\theta(x - X(t)) \quad (117)$$

と階段関数を用いて表すことができる。

計算の概略を示すため、以下では $\tau(x, t) = \theta(x - X(t))$ の場合について考える。ここでは、キンクは $-L/2 \leq x \leq L/2$ の間で運動するとする。ある位置 x での相関関数は、

$$\langle \tau(y, t)\tau(y, 0) \rangle = \int_{-L/2}^y dx_0 \int_{-L/2}^y dx P_{st}(x_0) P(x, t; x_0, 0) \quad (118)$$

と書ける。ここで、 $P_{st}(x_0)$ は $X(t) = x$ となる定常確率分布で、

$$P_{st}(x_0) = \frac{1}{L} \quad (119)$$

であり、 $P(x, t; x_0, 0) = P$ は拡散方程式

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \quad (120)$$

を境界条件

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=L/2} = \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{x=-L/2} = 0 \quad (121)$$

の元で解いた解である。具体的には、

$$P(x, t; x_0, 0) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{n; \text{even}} e^{-D\lambda_n^2 t} \cos(\lambda_n x_0) \cos(\lambda_n x) + \frac{2}{L} \sum_{n; \text{odd}} e^{-D\lambda_n^2 t} \sin(\lambda_n x_0) \sin(\lambda_n x) \quad (122)$$

と表される。ここで、 $\lambda_n = \pi n/L, n = 1, 2, \dots$ である。拡散係数 D は、

$$D = \frac{\alpha(1-\alpha)}{1-2\alpha} \quad (123)$$

となることが知られている。そして、パワースペクトルは、Winner-Khinchin の定理

$$I(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-i\omega t} \langle \tau(y, t) \tau(y, 0) \rangle \quad (124)$$

を使って、

$$I(\omega) = \frac{\pi}{2} \delta(\omega) + \frac{2D}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^{n-1} \cos(2\lambda_n y)}{D^2 \lambda_n^4 + \omega^2} \quad (125)$$

と、計算される。 $\delta(\omega)$ はデルタ関数であるが、本質的なのは第二項で、振動項を無視できるとして、和を積分に置き換えることで評価してやると、

$$(\text{第二項}) \simeq \frac{\sqrt{2D}}{2L} \omega^{-3/2} \quad (126)$$

と、パワースペクトルが $\omega^{-3/2}$ に比例することがわかる。以上は x が連続であるとしているが、離散の場合も計算できる。

同様に密度プロファイルが (117) 式の場合も計算することができて、

$$I(\omega) \simeq \sqrt{\frac{\alpha(1-\alpha)(1-2\alpha)^3}{2L^2}} \omega^{-3/2} \quad (127)$$

となることがわかる。

A.2 $\sum_{j=1}^L \langle \tau_{j,1} \rangle (1 - \langle \tau_{j,2} \rangle)$ の計算

$x_2 > x_1$ の時、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^L \langle \tau_{j,1} \rangle (1 - \langle \tau_{j,2} \rangle) &= \sum_{j=1}^L ((\rho_{1;-} + (\rho_{1,+} - \rho_{1;-})\theta(j - x_1))(1 - \rho_{2;-} - (\rho_{2,+} - \rho_{2;-})\theta(j - x_2))) \\ &= \rho_{1,+}(1 - \rho_{2,+})L + (\rho_{2,+} - \rho_{2;-})\rho_{1,+}x_2 - (1 - \rho_{2;-})(\rho_{1,+} - \rho_{1;-})x_1 \quad (128) \end{aligned}$$

となるが、(87) 式を使うと、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^L \langle \tau_{j,1} \rangle (1 - \langle \tau_{j,2} \rangle) &= \rho_{1,+}(1 - \rho_{2,+})L - \rho_{1,+}(\langle N_2 \rangle - \rho_{2,+}L) + (1 - \rho_{2;-})(\langle N_1 \rangle - \rho_{1,+}L) \\ &= \rho_{1,+}\rho_{2;-}L - \rho_{1,+}\langle N_2 \rangle + (1 - \rho_{2;-})\langle N_1 \rangle \\ &= \rho_{1,+}\rho_{2;-}L - \rho_{1,+}\left(\frac{2\langle N_G \rangle + \langle N_R \rangle}{2}\right) + (1 - \rho_{2;-})\left(\frac{2\langle N_G \rangle - \langle N_R \rangle}{2}\right) \\ &= \frac{\rho_{2;-} - \rho_{1,+} - 1}{2}\langle N_R \rangle + \rho_{1,+}\rho_{2;-}L + (1 - \rho_{1,+} - \rho_{2;-})\langle N_G \rangle \quad (129) \end{aligned}$$

となることがわかる。同様に $x_1 > x_2$ の場合も計算できて、

$$\begin{aligned}
 \sum_{j=1}^L \langle \tau_{j,1} \rangle (1 - \langle \tau_{j,2} \rangle) &= \sum_{j=1}^L ((\rho_{1,-} + (\rho_{1,+} - \rho_{1,-})\theta(j - x_1))(1 - \rho_{2,-} - (\rho_{2,+} - \rho_{2,-})\theta(j - x_2))) \\
 &= \rho_{1,+}(1 - \rho_{2,+})L + (\rho_{2,+} - \rho_{2,-})\rho_{1,-}x_2 - (1 - \rho_{2,+})(\rho_{1,+} - \rho_{1,-})x_1 \\
 &= \rho_{1,+}(1 - \rho_{2,+})L - \rho_{1,-}(\langle N_2 \rangle - \rho_{2,+}L) + (1 - \rho_{2,+})(\langle N_1 \rangle - \rho_{1,+}L) \\
 &= \rho_{1,-}\rho_{2,+}L - \rho_{1,-}\left(\frac{2\langle N_G \rangle + \langle N_R \rangle}{2}\right) + (1 - \rho_{2,+})\left(\frac{2\langle N_G \rangle - \langle N_R \rangle}{2}\right) \\
 &= \frac{\rho_{2,+} - \rho_{1,-} - 1}{2}\langle N_R \rangle + \rho_{1,-}\rho_{2,+}L + (1 - \rho_{1,-} - \rho_{2,+})\langle N_G \rangle \quad (130)
 \end{aligned}$$

である。

A.3 $\langle N_R \rangle$ の計算

計算するのは、 $x_1 > x_2$ の場合は、

$$\begin{aligned}
 \langle N_R \rangle &= \langle N_R \rangle_0 e^{-\int_0^t dt' (2r_1 + \epsilon(1 - \rho_{2,+} + \rho_{1,-}))} \\
 &\quad + \epsilon \int_0^t dt' e^{\int_0^{t'} dt'' (2r_1 + \epsilon(1 - \rho_{2,+} + \rho_{1,-}))} (2L\rho_{1,-}\rho_{2,+} + 2(1 - \rho_{1,-} - \rho_{2,+})\langle N_G \rangle) \quad (131)
 \end{aligned}$$

であるが、まずは指数関数の中の積分を (107) 式と (108) 式を使って、

$$\begin{aligned}
 &\int_0^t dt' (1 - \rho_{2,+} + \rho_{1,-}) \\
 &= \int_0^t dt' \left(2\rho'_1 - \frac{\omega_+ - \omega_-}{2} \left(\frac{e^{-\gamma t'}}{e^{-\gamma t'} - C_h} + \frac{e^{-\gamma t'}}{e^{-\gamma t'} - C_l} \right) \right) \\
 &= 2\rho'_1 t + \frac{\omega_+ - \omega_-}{2\gamma} \ln \left(\frac{C_h - e^{-\gamma t}}{C_h} \frac{C_l - e^{-\gamma t}}{C_l} \right) \\
 &= 2\rho'_1 t + \frac{1}{\epsilon} \ln \left(\frac{(C_h - e^{-\gamma t})(C_l - e^{-\gamma t})}{C_h C_l} \right) \quad (132)
 \end{aligned}$$

と計算できるので、

$$e^{-\int_0^t dt' (2r_1 + \epsilon(1 - \rho_{2,+} + \rho_{1,-}))} = e^{-2(r_1 + \epsilon\rho'_1)t} \left(\frac{C_h C_l}{(C_h - e^{-\gamma t})(C_l - e^{-\gamma t})} \right) \quad (133)$$

ということがわかる。その結果、

$$\begin{aligned}
 \langle N_R \rangle &= \langle N_R \rangle_0 e^{-2(r_1 + \epsilon\rho'_1)t} \frac{C_+ C_-}{(C_+ - e^{-\gamma t})(C_- - e^{-\gamma t})} \\
 &\quad + \frac{\epsilon}{(C_+ - e^{-\gamma t})(C_- - e^{-\gamma t})} \left[L\rho'_1(1 - \rho'_1)C_+ C_- \frac{1 - e^{-2(r_1 + \epsilon\rho'_1)t}}{r_1 + \epsilon\rho'_1} \right. \\
 &\quad + \frac{e^{-\gamma t} - e^{-2(r_1 + \epsilon\rho'_1)t}}{2(r_1 + \epsilon\rho'_1) - \gamma} 2L \left(\frac{\gamma}{\epsilon} (C_+ - \rho'_1(C_- + C_+)) - (C_- + C_+)\rho'_1(1 - \rho'_1) \right) \\
 &\quad + 2 \frac{e^{-\gamma t} - e^{-2(r_1 + \epsilon\rho'_1)t}}{2(r_1 + \epsilon\rho'_1) - \gamma} \frac{\gamma}{\epsilon} (C_- - C_+) \langle N_G \rangle \\
 &\quad \left. + \frac{e^{-2\gamma t} - e^{-2(r_1 + \epsilon\rho'_1)t}}{r_1 + \epsilon\rho'_1 - \gamma} \left(-\frac{\gamma^2}{\epsilon^2} + \frac{\gamma}{\epsilon} (2\rho'_1 - 1) + \rho'_1(1 - \rho'_1) \right) L \right] \quad (134)
 \end{aligned}$$

となり、そして、 $x_2 > x_1$ の場合、

$$\begin{aligned}
\langle N_R \rangle = & \langle N_R \rangle_0 e^{-2(r_1 - \epsilon \rho'_2)t} \frac{C_+ C_-}{(C_+ - e^{-\gamma t})(C_- - e^{-\gamma t})} \\
& + \frac{\epsilon}{(C_+ - e^{-\gamma t})(C_- - e^{-\gamma t})} \left[L \rho'_2 (1 - \rho'_2) C_- C_+ \frac{1 - e^{-2(r_1 - \epsilon \rho'_2)t}}{r_1 - \epsilon \rho'_2} \right. \\
& + \frac{e^{-\gamma t} - e^{-2(r_1 - \epsilon \rho'_2)t}}{2(r_1 - \epsilon \rho'_2) - \gamma} 2L \left(\frac{\gamma}{\epsilon} (C_+ + \rho'_2 (C_- - C_+)) - (C_- + C_+) \rho'_2 (1 - \rho'_2) \right) \\
& + 2 \frac{e^{-\gamma t} - e^{-2(r_1 - \epsilon \rho'_2)t}}{2(r_1 - \epsilon \rho'_2) - \gamma} \frac{\gamma}{\epsilon} (C_- - C_+) \langle N_G \rangle \\
& \left. + \frac{e^{-2\gamma t} - e^{-2(r_1 - \epsilon \rho'_2)t}}{r_1 - \epsilon \rho'_2 - \gamma} \left(-\frac{\gamma^2}{\epsilon^2} + \frac{\gamma}{\epsilon} (2\rho'_2 - 1) + \rho'_2 (1 - \rho'_2) \right) L \right] \quad (135)
\end{aligned}$$

となる。

B driven lattice gas

Driven Lattice Gas(DLG) とは、粒子が格子上を移動するものを指し、同じサイトを二つ以上の粒子が占めることができない (排他相互作用) もののことである。粒子の有無をスピンのアップダウンに対応させることでスピン系の記述形式を応用できるだけでなく、大規模なシミュレーションがしやすく、応用がしやすいため、研究がなされてきた。

排他相互作用を持った lattice gas は、[3] によると、次のように定式化される。位置 x での粒子の有無を $\eta(x) = 0, 1$ で表すとき、系の configuration を $\eta = \{\dots, \eta(x), \dots\}, x = 0, \pm 1, \dots$ で表す。例えば、1 サイト目に粒子が無く 2 サイト目に粒子がある時、configuration は $\eta(0) = 0, \eta(1) = 1, \eta = 0, 1$ となる。そして、位置 x, y の $\eta(x), \eta(y)$ を configuration η から入れ換えたものを η^{xy} と書く。そして、その入れ替わる割合を $c(x, y, \eta)$ と書く。系が configuration η にある定常確率分布が、 η によって決められるエネルギー $H(\eta)$ を用いて

$$P(\eta) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H(\eta)) \quad (136)$$

$$H(\eta) = J \sum_x \eta(x) \eta(x+1) \quad (137)$$

と Gibbs 型に書けるとする。 β は逆温度である。この場合、定常である条件

$$\frac{d}{dt} P(\eta) = 0 \quad (138)$$

を満たすので、詳細釣り合いの式、

$$c(x, y, \eta) P(\eta) = c(x, y, \eta^{xy}) P(\eta^{xy}) \quad (139)$$

より、

$$c(x, y, \eta) = c(x, y, \eta^{xy}) \exp(-\beta(H(\eta^{xy}) - H(\eta))) \quad (140)$$

が成り立つ。

この系に外場 F をかけてみると、エネルギーは、

$$H'(\eta) = J \sum_x \eta(x) \eta(x+1) + \sum_x (F \cdot x) \eta(x) \quad (141)$$

と、書ける。 F は一様で時間によらないとする。この場合、定常確率は

$$P(\eta) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H(\eta) - \beta \sum_x (F \cdot x) \eta(x)) \quad (142)$$

と、表わされると仮定すると、詳細釣り合の式は、

$$c(x, y, \eta) = c(x, y, \eta^{xy}) \exp[-\beta(H(\eta^{xy}) - H(\eta)) - \beta(F \cdot (x - y))(\eta(x) - \eta(y))] \quad (143)$$

となる。

粒子が隣にしか行かない場合、 $|x - y| \neq 1$ の時 $c(x, y, \eta) = 0$ と書ける。また、 x から $x + 1$ に移る場合と $x + 1$ から x に移る場合で遷移率が違う場合、 $c(x, x + 1, \eta)$ を具体的に書くと、

$$c(x, x + 1, \eta) = w(x, x + 1) \eta(x) (1 - \eta(x + 1)) + w(x + 1, x) \eta(x + 1) (1 - \eta(x)) \quad (144)$$

である。ハミルトニアン $H(\eta)$ が 0 の時、DLG は ASEP と呼ばれる確率過程と等しくなる。遷移率 $w(x, x + 1), w(x + 1, x)$ がそれぞれ x に依らず $w(x, x + 1) = p, w(x + 1, x) = q$ とするとき、

$$q = p e^{-\beta F} \quad (145)$$

となることがわかる。 p は時間をスケールすることで 1 にできる。すると、これは ASEP とまったく同じものである。また、 $q \rightarrow 0$ の場合は、外場が $F \rightarrow \infty (\beta \rightarrow 0)$ の極限に対応しており、 $q \rightarrow 1$ の場合は $F \rightarrow 0 (\beta \rightarrow \infty)$ の極限に対応している。

参考文献

- [1] G.M.Schütz. *Exact Solvable Models for Many-Body Systems Far from Equilibrium*, volume 19 of *Phase Transitions and Critical Phenomena*. Academic, London, (2001).
- [2] B.Schmittmann and R.K.P.Zia. *Statistical Mechanics of Driven Diffusive Systems*, volume 17 of *Phase Transitions and Critical Phenomena*. Academic, London, (1994).
- [3] H.Spohn. *Large Scale Dynamics of Interacting Particle Systems*. Springer-Verlag, New York, (1991).
- [4] T.M.Liggett. *Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter, and Exclusion Processes*. Springer-Verlag, New York, (1999).
- [5] S.Sandow and G.M.Schütz. *Europhys.Lett*, **26**:7, (1994).

- [6] B.Derrida, M.R.Evans, V.Hakeem, and V.Pasquier. *J.Phys.A*, **26**:1493, (1993).
- [7] T.Sasamoto. *J.Phys.A*, **32**:7109, (1999).
- [8] M.Uchiyama, S.Sasamoto, and M.Wadati. *J.Phys.A*, **37**:4958, (2004).
- [9] G.M.Schütz. *J.Stat.Phys*, **88**:427, (1997).
- [10] V.B.Priezzhev. *Phys.Rev.Lett*, **91**:050601, (2003).
- [11] N.Rajewsky, L.Santen, A.Schadschneider, and M.Schreckenberg. *J.Stat.Phys*, **92**:151, (1998).
- [12] G.M.Schütz and E.Domany. *J.Stat.Phys*, **72**:277, (1993).
- [13] H.Hinrichsen. *J.Phys.A*, **29**:3659, (1996).
- [14] M.R.Evans, N.Rajewsky, and E.R.Speer. *J.Stat.Phys*, **95**:45, (1999).
- [15] J.Gier and B.Nienhuis. *Phys.Rev.E*, **59**(5):4899, (1999).
- [16] G.M.Schütz. *J.Phys.A*, **36**:R339, (2003).
- [17] T.Sasamoto. *J.Phys.Soc.Japan*, **69**:1055, (2000).
- [18] B.Derrida, J.L.Lebowitz, and E.R. Speer. *J.Stat.Phys*, **89**:135, (1997).
- [19] P.A.Ferrari. *Prob.Theo.Rel.Fields*, **91**:81, (1992).
- [20] A.B.Kolomeisky, G.M.Schütz, E.B.Kolomeisky, and J.P.Straley. *J.Phys.A*, **31**:6911, (1998).
- [21] L.Santen and C.Appert. *J.Stat.Phys*, **106**:187, (2002).
- [22] S.Takesue, T.Mitsudo, and H.Hayakawa. *Phys.Rev.E*, **68**:015103(R), (2003).
- [23] M.L.Mehta. *Random Matrices*. Academic Press, Boston, 2 edition, (1991).
- [24] K.Johanson. *Commun.Math.Phys*, **209**:437, (2000).
- [25] M.Prähofer and H.Spohn. *In and out of equilibrium*, **51**:185, (2002). cond-mat/0212519.
- [26] T.Sasamoto and T.Imamura. *J.Stat.Phys*, **115**(3-4):749, (2004).
- [27] T.Imamura and T.Sasamoto. *Nucl.Phys.B*, **699**(3):503, (2004).
- [28] T.M.Ligget. *Interacting Particle Systems*. Springer-Verlag, New York, (1985).
- [29] F.Spitzer. *Adv.Math*, **5**:246, (1970).

- [30] D.Helbing. *Rev.Mod.Phys*, **73**:1067, (2001).
- [31] J.Matsukidaira and K.Nishinari. *Phys.Rev.Lett*, **90**:088701, (2003).
- [32] J.M.Burgers. *The Nonlinear Diffusion Equation*. Reidel, Dordrecht, (1974).
- [33] Y.Hieida. *J.Phys.Soc.Japan*, **67**(2):369, (1998).
- [34] T.Nagatani. *J.Phys.A*, **29**:6531, (1996).
- [35] V.Belitsky, J.Krug, E.J.Neves, and G.M.Schütz. *J.Stat.Phys*, **103**:945, (2001).
- [36] E.Pronina and A.B.Kolomeisky. *J.Phys.A*, **37**:9907, (2004).
- [37] V.Popkov and G.M.Schütz. *J.Stat.Phys*, **112**:523, (2003).
- [38] 光藤哲也. 一次元非対称単純排他過程の交通流への応用. 卒業論文, (2002).
- [39] F.H.L Essler and V.Rittenberg. *J.Phys.A*, **30**:3375, (1996).
- [40] 笹本智弘. 一次元非対称単純排他過程の厳密解. 物性研究, **79**(6):881, 3 2003.
- [41] M.Kardar, G.Parisi, and Y.Zhang. *Phys.Rev.Lett*, **56**:889, (1986).
- [42] 巽友正. 流体力学, volume 21 of 新物理学シリーズ. 培風館, (1982).
- [43] T.Halpin-Healy and Y-C.Zhang. Kinetic rougening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. aspects of multidisciplinary statistical mechanics. *Phys.Rep.*, **254**:215, (1995).
- [44] K.Nagel and M.Schreckenberg. *J.Phys.I*, **2**:2221, (1992).
- [45] K.Krebs and S.Sandow. *J.Phys.A*, **30**:3165, (1997).
- [46] Y.Hieida and T.Sasamoto. *J.Phys.A*, **37**(42):9873, (2004).
- [47] W.H.Press, S.A.Teukolsky, W.T.Vetters, and B.P.Flannery(丹慶勝市奥村晴彦 佐藤俊郎 小林誠-訳). *NUMERICAL RECIPES in C* [日本語版]. 技術評論社, (1993).
- [48] L.H.Gwa and H.Spohn. *Phys.Rev.A*, **46**:844, (1992).
- [49] O.Golinelli and K.Mallick. *J.Phys.A*, **37**:3321, (2004).
- [50] T.Mitsudo and H.Hayakawa. *J.Phys.A*, **38**:3087, (2005).
- [51] T.Tatsumi and H.Tokunaga. *J.Fluid.Mech*, **65**(3):581, (1974).
- [52] 光藤哲也 早川尚男. 物性研究, **82**(2):275, (2004).