

双曲型不変集合のマルコフ分割

北大 理学部 倉田雅弘

§1. 序

$f: M \rightarrow M$ を微分同相, $A \subset M$ を f の双曲型不変集合とすると, A の拡張である双曲型不変集合 A' があって, それは有型型 subshift の商になっている ([5]).

ここでは, 上の A' と有限型 subshift Σ を適当にとると, Σ は A のマルコフ分割から作られるようにできることを示そう。これは, Anosov 微分同型に対しては Sinai が, Axiom A 微分同型の非逃走点集合に対しては Bowen が証明している ([1])。

定義 $f: M \rightarrow M$ を微分同相とする。compact f -不変集合 $A \subset M$ が双曲型とは以下をみたすときである。 M の接ベクトル・バンドルの A への制限 $T_A M$ が,

$$T_A M = E^s \oplus E^u \quad (Tf\text{-不変な subbundle の和})$$

になって, $c > 0$, $0 < \lambda < 1$ があって, $n \geq 0$ に対して

$$v \in E^s \text{ のとき } \|Tf^n v\| \leq c\lambda^n \|v\|$$

$$v \in E^u \text{ のとき } \|Tf^{-n} v\| \leq c\lambda^n \|v\|。$$

§ 2. 双曲型不変集合の pseudo-orbit

M 上の点列 $\{x_n\}_{n=j, \dots, k}$ ($j = -\infty$ 又は $k = +\infty$ でもよい) が $n = j, \dots, k-1$ に対して

$$d(f(x_n), x_{n+1}) < \varepsilon$$

を満たすとき, $f: M \rightarrow M$ の ε -pseudo-orbit という。

pseudo-orbit $\{x_n\}_{n=j, \dots, k}$ に対して $x \in M$ が

$$d(f^n(x), x_n) \leq \delta \quad \text{for } n = j, \dots, k$$

となるとき, x は $\{x_n\}_{n=j, \dots, k}$ を δ -shadow するという。

次の補題は [5, 定理3] から, みちびかれる。Axiom A 微分同相の非逃走点集合に対しては, Bowen が証明した。

補題 2.1 Λ を双曲型不変集合とする。 $\delta > 0$ に対して, $\varepsilon > 0$ があって, Λ の任意の ε -pseudo-orbit は, ある点 $x \in M$ によって, δ -shadow される。更に x は $d(f^n(x), \Lambda) \leq \delta$ となるようにとれる。

注 Frank-Selgrade は, $\{x_n\}$ を shadow する点 x は, $x \in W_{loc}^s(\Lambda) \cap W_{loc}^u(\Lambda)$ となると主張しているが, これは誤りである。

系 2.2 $\delta > 0$ に対して, $\varepsilon > 0$ と Λ の近傍 W があって

以下をみたす。 $x \in W$ が

$$d(f^n(x), x) < \varepsilon$$

$$f^k(x) \in W \quad \text{for } k = 1, \dots, n$$

ならば、周期 n の周期点 $p \in W$ があって

$$d(f^k(x), f^k(p)) \leq \delta \quad \text{for } k = 1, \dots, n$$

となる。

§3. 双曲型不変集合のマルコフ分割

Λ を微分同相 $f: M \rightarrow M$ の双曲型不変集合, $\varepsilon > 0$ を十分小さいものとする。

定義 $R \subset \Lambda$ の直径が ε より小さく, $x, y \in R$ ならば $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y) \neq \emptyset$, $W_\varepsilon^s(x) \cap W_\varepsilon^u(y) \in R$ となるとき矩形という。更に, $R = \overline{\text{int } R}$ となるとき, 矩形 R は proper という。ただし, $\text{int } R$ は, R の Λ における interior, $\overline{\text{int } R}$ は, $\text{int } R$ の閉包。

定義 Λ の有限被覆 $\mathcal{R}$ は, 次をみたすとき, Λ のマルコフ分割という。

- (1) $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$, 各 R_i は Λ での proper な矩形。
- (2) $R_i \cap R_j = \partial R_i \cap \partial R_j$ ($i \neq j$)。ただし, $\partial R_i = R_i - \text{int } R_i$ 。
- (3) $x \in \text{int } R_i \cap \text{int } f^{-1}R_j$ のとき, $fW_\varepsilon^s(x, R_i) \subset W_\varepsilon^s(fx, R_j)$,

$f^{-1}W^n(fx, R_j) \subset W^n(x, R_i)$. 同様に $W^s(x, R_i) = W_\varepsilon^s(x) \cap R_i$.

定理 3.1 Λ を微分同相 $f: M \rightarrow M$ の双曲型不変集合. U を Λ の近傍とする. 双曲型不変集合 Λ' で $\Lambda \subset \Lambda' \subset U$ となるものがあって, Λ' はマルコフ分割をもつ.

証明

$\delta > 0$ を十分小さくとる. 補題 2.1 から $\varepsilon > 0$ があって, Λ の ε -pseudo-orbit は, ある $x \in M$ で δ -shadow される. 更に $f^n(x) \in U$ ($n \in \mathbb{Z}$) となる. $\gamma > 0$ を $\gamma < \frac{\varepsilon}{2}$

$x, y \in U, d(x, y) < \gamma \implies d(fx, fy) < \frac{\varepsilon}{2}$ となるように選ぶ. $P = \{p_1, \dots, p_r\}$ を Λ の γ -dense な有限集合とする.

$\Sigma(P) = \{(q_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in P^{\mathbb{Z}} \mid d(fq_i, q_{i+1}) < \varepsilon \text{ for } i \in \mathbb{Z}\}$ は有限型 subshift になる. 写像

$$\theta: \Sigma(P) \longrightarrow U$$

を, $\theta((q_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = x$, x は $(q_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ を δ -shadow する点, で定義する.

$$\Lambda' = \theta(\Sigma(P))$$

とすると, $\Lambda \subset \Lambda' \subset U$ で, ε が十分小さいとき, Λ' は双曲型不変集合である.

$$T_S = \{\theta((q_i)_{i \in \mathbb{Z}}) \mid (q_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \Sigma(P), q_0 = p_s\}$$

とすると、 T_s は矩形で、 $\{T_s\}_{s=1, \dots, r}$ は I' の被覆となる。

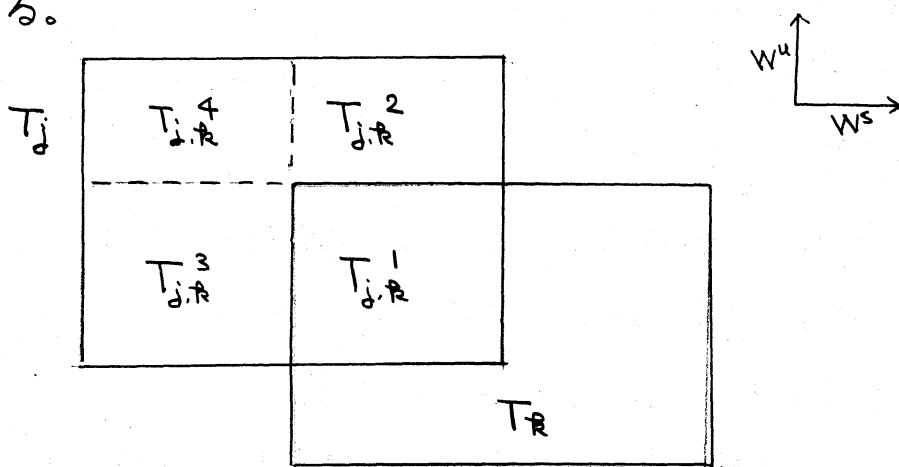
$$T_{j,R}^1 = T_j \cap T_R$$

$$T_{j,R}^2 = \{x \in T_j \mid W^u(x, T_j) \cap T_R \neq \emptyset, W^s(x, T_j) \cap T_R = \emptyset\}$$

$$T_{j,R}^3 = \{x \in T_j \mid W^u(x, T_j) \cap T_R = \emptyset, W^s(x, T_j) \cap T_R \neq \emptyset\}$$

$$T_{j,R}^4 = \{x \in T_j \mid W^u(x, T_j) \cap T_R = \emptyset, W^s(x, T_j) \cap T_R = \emptyset\}$$

とする。



$$R(x) = \bigcap \{T_{j,R}^n \mid x \in T_j, T_R \cap T_j \neq \emptyset, x \in T_{j,R}^n\}$$

$$\tilde{\mathcal{R}} = \{\text{int } R(x)\} = \{R_1, \dots, R_m\}$$

ただし $R_i \neq \emptyset$ とする。 I' は、Axiom A 微分同相の basic set の場合と違って、local product structure をもたないので、 $\text{int } T_j$, $\text{int } T_{j,R}^n$ は開矩形にはならない。しかし、後にのべる補題 3.2 ~ 3.4 によって、 R_i は開矩形になる。 R_i は、いずれらの T_j に含まれているので、 $\bar{R}_i$ は矩形である。従って、Bowen [4, p78-83] と同様にして、

$$\mathcal{R} = \{\bar{R}_1, \dots, \bar{R}_m\}$$

は Λ' のマルコフ分割となる。

補題 3.2 $x \in T_i, y \in W^s(x, T_i), x \in \text{int } W^u(x, T_i),$
 $y \notin \text{int } W^u(x, T_i)$ ならば, T_j が存在して, $x \in T_j, y \notin T_j$
 となる。ここで $\text{int } W^u(x, T_i)$ は, $W_\varepsilon^u(x) \cap \Lambda'$ の部分集
 合としての interior。

補題 3.3 (1) $\partial T_j \ni z \iff z \notin \text{int } W^s(z, T_j)$ 又は,
 $z \notin \text{int } W^u(z, T_j)$ 。
 (2) $\partial R(x) \ni y \iff y \notin \text{int } W^s(y, R(x))$ 又は, $y \notin \text{int } W^u(y, R(x))$ 。
 さらに, $\text{int } W^u(y, R(x))$ は, $W_\varepsilon^u(y) \cap \Lambda' \setminus z$ の interior。

補題 3.4 (1) $z \in \partial R_i, z \notin \text{int } W^s(z, R_i)$
 $\implies$ 任意の $y \in W^u(z, R_i)$ に対して, $y \notin \text{int } W^s(z, R_i)$ 。
 (2) $z \in \partial R_i, z \notin \text{int } W^u(z, R_i)$
 $\implies$ 任意の $y \in W^s(z, R_i)$ に対して, $y \notin \text{int } W^u(z, R_i)$ 。

§4. 有限型 subshift の構成とその応用

$\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_n\}$ を双曲型不変集合 Λ のマルコフ分割と
 すると, 以下のように有限型 subshift Σ と semi-
 conjugacy $\pi: \Sigma \longrightarrow \Lambda$ (即ち, π は Σ への写像で,
 $f\pi = \pi\rho$, ρ は shift map) が構成できる。
 $n \times n$ 0-1 行列 $T = (t_{ij})$ を

$$\begin{array}{ll} \text{int } R_i \cap \text{int } f^{-1} R_j \neq \emptyset & \text{のとき} \quad t_{ij} = 1 \\ \text{他のとき} & t_{ij} = 0 \end{array}$$

とする。

$\Sigma = \{(a_i)_{i \in \mathbb{Z}} \in \mathcal{R}^{\mathbb{Z}} \mid t_{n_i, n_{i+1}} = 1 \text{ ただし } a_i = R_{n_i}\}$,
 $\mathcal{R}$, $\mathbb{Z}$ の位相を離散位相として, $\mathcal{R}^{\mathbb{Z}}$ の位相は compact-open 位相とする。shift map $\rho: \Sigma \rightarrow \Sigma$ は,
 $\rho((a_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = (a'_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ ただし $a'_i = a_{i+1}$ で定義する。Semi-conjugacy $\pi: \Sigma \rightarrow \Lambda$ は, $\pi((a_i)_{i \in \mathbb{Z}}) = \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^{-i}(a_i)$
 で与えられる。

定理 4.1 双曲型集合 Λ と, その近傍 $\cup$ に対して, 双曲型
 不変集合 Λ' , 有限型 subshift Σ と写像 $\pi: \Sigma \rightarrow \Lambda'$ が
 あって, 以下をみたす。

(1) π は semi-conjugacy 即ち, π は Λ' の上への写
 像で $f\pi = \pi\rho$ 。

(2) π は finite-to-one, 即ち, $N > 0$ があって, 全
 ての $x \in \Lambda'$ に対して, $\#\pi^{-1}(x) \leq N$ 。

証明

(1) は, 定理 3.1 と, 上に書いたことからでてくる。(2) は,
 Λ' が マルコフ分割をもつことから, [2] より, みちがれる。

定義 $A \subset M$ が minimal set

$\iff$ (1) A は f -不変な閉集合で, $A \neq \emptyset$, (2) $B \subset A$ が

f -不変な閉集合で $B \neq \emptyset$ ならば $B = A$ 。

定理 3.1 と [2] から

系 4.2 A が双曲型不変集合で minimal set $\Rightarrow \dim A = 0$ 。

定義 f の zeta 函数 ζ_f は以下で与えられる formal power series である。

$$\zeta_f(z) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_m}{m} z^m\right),$$

ここで、 N_m は f の周期 m の周期点の個数とする。

定理 4.1 と [8] から

系 4.3 A を双曲型不変集合、 U をその近傍とすると、双曲型不変集合 A' で、 $A \subset A' \subset U$ 、 $\zeta_{f|_{A'}}$ は有理函数となるものがある。

§5 flow の場合

$f_t: M \rightarrow M$ を C^r -flow ($r \geq 1$) とする。以下 $A \subset M$ は f_t の不動点を含まないものとする。

定義 A は以下をみたすとき、flow f_t の双曲型不変集合という。

(1) A は f_t -不変な compact 集合で

(2) $T_\lambda M$ は Tf_t -不変な subbundle の和

$$T_\lambda M = E^s \oplus E^u \oplus E'$$

にあっており, $c > 0$, $0 < \lambda < 1$ があり, $t \geq 0$ に対し

$$v \in E^s \text{ のとき } \|Tf_t v\| \leq c\lambda^t \|v\|$$

$$v \in E^u \text{ のとき } \|Tf_{-t} v\| \leq c\lambda^t \|v\|,$$

(3) E' は flow 方向の一次元 subbundle.

flow の双曲型不変集合も, 適当に拡張すると, 有限型 subshift の suspension の商になる。 Σ を有限型 subshift,

$$\varphi: \Sigma \longrightarrow (0, \infty)$$

を連続写像とする。

$$Y = \{(a, t) \in \Sigma \times \mathbb{R} \mid 0 \leq t \leq \varphi(a)\}$$

とし,

$$\Sigma(\varphi) = Y / \sim,$$

ただし, $(a, \varphi(a)) = (\varphi(a), 0)$ とする。 $\Sigma(\varphi)$ には,

suspension flow

$$\text{sus}_t = \text{sus}_t(\varphi): \Sigma(\varphi) \longrightarrow \Sigma(\varphi)$$

が, $t \geq 0$ に対し,

$$\text{sus}_t([a, s]) = [\varphi^{\mathbb{R}}(a), v]$$

ただし,

$$v = t + s - \sum_{j=0}^{n-1} \varphi(\varphi^j(a))$$

$$0 \leq v \leq f(p^{\mathbb{R}}(a)).$$

で定義される。 $t \leq 0$ に対しても同様。

定義 Σ を有限型 subshift, $\varphi: \Sigma \rightarrow (0, \infty)$ を Lipschitz 写像とする。このとき

$$\text{sus}_t(p, \varphi): \Sigma(p, \varphi) \rightarrow \Sigma(p, \varphi)$$

を双曲型 symbolic flow という。

次は Bowen [3] の拡張である。微分同相の場合と同様に、マルコフ分割のようなものを構成し、それから双曲型 symbolic flow を作る。

定理 4.1 ([7]) Λ を flow f_t の双曲型不変集合で、不動点を含まないものとする。 U を Λ の近傍とすると、双曲型不変集合 Λ' で、 $\Lambda \subset \Lambda' \subset U$ となるものと、双曲型 symbolic flow $\text{sus}_t: \Sigma(p, \varphi) \rightarrow \Sigma(p, \varphi)$, 写像 $\pi: \Sigma(p, \varphi) \rightarrow \Lambda'$ があって、以下をみたす。

(1) π は semi-conjugate 即ち、 π は Λ' の上への写像で、 $f_t \cdot \pi = \pi \circ \text{sus}_t$ 。

(2) π は finite-to-one。

系 4.2 flow の双曲型不変集合 Λ が minimal set のとき、 $\dim \Lambda = 1$ 。

References

- [1] R. Bowen, Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms, Amer. J. Math., 92 (1970), 725-745.
- [2] ———, Markov partitions and minimal sets for Axiom A diffeomorphisms, Amer. J. Math., 92 (1970), 907-918.
- [3] ———, Symbolic dynamics for hyperbolic flows, Amer. J. Math., 95 (1973), 429-460.
- [4] ———, "Equilibrium States and Ergodic Theory of Anosov diffeomorphisms," Lecture notes in Math., 470, Springer.
- [5] M. Kurata, Hartman's theorem for hyperbolic sets, Nagoya Math. J., 69 (1977).
- [6] ———, Markov partitions of hyperbolic sets,
- [7] ———, in preparation
- [8] A. Manning, Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions, Bull. London Math. Soc., 3 (1971), 215-220.