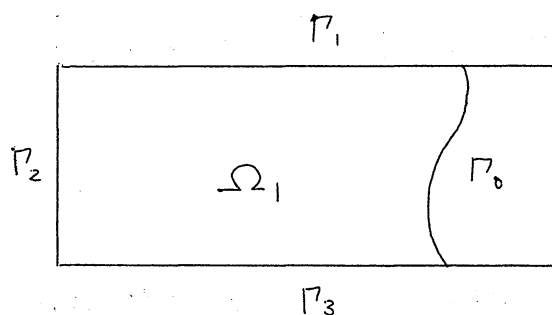


粘性流体の境界の捕捉に関する話題

九大理 山本野人 (Nobito Yamamoto)

序、 移動する境界の捕捉の方法は、境界を直接追跡する方法と、固定領域の中で問題を解く方法とに大別される。境界が切れたり尖ったり、あるいは消滅したりする場合を含む問題では第二の方法が扱い易そうに思える。ここでは非圧縮流体に関する Navier-Stokes 方程式の移動境界問題について、固定領域で扱う方法を探る。

I. 問題



境界 Γ_i ($i=0,1,2,3$) で囲まれた二次元領域 Ω_1 において、Navier-Stokes 方程式

$$(I-1) \quad \rho \frac{Du_i}{Dt} = \sigma_{ij,j} \quad \text{in } \Omega_1$$

$$(I-2) \quad u_{j,j} = 0$$

をみたす速度 $u(x, t)$, 圧力 $P(x, t)$ を求めたい。ただし,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\sigma_{ij} = -P \delta_{ij} + 2\mu e_{ij} \quad : \text{stress tensor}$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad : \text{rate of strain tensor}$$

で, ρ は密度, μ は粘性である。境界条件は,

$$(I-3) \quad \sigma_{ij} n_j = 0 \quad \text{on } \Gamma_0$$

$$(I-4) \quad u = \tau \quad \text{on } \Gamma_1, \Gamma_3$$

$$(I-5) \quad u = f \quad \text{on } \Gamma_2$$

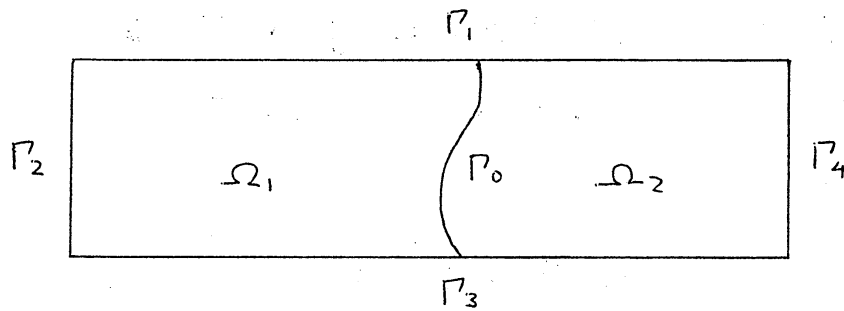
f と τ は与えられていて, f は Ω_1 に流入する速度, τ は Γ_1, Γ_3 の接線方向を向いた速度とする。 Γ_0 は移動境界で, Γ_0 上の速度 u に従って動いていく。すなわち, Γ_0 上の点の位置ベクトルを $x(t)$ とすると,

$$(I-6) \quad \frac{Dx}{Dt} = u(x, t) \quad \text{on } \Gamma_0(t)$$

(I-1) ~ (I-6) をみたす $u, P, \Gamma_0(t)$ を求める問題を [I] としよう。

II. 二相問題

[I] を固定領域で解くために, 外部領域に密度と粘性の小さな流体の存在を考えて, 二相問題として扱うことを試みる。



$$(II-1) \quad \rho_1 \frac{Du_i}{Dt} = \sigma_{ij,j} \quad \text{in } \Omega_1$$

$$(II-2) \quad \rho_2 \frac{Du_i}{Dt} = \sigma_{ij,j} \quad \text{in } \Omega_2$$

$$(II-3) \quad u_{j,j} = 0 \quad \text{in } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$$

ρ_1, ρ_2 はそれぞれ Ω_1, Ω_2 の中で一定で,

$$\rho_2 = \varepsilon \rho_1$$

また粘性 μ は, 定数 ν によって

$$\mu = \begin{cases} \rho_1 \nu & \text{in } \Omega_1 \\ \rho_2 \nu & \text{in } \Omega_2 \end{cases}$$

とあらわされるものとする。圧力 P も Ω_1, Ω_2 それぞれの中で, 変数 p_1, p_2 によって

$$P = \begin{cases} \rho_1 p_1 & \text{in } \Omega_1 \\ \rho_2 p_2 & \text{in } \Omega_2 \end{cases}$$

と書く。すると stress tensor は,

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \rho_1 (-p_1 \delta_{ij} + \nu e_{ij}) \equiv \rho_1 s_{ij} & \text{in } \Omega_1 \\ \rho_2 (-p_2 \delta_{ij} + \nu e_{ij}) \equiv \rho_2 t_{ij} & \text{in } \Omega_2 \end{cases}$$

とあらわされる。 Γ_0 上では $\sigma_{ij} n_j$ の連続性

$$(II-4) \quad \rho_1 s_{ij} n_j = \rho_2 t_{ij} n_j \quad \text{on } \Gamma_0$$

を要請する。他の境界では [I] と同じ条件

$$(II-5) \quad u = \tau \quad \text{on } \Gamma_1, \Gamma_3$$

$$(II-6) \quad u = f \quad \text{on } \Gamma_2$$

を課し、 Γ_4 では自由境界条件

$$(II-7) \quad \sigma_{ij} n_j = 0 \quad \text{on } \Gamma_4$$

または、 Γ_2 と同じ Dirichlet 条件

$$(II-7') \quad u = f$$

を考えることにする。移動境界 Γ_0 は [I] と同様

$$(II-8) \quad \frac{Dx}{Dt} = u$$

によって動く。(II-1)~(II-8) をみたす u, p, η を求める問題を [II] としよう。(II-8) から要請されることだが、 u としては Ω 全体で H^1 程度の連続性を持つものを想定している。

さて、[I], [II] がともに解をもつと仮定したとき、 ε を非常に小さくすれば、[II] の解は [I] の解に近づくだろうか。このことは、 Ω_1 の流体にとって、 Γ_0 上の境界条件 (II-4) が (I-3) に近づくかどうかにか懸っていると思われる。(II-4) の両辺を ρ で割れば、

$$\sigma_{ij} n_j = \varepsilon \tau_{ij} n_j$$

したがって、 $\varepsilon \rightarrow 0$ としたときに $\tau_{ij} n_j$ が有界であれば、(II-4) は、 Ω_1 の流体に対する (I-3) に近づく。今のと

くる、これについて厳密な議論をする準備はないが、数値実験からは、このことを示唆する結果が得られている。

そこで、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、 $|S_{ij}n_j| \rightarrow 0$ となるという予想を立て、その根拠について考えてみよう。

まず、 Ω_1 の流体が Ω_2 の流体から受ける応力 $\varphi_i n_j$ は、 Ω_2 の流体の密度・粘性が小さくなるにつれて増大することはないだろうと考えられる。すなわち、

$$\exists M > 0 \quad \text{s.t.} \quad |S_{ij}n_j| < M$$

しかし、 Ω_2 の流体の密度・粘性が小さくなると、 Ω_1 の流体から受ける慣性力の影響の増大と粘性抵抗の減少によって、 Ω_2 での速度の変化が増え、その結果 $|t_{ij}n_j|$ が増大して、 $|S_{ij}n_j|$ の 0 への収束を妨げるかもしれない。これについては次の様に考える。 Ω_1 の流体に対しては、

$$(II-9) \quad \frac{Du_i}{Dt} = S_{ij}n_j \quad \text{in } \Omega_1$$

$$(II-10) \quad u_{j,j} = 0 \quad \text{in } \Omega_1$$

$$(II-11) \quad u = \tau \quad \text{on } \Gamma_1, \Gamma_3$$

$$(II-12) \quad u = f \quad \text{on } \Gamma_2$$

が成り立つ。 Γ_0 上の $S_{ij}n_j$ の値を S_ε と書くと、

$$(II-13) \quad S_{ij}n_j = S_\varepsilon \quad \text{on } \Gamma_0$$

逆に Ω_1 で (II-9) ~ (II-13) をみたす u, φ_i を求める移動境界問題を考えると、その解に対する ε の影響は、

(II-13)を通してのみ与えられる。そこで、 Γ_0 上でのデータ S_ε が有界ならば、(II-9)~(II-13)の解 u は、もし存在すれば有界だ、と仮定することは自然だろう。この仮定が実際に成り立つことが示されれば、[II]の解 u の Γ_0 上での値 (これを g と書く) は有界だと考えることが出来る。このとき、 Ω_2 の流体に対して、

$$(II-14) \quad \frac{Du_i}{Dt} = t_{ij,j} \quad \text{in } \Omega_2$$

$$(II-15) \quad u_{ij,j} = 0 \quad \text{in } \Omega_2$$

$$(II-16) \quad u = \tau \quad \text{on } \Gamma_1, \Gamma_3$$

$$(II-17) \quad t_{ij}n_j = 0 \quad \text{or } u = f \quad \text{on } \Gamma_4$$

$$(II-18) \quad u = g \quad \text{on } \Gamma_0$$

が成り立つ。(II-14)~(II-15)をみたす u , p_2 を求める問題を考えよう。今度は、 Γ_0 の動きは (II-18) によって与えられている。この問題に対しても、これかもし解を持つば、 Γ_0 上のデータ g が有界ならば解も有界だ、と仮定するのは不自然ではない。そこで、 $t_{ij}n_j$ の有界性が予想され、はじめて予想を立てた根拠となるのである。

(p_2 の不定性を除くうえでは、(II-7)の形の自然境界条件の方が、都合が良いように思う。)

III. 境界条件の取り込み

適当な試験関数の空間 X , M を用いて、[II]の弱形式

を考える。 $(f, g) = \int_{\Omega} fg \, dx$ とし、

$$(III-1) \quad \left(\rho \frac{Du_i}{Dt}, v_i\right) = -(\rho S_{ij}, v_{i,j}) \quad \forall v \in X$$

$$(III-2) \quad (u_{i,j}, \lambda) = 0 \quad \forall \lambda \in M$$

ただし、 $S_{ij} = -p \delta_{ij} + \nu e_{ij}$ 。 (III-1), (III-2) をみたす

u, p を求める問題を [III] としよう。境界条件については、

$$v = 0 \quad \text{on } \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \quad \forall v \in X$$

とすれば、 [III] は (II-5) ~ (II-7) を取り込む。 ρ が Γ_0 上

でステップ関数様のキ"ャップ"をもつときには、 [III] は (II-4)

をも含む。というのは、

$$\begin{aligned} -(\rho S_{ij}, v_{i,j}) &= -(\rho S_{ij}, v_{i,j})_{\Omega_1} - (\rho S_{ij}, v_{i,j})_{\Omega_2} \\ &= ((\rho S_{ij})_{,j}, v_i)_{\Omega_1} + ((\rho S_{ij})_{,j}, v_i)_{\Omega_2} - \int_{\Gamma_0} v_i [\rho S_{ij}] n_j \, ds \end{aligned}$$

となり、 Γ_0 上の ρS_{ij} のキ"ャップ" $[\rho S_{ij}]$ について、

$$[\rho S_{ij}] n_j = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho S_{ij} n_j|_{\Omega_1} = \rho S_{ij} n_j|_{\Omega_2} \quad \text{on } \Gamma_0$$

$$\Rightarrow S_{ij} n_j|_{\Omega_1} = \varepsilon \cdot S_{ij} n_j|_{\Omega_2} \quad \text{on } \Gamma_0$$

を得るからである。そこで、 Γ_0 上でキ"ャップ"をもつ ρ が与

えられれば、固定領域 Ω で [III] を解くことで、 [II] の弱解

を得ることになる。境界の移動は、 ρ の不連続点の移動

が担う。 [III] に対する数値解法としては、時間方向に差

分法、空間方向には有限要素法を用いて解くことが考え

られる。 ρ の扱いについては、 T. Nakayama らが [1]

で用いている手法が有効だろうということとを、東京大学の岡本氏によって示唆された。[I]では、ふたつの密度の異なる流体を、二種のマーカーを用いて区別している。マーカーの動きを追いつながら、方程式を全領域で解き、有限要素を移動したり、変形・再分配したりはしていない。すなわち、 u, p については Euler 的、 ρ については Lagrange 的に取り扱っている（粘性 μ の変化はない）。[II] は粘性の変化も、 ρ の変化を通して扱っている点か異なるが、現在行っている数値計算の動向から見て、十分適用可能と考えている。

IV. ρ の平滑化

[II] もしくは [III] から、[I] を近似しようという試みは、Stefan 問題に対して enthalpy 法を用いることと類似な点がある。enthalpy 法では、移動境界の上で不連続な関数 H を導入し、 H についての方程式の中に、移動境界に関する条件 (Stefan 条件) を取り込む。この H が今の問題の ρ に相当すると考えられる。enthalpy 法では、 H が不連続関数の形をもつために、数値的な取扱いのうえで困難を生ずることがしばしばある (Longworth (1975) et.c.)。前節で、 ρ を Lagrange 的に取り扱う方法に言及したか、 ρ を含んだ全体を Euler 的に扱おうとすると、境界 Γ の移動

を表現するのに、

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

を解かなければならない。 ρ がステップ関数の形をしているために、これは enthalpy法での H の取り扱いと同種の困難さを含んでいる。enthalpy法でよく用いられる解決法は、 H にいくらかの連続性を持たせる方法である (Elliott (1976), Meyer (1978) e.t.c. [4] による)。これに習って、 ρ の初期値の平滑化を考えよう。 $t=0$ で、

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{in } \Omega_1 \setminus B(\Gamma_0) \\ \varepsilon \rho_0 & \text{in } \Omega_2 \setminus B(\Gamma_0) \end{cases}$$

とし、 Γ_0 の近傍 $B(\Gamma_0)$ では、 ρ が全体で連続 (もしくは微分可能) となるような値をとるものとする。解くべき方程式は、

$$[IV] \quad \begin{cases} \rho \frac{Du_i}{Dt} = (\rho S_{ij})_{,j} \\ u_{i,j} = 0 \\ \frac{D\rho}{Dt} = 0 \end{cases} \quad \text{in } \Omega$$

境界 $\Gamma_1, \dots, \Gamma_4$ では、前と同じ境界条件を課す。この型の問題については、 ρ が Lipschitz 連続のときに取扱った論文がある (H. Okamoto [5])。ただし、粘性が一様でないことと、圧力を ρ で割らずに扱っていることが [IV] と異なる。

[IV]の解は、初期データに連続性をもたせる領域 $B(\Gamma_0)$ の縮小に伴って、[II]の解に近づくことが望まれる。そのため、 $\text{mes } B(\Gamma_0(0)) \rightarrow 0$ のとき、セについて一様に、 $\text{mes } B(\Gamma_0(t)) \rightarrow 0$ となることが必要だが、少なくとも数値計算のうえでは、現在得ている結果から見て、これはかなりきびしい条件である。さらに、 Γ_0 上の境界条件(II-4)が、 $\text{mes } B(\Gamma_0) \rightarrow 0$ のときに再現されなければならない。

[II]の解が存在すれば、 $\text{mes } B(\Gamma_0) \rightarrow 0$ でも $\|\frac{Dw}{Dt}\|_{L_2}$ は有限の範囲に留まる。そこで、 $B(\Gamma_0)$ の中で $\|(\rho S_{ij})_{,j}\|$ が有界となるから、[III]で用いたのと同様の X の元 v_i に対して、

$$\int_{\partial B(\Gamma_0)} v_i \rho S_{ij} n_j \, ds \leq M \text{mes } B(\Gamma_0)$$

これより、 $\text{mes } B(\Gamma_0) \rightarrow 0$ のとき、弱い意味での(II-4)を導出できるだろう。ただし、 $B(\Gamma_0)$ の縮小のしかたが Γ_0 に対して特異にならないように、パラメタライズしておく必要がある。

この手法を用いて数値計算をする上では、上述の様に、時間ステップが進むにつれて $B(\Gamma_0)$ が拡大することのないよう、スキームを工夫する必要がある。通常 $\text{mes } B(\Gamma_0(0))$ を小さくする程、 ρ の形状の維持は難しくなる。enthalpy法における同様の手段を用いた計算でも、 $B(\Gamma_0)$ の中の選択は難しく、場合に応じて経験的に探っているのが現状

だという ([4])。

V. まとめ

[I]を固定領域で扱う方法を探ってきたが、数値計算を行う上では、

(1) [II]を Nakayamaらの手法によって解く。

(2) [IV]を解く。

のふたつの方法がある。現在両者について検討中だが、

特に(2)については $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ をそのまま解かずに、

$\frac{D\hat{\rho}}{Dt} = 0$ をみたす $\hat{\rho}$ を用いて ρ を決め、形状が維持できる

ように工夫することで計算を進めている。次の機会には

その結果をまとめて、この方法の妥当性について論じたいと思う。

参考文献

- [1] T. Nakayama, K. Ohmiya, M. Kawahara, "Finite Element Analysis of Incompressible Stratified Flows", Proc. 6th International Symposium on Finite Element Method in Flow Problems, Antibes, France, June, 1989, pp. 327-331
- [2] 大宮清隆, 川原睦人, 中山司 『非定常密度流の有限要素解析』 第6回流れの有限要素解析シンポジウム報文集, 1985年8月.
- [3] 矢崎秀雄, 中山司 『密度成層流体の非定常運動の有限要素

解析』第3回計算力学シンポジウム報文集, 1989, 11.1-11.2

- [4] John Crank, "Free and moving boundary problems",
clarendon Press. Oxford, 1984
- [5] H. Okamoto, "On the equation of nonstationary
stratified fluid motion: Uniqueness and existence
of the solutions", J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. IA,
vol. 30, No. 3, pp. 615-643