

向井モデル と ホーチャース積

馬 昭平 (東工大)

§1. イントロ

§2. カスプ形式と標準形式

§3. 向井モデルと $\mathfrak{H}_2$

§4. 正則シンプレクティック多様体

§5. 文献案内

§1. イントロ

種数 g の偏極 K3 曲面 (ADE 特異点は許容する) のモジュライ空間を考える:

$$\mathcal{F}_g := \left\{ (S, L) \mid \begin{array}{l} S: \text{K3 曲面 with 高々 ADE 特異点} \\ L \in \text{Pic}(S) \text{ ample, primitive, } (L, L) = 2g-2 \end{array} \right\} / \simeq$$

ここで ADE 特異点を許容しているのは周期領域を全て埋めるためである。(後述)

1.1 の一般メンバーは種数 g の標準曲線である。これが "種数" と呼ぶ事柄である。次数 $2g-2$ ではなく種数 g を index として使うと曲線や Fano 3-fold とのつながりが見やすくなる。

トレリの定理において、 $\mathcal{F}_g$ は 周期領域と 離散群で割った商空間 (直交型モジュラー多様体) と同型になる:

$$\mathcal{F}_g \cong \Gamma_g \backslash \mathcal{D}_g$$

ここで $\mathcal{D}_g, \Gamma_g$ は 以下のように定義される。

次の二次形式を考える (符号 (2,19), 整数係数) :

$$\Lambda_g := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\oplus 2} \oplus E_8^{\oplus 2} \oplus \langle 2-2g \rangle$$

なめらかな $(S, L) \in \mathcal{F}_g$ の $H_{\text{prim}}^2(S, L, \mathbb{Z})$ と同型である。

二次形式 Λ_g により 次の IV 型 対称領域 が定まる:

$$\mathcal{D}_g := \left\{ \mathbb{C}w \in \mathbb{P}(\Lambda_g \otimes \mathbb{C}) \mid \begin{array}{l} (w, w) = 0 \\ (w, \bar{w}) > 0 \end{array} \right\}^+$$

ここで $\{ \}$ は 2つの連結成分からなり、片方を $\{ \}^+$ と書いた。

直交群 $O(\Lambda_g)$ のうち 連結成分 $\mathcal{D}_g$ を保つ index 2 の部分群を $O^+(\Lambda_g)$ と書き、さらに discriminant 群 $\Lambda_g^\vee / \Lambda_g$ に自然に作用する 部分群を

$$\Gamma_g \triangleleft O^+(\Lambda_g)$$

と書く。

(以下の話を読み進めるのに Γ_g の定義を覚えていなくても支障はない。)

$\mathcal{D}_g$ の次の因子も考える:

$$\mathcal{H} := \bigcup_{\substack{\delta \in \Lambda_g \\ (\delta, \delta) = -2}} \delta^\perp \cap \mathcal{D}_g$$

すると

$$\{ (S, L) \in \mathcal{T}_g \mid S: \text{smooth} \} \simeq \mathbb{P}_g \setminus (\mathcal{D}_g - \mathcal{H})$$

となる。

偏極 K3 曲面 の例

$$g=3 \quad \dots \quad (4) \subset \mathbb{P}^3$$

$$g=4 \quad \dots \quad (2, 3) \subset \mathbb{P}^4$$

$$g=5 \quad \dots \quad (2, 2, 2) \subset \mathbb{P}^5$$

(超平面でカットすると種数 g のカブの標準モデルになることに注意。)

これは $\mathcal{T}_g$ の一般メンバーの記述を与えている。

ここまで ($g \leq 5$) が古典的に知られていた。

これをほとんどの $6 \leq g \leq 20$ に拡張したのが向井モデル

(向井茂、1980年代～現在) である。

その構成法を一言で言えば:

偏極 $K3$ をベクトル束のセクションを使って埋め込むことで、
等質空間内の完全交又として実現する

というものである。

古典モデルでは直線束による射影空間への埋め込みを考えていたが、
その代わりに $\downarrow$ ベクトル束による等質空間への埋め込みを考えることで、
古典の範囲を越えることに成功したわけである。

西井モデルの帰結とい、こうした g では $\mathcal{F}_g$ が unirational になることが
わかる。

西井モデルは $K3$ だけでなく、カブや Fano 3-fold を調べるのにも
大きな役割を果たしてきた。カブ・ $K3$ ・Fano 3-fold を自然に結びつけている。

西井モデルの例を1つ紹介しておく。

例: $g=8$ (西井, 1987)

グラスマン $G(2,6) \subset \mathbb{P}^2\mathbb{C}^6 \subset \mathbb{P}^{14}$ と

一般の $\text{codim}=6$ の線形部分空間 $P \subset \mathbb{P}^2\mathbb{C}^6$ にカットする

$$\Rightarrow (G(2,6) \cap P, \mathcal{O}(1)) \in \mathcal{F}_8$$

逆に一般の $(S, L) \in \mathcal{T}_g$ に対し、向井バクトル $(2, G(L), 4)$ の安定バクトル束 $\mathcal{E} \rightarrow S$ と考えると、 $h^0(\mathcal{E}) = 6$ で、 $\mathcal{E}$ のセクションにおいて埋め込み $S \hookrightarrow G(2, H^0(\mathcal{E})^\vee) = G(2, 6)$ が定まる。

これにより S は上のように実現される。この構成により

$$\mathcal{T}_g \sim G(6, (\wedge^2 \mathbb{Q}^6)^\vee) / \mathrm{PGL}_6 \quad \text{を得る。}$$

特に $\mathcal{T}_g$ は unirational であることがわかる。

(例終わり)

では g が大きい時、 $\mathcal{T}_g$ の双有理型はどうなるだろうか？

金銅 ('93, '99) による先駆的な仕事ののち、Gritsenko-Hulek-Sankaran ('07) はこれを証明した：

定理 (Gritsenko-Hulek-Sankaran)

$g \geq 63$ の時 (+ 他にもいくつかの値で) $\mathcal{T}_g$ は一般型

Gritsenko たちの証明は、 $\mathcal{T}_g$ のヒザタリcpt化上の多重標形式とある種のカスプ形式の対応を使う。この構成で決定的な役割を果たすのが、ボークスズの $\mathcal{H}_{12}$ と呼ばれる 26次元領域上の貴重なモジュラー形式である。 $\mathcal{H}_{12}$ を 26次元領域から K3 の周期領域 $\mathcal{D}_g$ (19次元) に引き戻すことにより $\mathcal{D}_g$ 上においてカスプ形式 $F(g)$ を得る。(Borchers, 金銅, GHS) この $F(g)$ をいわば構成の“種”として使うのである。 $F(g)$ のウェイト < 19 の時、“種”²⁸ として機能し、これより $\mathcal{T}_g$ 一般型が言える。

状況としては、

g : 大 $\Rightarrow F(g)$ のサイズ $< 19 \Rightarrow \mathcal{F}_g$ 一般型

一方 g が小さいと $F(g)$ のサイズは 19 を超えてしまい、

$\mathcal{F}_g$ の双有理型には応用できない。(そもそも小次元 $\rightarrow \infty$ になることが多いので当然といえば当然である。)

しかし g が小さい時こそ 向井モデル という面白い幾何、explicit な幾何がある。ある意味、 $F(g)$ はこれまで explicit な幾何と disjoint であった。

ここでは、点付き $K3$ のモジュライ $\mathcal{F}_{g,n}$ を考えることにより、 $F(g)$ と向井モデルが ある意味 つながる ということを説明したい。

さらに、 $\mathcal{F}_{g,n}$ の双有理型 だけではなく、もっと深い未知のつながりが隠れているのではないかと、という兆し のようなものが見つくと見え、ということも説明したい。(あくまでも兆し)

§2. カスノ形式と標準形式

n 点付き偏極 $K3$ のモジュライ を考える。

$$\mathcal{T}_{g,n} := \left\{ (S, L, p_1, \dots, p_n) \mid \begin{array}{l} (S, L) \in \mathcal{T}_g \\ \text{各 } p_i \in S \end{array} \right\} / \simeq$$

quasi-projective, normal, $\dim = 19 + 2n$ である。

$\mathcal{T}_{g,n} \rightarrow \mathcal{T}_g$ は generic には $K3^n$ -fibration である。($g > 2$ の時)

モジュラー形式についても定義しておく。

$$\omega := \mathcal{O}(H)|_{\mathcal{D}_g}$$

を $\mathcal{D}_g$ 上のホッジ束とする。

Γ_g に固着重さ k の指標 χ のモジュラー形式とは、

$\mathcal{D}_g$ 上の $\omega^{\otimes k} \otimes \chi$ の Γ_g -不変なセクションに他ならない。

$$M_k(\Gamma_g, \chi) := \{ \mathcal{D}_g \text{ 上の 重さ } k, \text{ 指標 } \chi \text{ の } \Gamma_g\text{-モジュラー形式} \}$$

$\cup$

$$S_k(\Gamma_g, \chi) := \{ \text{カスノ形式} \}$$

$$M_k(\Gamma_g, \chi)^{(m)} := \{ F \mid \text{ord}_{\mathcal{D}_g}(F) \geq m \}$$

とおく。

次の対応において $\mathcal{F}_{g,n}$ 上の多重標準形式とモジュラー形式が対応する。

定理1

$(g,n) \neq (2,1)$ とする。

(1) 次の次数環の同型がある：

$$\bigoplus_m H^0(K_{\mathcal{F}_{g,n}}^{\otimes m}) \simeq \bigoplus_m M_{(19+n)m}(\Gamma_g, \det^m)^{(m)}$$

(2) X を $\mathcal{F}_{g,n}$ の smooth projective モデルとすると、
上の同型の $m=1$ での対応において

$$H^0(K_X) \simeq S_{19+n}(\Gamma_g, \det)$$

この同型において X の標準写像は次のように記述される：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\phi_K} & |K_X|^\vee \\ \vdots & & \downarrow \text{上の同型} \\ \mathcal{F}_g & \dashrightarrow & \mathbb{P}S_{19+n}(\Gamma_g, \det)^\vee \\ & \text{カスチリヤン形式} & \\ & \text{による写像} & \end{array}$$

(1) では $\mathcal{F}_{g,n}$ の smooth locus 上の多重標準形式を考えていて、

$m=1$ の時の拡張可能性を (2) で考えている。

$\mathcal{F}_{g,n}$ がある種の“よいcpt化”を持てば、 $m>1$ の時も
拡張可能性をモジュラー形式で記述³¹できる。

小次元 $K(\mathcal{F}_{g,n})$ への応用

定理1の(2)と $\mathcal{F}_{g,n}$ の小次元 $K(\mathcal{F}_{g,n})$ の研究に応用する。

n を動かした時の挙動については次の2つの性質が基本的である：

- $K(\mathcal{F}_{g,n}) \leq 19$ (飯高の不等式)
- $K(\mathcal{F}_{g,n})$ は n に関して非減少 (K3-fibration に対する飯高予想 proved by 川又)

定理1の(2)より次がわかる。

系

$$(1) \quad S_k(P_g, \det) \neq 0 \Rightarrow n \geq k-19 \text{ で } K(\mathcal{F}_{g,n}) \geq 0$$

$$(2) \quad \text{形式による写像 } \mathcal{F}_g \dashrightarrow \mathbb{P}S_k(P_g, \det)^\vee \text{ が} \\ \text{像に generically finite}$$

$$\Rightarrow n \geq k-19 \text{ で } K(\mathcal{F}_{g,n}) = 19$$

$$\text{特に } n \gg 0 \text{ で } K(\mathcal{F}_{g,n}) = 19 \text{ となる。}$$

飯高の不等式より ≤ 19 はわかるが、 $n \gg 0$ で 19 にまで実際に到達するというのは自明なことではない。

あくまでも想像だが、 n の変数としての $K(\mathcal{F}_{g,n})$ の増加の仕方は“ただろか”
というより“かなり唐突”ではないかと思っている。 $\xrightarrow{19}$ のような。

実際、 $n > k-19$ 、 $S_k \neq 0$ 、で $\mathcal{F}_{g,n}$ が“よいcpt化”を持ち、
 $n' \geq n$ で $K(\mathcal{F}_{g,n'}) = 19$ となることが示せる。

§3. 向井モデルと Φ_{12}

まず Φ_{12} の quasi-pullback (正規化された制限 / クリニチ制限) について説明する。この操作は Borchers ('95) において発見されたもので、 $\mathcal{F}_g$ の小次元次元に応用したのは金銅 ('99) と Gritsenko-Hulek-Sankaran ('07) である。

$$\Pi_{2,26} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{\oplus 2} \oplus E_8^{\oplus 3}$$

という符号 (2,26) のユニモジュラーな二次形式を考える。

Borchers の Φ_{12} は $M_{12}(O^+(\Pi_{2,26}), \det)$ に属するとても貴重なモジュラー形式である。

長さ $2-2g$ の primitive なベクトル $v_g \in E_8$ を選ぶ

$$\Rightarrow \Lambda_g \hookrightarrow \Pi_{2,26} \quad \text{s.t.} \quad \perp \simeq v_g^\perp \cap E_8 =: K_g \quad \text{が定まる。}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_g \hookrightarrow \mathcal{D}_{2,26} \quad \text{が定まる。}$$

$$F(g) := \frac{\Phi_{12}}{\prod_{\substack{\delta \in K_g \\ \text{正ルーツ}}} (\delta, \cdot)} \Big|_{\mathcal{D}_g}$$

と仮して $S_{12+\frac{r(g)}{2}}(\Gamma_g, \det)$ に属する。ここで

$$r(g) := K_g \text{ のルーツ数 } \quad \text{である。}$$

$F(g)$ も前節の系に代入することで次がわかる。

系

$$n(g) := F(g) \text{ の値 } - 19 = \frac{n(g)}{2} - 7 \quad \text{ただし,}$$

$$n \geq n(g) \quad \text{と} \quad K(g_{5,n}) \geq 0$$

$n(g)$ は純粹にルート数の計算でわかる bound だ、"arithmetic な" bound と言ふ。一方、 g が大きいとき、向井モデルを利用すると、 $K = -\infty$ となる "幾何学的な" bound $n'(g)$ を導ける。 $n(g)$ も $n'(g)$ も ^{a priori には} the bound ではなく a bound なのだが、2つを比べてみると、いくつかのケースで $K = -\infty$ から $K \geq 0$ への変り目がほぼ特定できる。

定理 2

g	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n(g)$	56	35	30	21	23	16	15	14	14	9*	14
$n'(g)$	38	34	29	18	22	14	9*	10*	11*	7*	13

g	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
$n(g)$	9	9	8	7	6	8	5	6	5	6
$n'(g)$	7	1*		4		5		5		1*

(注1)

$n'(8), n'(9), n'(10)$ は 向井・モリノを用いて Farkas-Verra において導出された。 $n'(11)$ は Barros による。 $n'(14)$ と $n'(22)$ は

Farkas-Verra による。(cubic 4-fold を利用する。)

$n(11) = 9$ は Barros-Mullane において幾何学的方法でも導出された。Barros-Mullane の幾何学的結果と ホーファー・ズヴァーニッチの結果がぴったり同じ値を与えたのは面白いと思った。

(注2)

$n(g) = n'(g) + 1$ (小平次元の変わり目が正確に分かる) とするのは

$$g = 3, 4, 6, 12, 20$$

g が抜けているものの、数学科の少女少女に見せたら「正の面体」と言いうるであろう。(たぶんたまたま)

$$n(g) = n'(g) + 2 \text{ (横い)} \text{ のは } g = 7, 11, 13$$

$$n(g) = n'(g) + 3 \text{ (やや横い)} \text{ のは } g = 5, 10, 16, 18$$

(注3)

$3 \leq g \leq 10$ の時、ある代数群 G の表現 V_g と
等質空間 $\Sigma_g \subset \mathbb{P}V_g$ ($g=6$ の時は概等質) が存在して
 Σ_g の一般メンバーは Σ_g の線形切断として得られる。

この時 不思議なことに常に

$$n(g) = \dim V_g$$

つまり $F(g)$ のウェイト-モジュライ数 = 表現の次元

が成り立っている。

私にはこれは偶然の一致とは思えなかった。

何かの冰山の一角なのだろうか?

$F(g)$ は $K3$ 表のことも知っているのではないだろうか?

参考のため Σ_g と V_g の一覧表を書いておく。

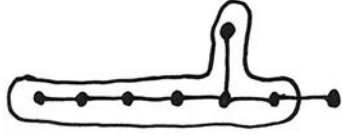
($g \leq 5$ は古典モデル、 $6 \leq g \leq 10$ は向井モデル)

g	3	4	5	6	7	8	9	10
Σ_g	$\mathbb{P}^3$	3次元 quadric Q	$\mathbb{P}^5$	5次元 del Pezzo 3-fold Y	OG(5,10)	$G(2,6)$	$LG(3,6)$	G_2 の adjoint variety
V_g	$\text{Sym}^4 \mathbb{C}^4$	$H^0(\mathcal{O}_Q(3))$	$\text{Sym}^2 \mathbb{C}^6$	$H^0(-K_Y)$	半線形 表現	$\wedge^2 \mathbb{C}^6$	$\omega^\perp \wedge^3 \mathbb{C}^6$	$\mathfrak{g}_2$

例

講演では $\beta)$ として $g=3$ の場合を紹介したので、これを再掲する。

$n(3)$ の計算 (arithmetic)

$K_3 \simeq D_7$ である。この D_7 は E_8 に  により埋め込まれている。

よって $r(3) = D_7$ のルート数 $= 84$

$$\therefore n(3) = \frac{r(3)}{2} - 7 = 35$$

$n(3)$ の計算 (geometry)

一般の $g=3$ K3 は $\mathbb{P}^3$ の 4 次曲面 である。

次の incidence を考える:

$$X_n := \left\{ (S, p_1, \dots, p_n) \mid \begin{array}{l} S \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)| \\ p_i \in S \subset \mathbb{P}^3 \end{array} \right\}$$

$$\swarrow \quad \searrow \pi$$

$$|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)| \quad (\mathbb{P}^3)^n$$

π -fiber は $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)|$ の部分線形系 である:

$$\pi^{-1}(p_1, \dots, p_n) = \left| \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4) - p_1 - \dots - p_n \right| \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4)|$$

$\text{codim} \leq n$ 34次元

よって $n \leq 34 \Rightarrow \pi$ は 全射 であり generic には $\mathbb{P}^{34-n}$ 束

$\Rightarrow X_n$ は ratl

$\Rightarrow \mathcal{F}_{3,n}$ は uniratl

§4. 正則シンプレクティック多様体

単連結かつ到る所非退化な正則2形式を持つ、 $H^0(\Omega_X^2)$ から2形式によって生成される1次元であるようなcpt複素多様体 X を正則シンプレクティック多様体と呼ぶ。K3曲面の高次元類似である。ただしこれまで(偏極を抜きにして)4タイプしか見つかっていない:

$K3^{[n]}$, generalized Kummer, O'Grady 6, O'Grady 10

偏極付きで一般メンバーが explicit に構成されているようなケース(つまり偏極正則シンプレクティック多様体のモジュライが unimodal になるようなケース)も今の所6ケースしか知られておらず、いずれも偏極込みで $K3^{[n]}$ と変形同値である。今の所別が散発的(散在的)と言える。

K3の場合と同様にカスプ形式と標準形式を関係づけることができる。(定理1の(2)のやや粗い類似。定理1の(1)のような精密なものはまだない。)

この時カスプ形式と点の個数の関係は

$$\text{ウェイト} = \text{モジュライ数} + \frac{\dim X}{2} \cdot (\text{点の個数})$$

となる。

(K3の場合には $\text{ウェイト} = 19 + \text{点の個数}$ だった。)

この対応を使うと、点の個数を増やしていた時に小平次元がモジュライ数に停止することが、K3の場合と同様にわかる。

explicit な構成が知られている6ケースについて 小次元の変わり目と
調べた所 次のようになった。

定理3

発見者	構成法	uniradl	$K \geq 0$
Beauville -Donagi	cubic 4-fold 上の 直線の空間 (いわゆる Fano 多様体)	13	14
Debarre -Voisin	$G(6,10)$ 上の ベクトル束の セクションの 零点	5	6
Lehn-Lehn -Sorger -van Straten	cubic 4-fold 上の twisted cubic カブの空間の contraction	5	7
Ilier- Ranestad	cubic 4-fold の 巾和多様体	1	6
O'Grady	EPW sextic の 2重被覆	0	11
Ilier-Kapustka -Kapustka -Ranestad	EPW cube の 2重被覆	0	16

この表の見方は、例えば 1 行目については、次の通りである：

Beauville-Donagi において発見された族 (cubic 4-fold の Fano 多様体)

については、 n 点付き Fano (cubic 4) のモジュライは

$n \leq 13$ の時 unirational, $n \geq 14$ の時 $K \geq 0$ となる。

ただし 2つの 2重 EPW のケースでは n 点付きのモジュライではなく、
2重被覆をもった後の “トートロジカル族” (O’Grady の用語で) の
 n 重 ファイバー積も考えている。双有理的には n 点付きモジュライの
2重被覆である。

定理 3 より Beauville-Donagi と Debarre-Voisin の場合は
小平次元の変わり目が正確にわかり、Lehn-Lehn-Sorger-van Straten
の場合もあと一步の所までつきとめられた。($n=6$ は謎)

VSP (cubic 4) と EPW 3 の場合は、ウェイト-モジュライ数 (20) が

$\frac{\dim X}{2}$ で割り切れなければならないという合同条件のために、

よりウェイトの小さな $K3$ 形式があるにも関わらずそちらを使えなかった。

$K3$ の場合には直面しなかった事情である。

おそらくこの 2 ケースでは $K \geq 0$ の bound はもっと低い。

K3 の場合 の

ウェイト - モジライ数 = 表現の次元

の類似もこの場合に探してみたが、今の所見つかっているのは次の直接的な“反転関係”だけである。

主として cubic 4-fold のモジライ上に quasi-pullback したものを F_{cubic} と書く。
ウェイト 48 のカスノ形式である。

cubic 4-fold に対する自然な表現は $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(3)) = \text{Sym}^3 \mathbb{C}^6$ である。

一方、K3 の場合に $g=2$ の場合が抜けていたことと想起す。

主として $g=2$ K3 ($\mathbb{P}^2$ の 1 次曲線で分枝する 2 重被覆) のモジライ上に quasi-pullback したものを $F(2)$ と書いていた。ウェイト 75 のカスノ形式である。
自然な表現は $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(6)) = \text{Sym}^6 \mathbb{C}^3$ である。

この時次が成り立つ：

$$\begin{aligned} F(2) \text{ のウェイト } - 19 &= 56 = \dim \text{Sym}^3 \mathbb{C}^6 \\ F_{\text{cubic}} \text{ のウェイト } - 20 &= 28 = \dim \text{Sym}^6 \mathbb{C}^3 \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \text{反転??}$$

この等式が偶然なのかそうではないのかについては、

K3 の時ほど確信を持っているわけではない。

文献案内

今後 $K3$ 曲面やボーチャーズ積を学ぶかもしれない方のためにというのも兼ねて、項目ごとに分けて、一部項目では入門書や教科書を紹介してみます。

$K3$ 曲面の教科書

- 金銅誠之 ” $K3$ 曲面”, 共立出版、2015.
- Huybrechts, D. ”Lectures on $K3$ surfaces”, Cambridge Univ. Press, 2016.
- ”Géométrie des surfaces $K3$: modules et périodes”, Astérisque 126, SMF, 1985.

ボーチャーズ積

- Borcherds, R. ”Automorphic forms on $O_{s+2,2}(R)$ and infinite products.” Invent. Math. **120** (1995), no. 1, 161–213.
- Borcherds, R. ”Automorphic forms with singularities on Grassmannians.” Invent. Math. **132** (1998), no. 3, 491–562.
- Bruinier, J.H. ”Borcherds products on $O(2,l)$ and Chern classes of Heegner divisors.” Lecture Notes in Math. **1780**, Springer, 2002.

Bruinier の本は教科書ではなく研究書（とても長い論文）なのですが、現在の所、本の形では、ボーチャーズ積についてまとめた記述を含むおそらく唯一の本かもしれません。

2 次形式入門

- Ebeling, W. ”Lattices and Codes”, Springer, 2013.
- Conway, J. ”The sensual (quadratic) forms”, AMS, 1997.
- Nikulin, V. ”Integral symmetric bilinear forms and some of their applications.” Math. USSR Izv. **14** (1980), 103–167.
- Dolgachev, I. ”Integral quadratic forms: applications to algebraic geometry (after V. Nikulin).” Astérisque, **105-106**, SMF, 1983.

$\mathcal{F}_g$ の小平次元とモジュラー形式

- Kondō, S. "On the Kodaira dimension of the moduli space of K3 surfaces." *Compositio Math.* **89** (1993) no.3, 251–299.
- Kondō, S. "On the Kodaira dimension of the moduli space of K3 surfaces. II." *Compositio Math.* **116** (1999) no.2, 111–117.
- Gritsenko, V.; Hulek, K.; Sankaran, G. "The Kodaira dimension of the moduli of K3 surfaces." *Invent. Math.* **169** (2007), no. 3, 519–567.

向井モデル

- Mukai, S. "Curves, K3 surfaces and Fano 3-folds of genus ≤ 10 ." in "Algebraic geometry and commutative algebra", Vol. I, 357–377, Kinokuniya, 1988.
- Mukai, S. "Polarized K3 surfaces of genus 18 and 20." in "Complex projective geometry" (Trieste, 1989/Bergen, 1989)", 264–276, London Math. Soc. Lect. Note Ser., **179**, Cambridge Univ. Press, 1992.
- Mukai, S. "Curves and K3 surfaces of genus eleven." in "Moduli of vector bundles (Sanda, 1994; Kyoto, 1994)", 189–197, Lect. Notes in Pure Appl. Math., **179**, Dekker, 1996.
- Mukai, S. "Polarized K3 surfaces of genus thirteen." in "Moduli spaces and arithmetic geometry", 315–326, ASPM **45**, 2006.
- Mukai, S. "K3 surfaces of genus sixteen", in "Minimal Models and Extremal Rays (Kyoto 2011)", 379–396, ASPM **70**, MSJ, 2016.
- 向井茂 "Fano 多様体論の新展開 –ベクトル束法とモジュライ問題を巡って–" *数学* **47** (1995), 125–144.

$\mathcal{F}_{g,n}$ の双有理型

- Barros, I. "Geometry of the moduli space of n -pointed K3 surfaces of genus 11." *Bull. Lond. Math. Soc.* **50** (2018), no. 6, 1071–1084.
- Barros, I.; Mullane, S. "Two moduli spaces of Calabi-Yau type." *IMRN* (to appear)
- Farkas, G.; Verra, A. "The universal K3 surface of genus 14 via cubic fourfolds." *J. Math. Pures Appl.* (9) **111** (2018), 1–20.

- Farkas, G.; Verra, A. "The unirationality of the moduli space of $K3$ surfaces of degree 42." *Math. Ann.* (to appear)

偏極正則シンプレクティック多様体の明示的な族

- Beauville, A.; Donagi, R. "La variétés des droites d' une hypersurface cubique de dimension 4." *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **301** (1985), 703–706.
- Iliev, A.; Ranestad, K. "K3 surfaces of genus 8 and varieties of sums of powers of cubic fourfolds." *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), no. 4, 1455–1468.
- O'Grady, K. G. "Irreducible symplectic 4-folds and Eisenbud-Popescu-Walter sextics." *Duke Math. J.* **134** (2006), no. 1, 99–137.
- Debarre, O.; Voisin, C. "Hyper-Kähler fourfolds and Grassmann geometry." *J. Reine Angew. Math.* **649** (2010), 63–87.
- Lehn, C.; Lehn, M.; Sorger, C.; van Straten, D. "Twisted cubics on cubic fourfolds." *J. Reine Angew. Math.* **731** (2017), 87–128.
- Iliev, A.; Kapustka, G.; Kapustka, M.; Ranestad, K. "EPW cubes." *J. Reine Angew. Math.* **748** (2019), 241–268.

この講演の内容

- Ma, S. "Mukai models and Borchers products" [arXiv:1909.03946](https://arxiv.org/abs/1909.03946)
- Ma, S. "Kodaira dimension of universal holomorphic symplectic varieties" [arXiv:2001.04328](https://arxiv.org/abs/2001.04328)