

## 相対不変式と Young 図形

筑波大 数学系 木村達雄

### §1. 一般論

$G = \text{reductive}$  な代数群, (即ち  $G$  の任意の表現は既約表現の直和),  $V = \text{有限次元ベクトル空間}$ ,  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  を有理表現とし, すべて複素数体  $\mathbb{C}$  上で定義されているとする。

$V$  上の斉次多項式  $f(x)$  が,  $(G, \rho, V)$  の相対不変式であるとは,  $G$  の有理指標  $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}^*$  があって  $f(\rho(g)x) = \chi(g)f(x)$  ( $x \in V, g \in G$ ) が成り立つことである。本論の目的は, この相対不変式を構成する原理, 及び実例を与える事である。

$S^r(V) = V$  上の  $r$  次斉次多項式全体, とすると群  $G$  は  $(\rho^{(r)}(g)\varphi)(x) = \varphi(\rho(g)^{-1}x)$  により (但し  $\varphi \in S^r(V)$ ),  $S^r(V)$  に作用する。ところが  $G$  は  $\text{reductive}$  ゆえ  $\rho^{(r)}$  は既約表現の直和  $\rho^{(r)} = \bigoplus \rho_i^{(r)}$  に分解する。対応する  $S^r(V)$  の分解を  $S^r(V) = \bigoplus W_i^{(r)}$  とする。然るば,  $f(x)$  が  $r$  次の相対不変式である事と  $f(x) \in \exists W_i^{(r)}$  s.t.  $\dim W_i^{(r)} = 1$  は同値である。

さて  $\rho_c^{(r)}$  が  $\rho_j^{(r_1)} \times \rho_k^{(r_2)}$  ( $r_1 + r_2 = r$ ) と分解する (記号で  $\rho_c^{(r)} \sim \rho_j^{(r_1)} \times \rho_k^{(r_2)}$ ) とは,  $\rho_c^{(r)}$  が  $\rho_j^{(r_1)}$  と  $\rho_k^{(r_2)}$  の symmetric tensor  $S(\rho_j^{(r_1)} \otimes \rho_k^{(r_2)})$  の既約成分の一つである事とする。従て, この場合  $\varphi \in W_c^{(r)}$  は  $\varphi = \sum_t \psi_t \theta_t$  ( $\psi_t \in W_j^{(r_1)}$ ,  $\theta_t \in W_k^{(r_2)}$ ) と表わせる事を意味する。この表現の分解によって, 相対不変式を構成しようというのである。特に  $G = GL(n, \mathbb{C})$  の場合は, その既約表現と Young 図形 (§2) が 1 対 1 に対応するから, この意味で Young 図形の分解, を定義する。

§2. Young 圓形

以下  $G = GL(n, \mathbb{C})$  とする。  $\Upsilon$  を次の様な図の集合とする。

$$Y = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ l \end{array} \right\} \begin{array}{|c|} \hline \overbrace{\phantom{x_1}}^{x_1} \\ \hline \text{(grid)} \\ \hline \end{array}; \quad l < n, \quad 0 \leq f_l \leq \dots \leq f_1 \Bigg\}$$

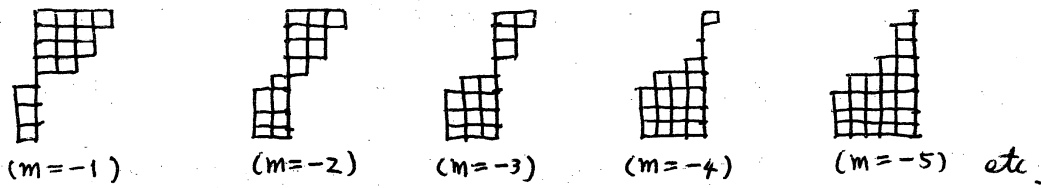
然らば、 $G$  の既約表現  $\rho$  に対し 唯一の 整数  $m$  が定まって  
 $\tilde{\rho}(g) = (\det g)^{-m} \cdot \rho(g) \ (g \in G)$  が  $\gamma$  の 1 つの図形と対応する。

そのとき  $\tilde{\rho}$  に対応する  $\square$  形を  $Y_1$  とし,  $\rho = Y_2$  を対応させる.

 $m > 0$  の場合

$Y_2 = \underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \text{grid} \end{array} \right\}}_m$       but  $Y_1 = \begin{array}{c} \text{grid} \end{array}$

$m < 0$  の場合は次のようにする。



これにより  $G = GL(n, \mathbb{C})$  の既約表現と (上で一般化した) Young 図形が 1 対 1 に対応する。

(例 1)  $\left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\}_{\ell (\leq n)}$  これは  $V = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n} \mathbb{C} u_{i_1} \wedge \dots \wedge u_{i_\ell}$  上に自然  
にひきおこされる  $G = GL(n, \mathbb{C})$  の表現に対  
応する。

(例 2)  $\left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right\}$  これは  $V = \mathcal{M}(n, \mathbb{C}) = \{X \in M_n(\mathbb{C}); \text{tr} X = 0\}$  に  
 $\rho(g)X = gXg^{-1} (g \in G, X \in V)$  で作用する表現  
に対応する。従って  $\left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\}_{n-1}$  は  $\rho'(g)X = (\det g)gXg^{-1}$  に対応する。

(例 3)  $\square \square$  は  $V = \text{Sym}(n) = \{X \in M_n(\mathbb{C}); {}^t X = X\}$  に  
 $\rho(g)X = gXg^{-1} (g \in G, X \in V)$  で作用する表現に対応する。  
 $\left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \right\}$  は  $\rho'(g)X = {}^t g^{-1} X g^{-1}$  なる  $\rho'$  に対応し、 $\left\{ \begin{array}{c} \square \\ \square \\ \square \end{array} \right\}_{n-1}$  は  
 $\rho''(g)X = (\det g)^2 \cdot {}^t g^{-1} X g^{-1}$  なる  $\rho''$  に対応する。

### §3. 佐藤幹夫先生の結果とその拡張

$(GL(6), \text{目}, V(20)), (GL(7), \text{目}, V(35)), (GL(8), \text{目}, V(56))$  には  
それぞれ 4 次, 7 次, 16 次の相対不変式が存在する事は  
1960 年頃, 佐藤先生により確かめられ, その後も色々な人

たちにより色々な方法でその次数は決定され、特に  $G=GL(6)$  の場合は相対不変式の形についてもわかっている(佐藤幹夫, 井草準一 et al.) 具体的な形といへば項数が多いので、色々な形で表わす可能性があるが、以下は佐藤先生が 5, 6 年前に擬均質ベクトル空間の短期共同研究の際、京大数研で話された内容である。  $V(20) \ni \alpha = \sum_{1 \leq i < j < k \leq 6} x_{ijk} u_i \wedge u_j \wedge u_k$  に対して

②  $\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^6 y_i \frac{\partial \alpha}{\partial u_i}$  とおく。但し  $y_1, \dots, y_6$  は不定元である。然るば

$\alpha \wedge ② = \sum_{i,j=1}^6 f_{ij}^i(x) y_i y_j \omega$ , 但し  $\omega = u_1 \wedge \dots \wedge u_6$  と表わ

せて、 $\varphi(x) = (f_{ij}^i(x))$  とおくと、 $\varphi(p(g)x) = (\det g) g \varphi(x) g^{-1}$  ( $g \in GL(6, \mathbb{C})$ ) が成り立つ。このとき  $\text{tr } \varphi(x) = 0$  が成り立つ。

実際  $f_{ij}^i(x) \omega = \alpha \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial u_i} \wedge u_i$  ゆえ Euler's identity により、

$\text{tr } \varphi(x) \cdot \omega = \alpha \wedge \left( \sum_{i=1}^6 u_i \wedge \frac{\partial \alpha}{\partial u_i} \right) = \alpha \wedge (3\alpha) = 0$  となるから。

更に  $\varphi(x)^2$  は non-zero な scalar 行列  $\varphi(x)^2 = f(x) \cdot I_6$  となり、 $f(x)$  が  $f(p(g)x) = (\det g)^2 \cdot f(x)$  なる相対不変式である事がすぐわかる。(  $\varphi(x)^2$  が scalar 行列になる証明は  $(GL(6), \text{目}, V(20))$  が

擬均質ベクトル空間である事を使えばすぐできる。) 佐藤先生

は更に  $GL(7)$  の場合でも、 $\alpha \wedge ② \wedge ② = \left( \sum_{i,j=1}^7 f_{ij}^i(x) y_i y_j \right) \omega$  から得

られる 7 次の対称行列  $\varphi(x) = (f_{ij}^i(x))$  が  $\varphi(p(g)x) = (\det g) g \varphi(x) g^{-1}$

( $g \in GL(7)$ ) と変化する事を示し、 $\text{rank } \varphi$  などが orbits の不変量

として使えるだろうと述べられた。これ等の現象には根拠が

あり、それは次の事実に基づく。

$$S^2(\text{目}) = \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

$$S^3(\text{目}) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

$$S^4(\text{目}) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \oplus \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

(これらは  $S^r(\text{目})$  の次元と右辺の次元を  $n=1,2,\dots$  と順に計算して比べていけば得られるが,  $r=4$  で既にかなり面倒である。)

$n=6$  の場合,  $S^2(\text{目})$  の表現の成分に  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$  が表われるという事は  $V(20)$  上の 2 次多項式たちを要素とする  $\text{trace}=0$  の 6 次行列  $\varphi(x)$  で  $\varphi(p(g)x) = \det g \cdot g \varphi(x) g^{-1}$  ( $g \in GL(6)$ ) をみたすものが存在する事を意味する (§2, 例(2)参照)。また,  $S^4(\text{目})$  に  $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$  が表われる事は, 4 次の斉次多項式  $f(x)$  で  $f(p(g)x) = (\det g)^2 \cdot f(x)$  をみたすものの存在を意味している。  $\varphi(x)^2 = f(x) \cdot I_4$  は §1 で述べた意味で  $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$  の分解  $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \sim \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}$  を表わしていると考えられる。更に  $n=7$  の場合,  $S^4(\text{目})$  に  $\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$  が表われる事は, 4 次斉次多項式たちを要素とする 7 次対称行列  $\varphi^*(x)$  で  $\varphi^*(p(g)x) = (\det g)^2 \cdot {}^t g^{-1} \varphi^*(x) g^{-1}$  なるものの存在を意味している (§2 の例(3)参照)。佐藤先生は  $\text{tr } \varphi(x) \varphi^*(x)$  が non-zero で, これが  $(GL(7), \text{目})$  の 7 次の相対不変式を与えると予想され

た。実際に  $\varphi(x)$  は 分解  $\square \sim \square \times \square$  に基づいて次の様に構成できる。 $x \wedge \textcircled{2} = \sum_{i,j,k} f_{jk}^i(x) y_i u_{jk}$ ,  $u_{jk} \wedge u_{jl} \wedge u_k = \omega (= u_{11} \wedge \dots \wedge u_{17})$  に対し,  $\varphi_{ij}^*(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k,l} f_{il}^k(x) f_{kj}^l(x)$ ,  $\varphi^*(x) = (\varphi_{ij}^*(x))$  とおけばよい。このとき  $\varphi(x)\varphi^*(x)$  は non-zero scalar 行列になり,  $\varphi(x)\varphi^*(x) = f(x) \cdot I_7$  で相対不変式  $f(x)$  が得られる。(これは筆者による)

これらの結果を次の様に一般の  $n$  について拡張しよう。

$$\forall x = \sum_{i < j < k} x_{ijk} u_i \wedge u_j \wedge u_k, \textcircled{2} = \sum_{i=1}^n y_i \frac{\partial x}{\partial u_i} \text{ と同様において}$$

$$\underbrace{x \wedge \textcircled{2} \wedge \dots \wedge \textcircled{2}}_m = \sum_{j_{2m+2} \dots j_n} f_{j_{2m+2} \dots j_n}^{i_1 \dots i_{m-1}}(x) y_{i_1} \dots y_{i_{m-1}} u_{j_{2m+2}} \dots u_{j_n},$$

$u_{j_{2m+2}} \dots u_{j_n} \wedge u_{j_{2m+2}} \wedge \dots \wedge u_{j_n} = \omega (= u_{11} \wedge \dots \wedge u_{1n})$  によって  $m$  次の斉次多項式  $f_{j_{2m+2} \dots j_n}^{i_1 \dots i_{m-1}}(x)$  を構成する。これらの多項式の存在は

$S^m(\text{目})$  の既約分解に  $2m+1 \left\{ \begin{array}{c} m \\ 1 \end{array} \right\}$  が表われる事を意味する。

さて  $n = 3m$  ( $m \geq 2$ ) とし  $m(m-1)$  次の斉次多項式  $F_{j_1 \dots j_{m-1}}^{i_1 \dots i_{m-1}}(x)$  を

$$F_{j_1 \dots j_{m-1}}^{i_1 \dots i_{m-1}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{i_1' \dots i_{m-1}' \\ (u+v)}} f_{i_1' \dots i_{m-1}'}^{i_1 \dots i_{m-1}} f_{i_2' \dots i_{m-1}'}^{i_2 \dots i_{m-1}} \dots f_{i_{m-1}' \dots i_{m-1}'}^{i_{m-1} \dots i_{m-1}} \text{ とおくと}$$

これは分解  $3m+1 \left\{ \begin{array}{c} m-1 \\ m-1 \end{array} \right\} \sim 2m+1 \left\{ \begin{array}{c} m \\ 1 \end{array} \right\} \times \dots \times \left\{ \begin{array}{c} m \\ 1 \end{array} \right\}$  に対応する。そして

\*  $f(x) = \sum_{\substack{i_1 \dots i_{m-1} \\ j_1 \dots j_{m-1}}} F_{j_1 \dots j_{m-1}}^{i_1 \dots i_{m-1}}(x) \cdot F_{i_1 \dots i_{m-1}}^{j_1 \dots j_{m-1}}(x)$  は  $\wedge^3 \mathbb{C}^{3m}$  上の相対不変式を与える。即ち

Proposition 1.  $(GL(3m), \text{目}, \wedge^3 \mathbb{C}^{3m})$  は  $2m(m-1)$  次の相対不変式  $f(x)$  が存在し \* で与えられる。(  $m=2$  が  $GL(6)$  に相当する。 )

同様に  $(GL(6), \text{目}, \lambda \mathbb{C}^6)$  の相対不変式の存在から  $(GL(7), \text{目}, \lambda \mathbb{C}^7)$  の相対不変式を構成した方法は次の様に一般化される。

Proposition 2.  $(GL(2m), \text{目}, \lambda \mathbb{C}^{2m})$  が  $r$  次の相対不変式をもてば  $k = \frac{3r}{2m} \in \mathbb{Z}$  である。更に  $k \equiv 0 \pmod{m-1}$  ならば

$(GL(2m+1), \text{目}, \lambda \mathbb{C}^{2m+1})$  は  $r' = \frac{2m+1}{2m-2} r$  次の相対不変式をもつ。

( $m=3, r=4, r'=7$  がもとの場合である)

実は  $(GL(8), \text{目}, \lambda \mathbb{C}^8)$  の16次の相対不変式も構成できる。

これも次の様に一般化される。

Proposition 3.  $(GL(2m+1), \text{目}, \lambda \mathbb{C}^{2m+1})$  が  $r$  次の相対不変式をもてば  $k = \frac{r}{2m+1} \in \mathbb{Z}$  である。更に  $k \equiv 0 \pmod{m-2}$  ならば

$(GL(2m+2), \text{目}, \lambda \mathbb{C}^{2m+2})$  は  $r' = \frac{2(m^2-1)}{(2m+1)(m-2)}$  次の相対不変式をもつ。

( $GL(7), \text{目}$  は7次の相対不変式をもつから,  $m=3, r=7$  とすると  $r'=16$  となり  $(GL(8), \text{目})$  が16次の相対不変式をもつ事がわかる。) 詳しい証明は [1] を参照のこと。

#### 参考文献

- [1] T. Kimura, Remark on some combinatorial construction of relative invariants, to appear
- [2] H. Weyl, Classical Groups, Princeton Univ. Press 1964
- [3] M. Sato & T. Kimura, A classification of Irreducible Prehomogeneous Vector Spaces and Their Relative Invariants, Nagoya Math. J. vol 65 (1977), 1~155頁.