

量子スピン鎖における新しい相関関数 — emptiness formation probability — に関する最近の発展¹

東京大学 物性研究所 城石 正弘²

岡山大学 理学部 西山 由弘³

(2002 年 7 月 19 日受理)

量子 XXZ スピン鎖は厳密に解けることはよく知られているが、相関関数を計算することは、特別な場合 (XX0 スピン鎖) を除いて依然として困難な問題である。ただし、よく知られているように、絶対零度で massless の臨界領域では共形場の理論を援用することによって非常に遠方の二点相関関数の漸近形の情報を引き出すことはできる。

ところが、最近、Emptiness Formation Probability (EFP) とよばれる、ある長さ n にわたってスピンの縦成分が強磁性的になる確率 $P(n)$ について様々な発展が報告されている。これは今まであまり考察されてこなかった新しい相関関数であり、元来はより物理的な相関関数を厳密に計算するためのファーストステップとして導入されたものである。しかし、最近では $P(n)$ それ自体、多くの興味深い性質を持つことが認識されつつある。特に、臨界領域では通常の二点相関関数は絶対零度で代数的に減衰するのに対して、 $P(n)$ はガウシアン的に減衰すると議論されている。また、有限温度では $P(n)$ は指数的に減衰し、その“相関距離”は 1 サイト当たりの自由エネルギーで表わされ则认为られている。

本レビューでは、現在までの XXZ スピン鎖の EFP に関連する発展をまとめた後、その特別な場合である XX0 スピン鎖で、 $P(n)$ を厳密に計算し、上の漸近予想が正しいことを示す。また、XXX スピン鎖や XXZ スピン鎖の特別な場合 ($\Delta = 1/2$) で最近、報告されている解析的な結果について紹介する。

また、同時に、絶対零度では密度行列繰り込み群を、有限温度では連続時間量子モンテカルロを用いて $P(n)$ を直接数値的に評価して、上記の漸近形の予想が肯定的に支持されることをみた。

¹ 本稿は、編集部の方から特にお願いして執筆していただいた記事である。

² E-mail: siroisi@issp.u-tokyo.ac.jp

³ E-mail: nisyama@science.okayama-u.ac.jp

1 はじめに

量子 XXZ スピン鎖

$$H = J \sum_{j=1}^N \left\{ S_j^x S_{j+1}^x + S_j^y S_{j+1}^y + \Delta \left(S_j^z S_{j+1}^z - \frac{1}{4} \right) \right\} - 2h \sum_{j=1}^N S_j^z, \quad (J > 0) \quad (1)$$

はベーテ仮説法を用いて厳密に解くことができ、さまざまな物理量が正確に計算されている [1]。しかしながら相関関数を厳密に計算することは、依然として難しい問題である [2, 3]。幸いなことに $-1 < \Delta \leq 1$ の臨界領域では長波長、すなわち低エネルギーの物理は、共形場理論で記述されることが分かっており、ベーテ仮説方程式を解析して得られる低エネルギー励起の有限サイズ補正と共形場理論を組み合わせることによって、二点相関関数の情報を引き出すことができる [4]。とくにこの臨界領域では二点相関関数は代数的に減衰し、その臨界指数が計算できる。しかしながら、共形場理論に焼き直した時点で短距離の揺らぎはいわば apriori に繰り込まれてしまっている。そのため、できれば、実際に短波長の揺らぎを繰り込みながら漸近的ふるまいを調べることで、つまり、二点相関関数を近いところから一個一個厳密に求めていき、その極限として漸近形を求めるのが望ましい。残念ながら現在までのところ、 $\Delta = 0$ の場合 (XX0 スピン鎖) を除いてそのような試みは成功していない。

一方、二点相関関数以外の相関関数も全ての場の理論でとらえることが可能であるかという疑問もある。そこで、本レビューでは次のような Emptiness Formation Probability (EFP) [5, 6, 7] と呼ばれる特殊な多点相関関数⁴

$$P(n) = \left\langle \prod_{j=1}^n \left(S_j^z + \frac{1}{2} \right) \right\rangle, \quad (2)$$

に注目してこの相関関数に関する最近の研究を紹介したい。定義から明らかなように、この相関関数はある長さ n にわたって、スピンの縦成分が強磁性的（ここでは上向きに揃っている場合）になる確率である。絶対零度の場合、基底状態が強磁性的秩序を持つ $\Delta \leq -1$ の領域では $P(n)$ は自明に 1 (または 0) である。また、 $\Delta \rightarrow \infty$ の反強磁性イジング極限では $P(n)$ は当然 ($n \geq 2$ で) 0 になる。上の定義からわかるように $P(n)$ は格子模型固有の特徴を取り込んだものであり、場の理論的な記述とはあまりなじまない量ではないと思われる。

この相関関数は、数理物理的な観点からは極めて基本的な相関関数である。実際、 $\Delta > 1$ のギャップのある反強磁性領域では磁場 $h = 0$ の場合に限ってはあがあるが、神保-三木-三輪-中屋敷 [8] によって得られた相関関数の多重積分表示の特別な場合として $P(n)$ を多重積分で表す公式が得られている。また、我々の興味ある $-1 < \Delta < 1$ の領域では神保-三輪

⁴ Ferromagnetic String Formation Probability (FSFP)、あるいは Probability of Formation of Ferromagnetic String (PFFS) と呼ばれることもある。

[9] によって

$$P(n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(\frac{\pi}{\eta}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda_1}{2\pi} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda_n}{2\pi} \prod_{a>b} \frac{\sinh \frac{\pi}{\eta}(\lambda_a - \lambda_b)}{\sinh(\lambda_a - \lambda_b - i\eta)} \\ \times \prod_{j=1}^n \frac{\sinh^{j-1}(\lambda_j - i\frac{\eta}{2}) \sinh^{n-j}(\lambda_j + i\frac{\eta}{2})}{\cosh^n(\frac{\pi}{\eta}\lambda_j)}, \quad (3)$$

と予想された。ここで η は $\Delta = \cos \eta$ で定義される。最近、代数的ベーテ仮説法を用いた相関関数の研究に進歩があり、式 (3) は Kitanine–Maillet–Terras によって肯定的に証明された [10]。彼らはさらに磁場が有限の場合にも (3) を拡張していることにも注意しておく。また、 $\Delta = 1$ の場合、つまり反強磁性 XXX スピン鎖の場合には、 $\Delta > 1$ の場合、あるいは式 (3) から極限をとることによって $P(n)$ の多重積分表示が得られる [5, 11]。

さて、先ほどの問題意識との関連で言えば、多重積分表示 (3) を用いて各 n に対して $P(n)$ の解析的な値を求め、 $n \rightarrow \infty$ の漸近形が計算できれば一番望ましいわけである。しかしながら、現在までのところ、第2節で議論する $\Delta = 0$ の場合 ($XX0$ スピン鎖) と第4節で紹介する XXZ スピン鎖で $\Delta = 1/2$ の場合を除いてそのようなプログラムは実現されていない。なお、第3節で紹介するように、 $\Delta = 1$ の場合には、多重積分を実行することによって、最近、 $n = 5$ までの $P(n)$ が解析的に求められた。この場合、各 $P(n)$ の表式にはゼータ関数の特殊値が現れ、数論の研究者にも興味を持たれている。

ここで、読者の中には多重積分公式 (3) があるのだからそれを直接数値積分して $P(n)$ を数値的に求めればいだろうと思われる方がいると思う。実は、我々もそのように考え、標準的なモンテカルロ数値積分法を用いて多重積分 (3) を計算してみた。しかしながら、この方法では $n = 6$ あたりが限界で、それより大きな n では信頼できる値は得られなかった。これは多重積分の被積分関数が非常に激しく振動する関数であることが原因であろう。いずれにしろ、公式 (3) は数値計算にはあまり向いていないようである。

そこで、我々は公式 (3) に頼らず、いわば力づくで、EFP (2) をシミュレーションしてみようと考えた。幸いにも、1990年代に1次元量子多体系の第一原理計算技術に長足の進歩があり、現在では、かなり信頼できるシミュレーションができるようになっている。我々は絶対零度の EFP の数値計算には密度行列繰り込み群 (DMRG) [12, 13] を、また、有限温度 (後述) の計算には連続時間量子モンテカルロ法 [14, 15, 16, 17, 18] を採用した。両手法とも最近、頻繁に活用されているので、なじみがあるかもしれない。特に、前者は、厳密対角化法のボトルネックであったシステムサイズの制限を解消できるという利点があり、また、後者は、従来の手法で必須であった Trotter 外挿の手間とノウハウから解放されるという利点がある。そのため、EFP を定量的に、かつ、なるべく遠方の漸近形も含めて調べたいという我々の目的にとって非常に都合がよい。その方法論の詳細とパフォーマンスの吟味は、第2.3節で述べる。また、実際の数値計算結果は、各節で示す。これらを通じて、EFP の問題に対して計算物理的な手法が非常に有効であることが理解されると思う。実は、DMRG は一般に臨界系の相関関数の計算には力不足であると考えられていたのだ

が、今回の研究から EFP の計算には非常に適していることがわかった。これは我々も非常に驚くべき結果であり、EFP の研究は、今後の DMRG の活用の新舞台として期待できると考えられる。

さて、EFP は有限温度に自然に拡張され、

$$P(n) = \langle \prod_{j=1}^n (S_j^z + \frac{1}{2}) \rangle_T \equiv \frac{\text{Tr} \left\{ e^{-H/T} \prod_{j=1}^n (S_j^z + \frac{1}{2}) \right\}}{\text{Tr} \{ e^{-H/T} \}}, \quad (4)$$

と定義される。この場合、もちろん各 $P(n)$ の計算は絶対零度に比べてより困難になり、例えば多重積分表示などが存在するかどうかはわかっていない。一方、Boos-Korepin [19] と鈴木 [20] によって示されたように、簡単な物理的考察により $n \rightarrow \infty$ における漸近形は

$$P(n) \sim \exp \left\{ \frac{n(f - e_s)}{T} \right\}, \quad (5)$$

で与えられることがわかる。ここで f は系の 1 サイトあたりの自由エネルギー、また e_s は系が完全にスピン上向き状態に揃ったときの 1 サイトあたりのエネルギーである。我々のハミルトニアン (1) では $e_s = -h$ である。

これに対して、絶対零度 ($T = 0$) では、 $P(n)$ は $n \rightarrow \infty$ でガウシアン的に減衰すると予想されている [6]。つまり、絶対零度の方が、有限温度の場合よりずっと早く減衰すると考えられているのである。これは有限温度で指数関数的に減衰して、絶対零度では、よりゆっくり (代数的に) 減衰する通常の二点相関関数とは非常に異なっている。

この性質を物理的に理解するには 1 次元量子系を 2 次元古典系に焼き直す見方が便利である。新しい次元は、虚時間の次元であると解釈され、逆温度の寸法 $\beta = 1/k_B T$ を持つ。まず、十分低温で長さ n の EFP が形成されたとしよう。すると、この虚時間の方向にも長さ n 程度の EFP が成長していると考えられるであろう。つまり、二次元的な大きさ ($\sim n^2$) の EFP の domain ができていると予想できる。 $P(n)$ の定義式 (4) の分子は、おおざっぱに言って、この domain を除いた領域でトレースを取ることに対応している。その結果、 $P(n)$ はガウシアン的な $\sim e^{-\alpha n^2}$ にふるまうことが期待できるのである。さて、温度が上がると虚時間方向の寸法が短くなってくると、 n が大きいところでは、この domain は虚時間方向には詰まってしまい、結果として n に比例する大きさを持つようになるであろう。そのため、式 (5) で与えられるような指数関数的な減衰に移行すると考えられるのである。

第 2 節で示す $\Delta = 0$ の場合の結果によると、上の物理的解釈は成り立っているようである。しかし、異方性パラメーター Δ が一般の場合に上の物理的な描像を取り入れた、きっちりとした証明は今のところできていない。その上、臨界的な系の秩序変数の domain 構造はフラクタル次元を持つので [21]、domain を二次元的とする仮定は、必ずしも確かとは言い難い。この意味で絶対零度のガウシアン的な減衰は現象論的な観点からも興味深いのである。以下では各 Δ ごとに $P(n)$ に関して現在までわかっていることをレビューしたい。

2 XX0 スピン鎖の場合

まず、 $\Delta = 0$ の場合、つまり XX0 スピン鎖の場合の EFP を考察しよう [22]。良く知られているように、XX0 スピン鎖模型は Jordan-Wigner 変換を用いることによって、相互作用のない 1 次元の格子スピンレスフェルミオン模型に変換される [23]。具体的には、例えば

$$S_k^- = \prod_{j=1}^{k-1} (1 - 2c_j^\dagger c_j) c_k^\dagger, \quad S_k^+ = \prod_{j=1}^{k-1} (1 - 2c_j^\dagger c_j) c_k, \quad (6)$$

というマッピングによってスピン鎖模型のハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = -\frac{J}{2} \sum_{j=1}^{N-1} (c_{j+1}^\dagger c_j + c_j^\dagger c_{j+1}) - hN + 2h \sum_{j=1}^N c_j^\dagger c_j + \frac{J}{2} \left\{ \prod_{k=1}^N (1 - 2c_k^\dagger c_k) \right\} (c_1^\dagger c_N + c_N^\dagger c_1), \quad (7)$$

という格子フェルミオン模型に変換される。ここで、 $c_j^\dagger$ と c_j は正準反交換関係を満たすフェルミオンの生成消滅演算子である。フーリエ変換を用いることによってフェルミオン模型 (7) は対角化できる。とくに熱力学的極限 ($N \rightarrow \infty$) において基底状態エネルギーは

$$e = -h + \frac{1}{2\pi} \int_{-k_F}^{k_F} (2h - J \cos q) dq, \quad (8)$$

と表される。ここで、フェルミ点 k_F は磁場の関数として $k_F = \cos^{-1}(2h/J)$ と書ける。磁場 h が臨界磁場 $h_c = J/2$ より大きくなると $k_F = 0$ になることに注意しておく。一方、温度 T における 1 サイトあたりの自由エネルギーは

$$\begin{aligned} f(T, h) &= -h - \frac{T}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(1 + e^{-\epsilon(q)/T}) dq, \\ \epsilon(q) &= 2h - J \cos q, \end{aligned} \quad (9)$$

と表される [23, 24]。ほかに、絶対零度および有限温度での二点相関関数も詳しく研究されている [23, 25, 26, 27, 28, 29]。絶対零度では

$$\begin{aligned} \langle S_r^x S_0^x \rangle &\sim 1/\sqrt{r}, \\ \langle \langle S_r^z S_0^z \rangle \rangle &\equiv \langle S_r^z S_0^z \rangle - \langle S_r^z \rangle \langle S_0^z \rangle \sim 1/r^2, \end{aligned} \quad (10)$$

のように代数的に減衰し、また、有限温度ではともに指数関数的 ($\sim e^{-r/\xi}$) に減衰し相関距離はそれぞれ

$$\xi_{xx}^{-1} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dq \ln \left(\coth \left| \frac{J \cos q - 2h}{2T} \right| \right), \quad (11)$$

$$\xi_{zz}^{-1} = \sinh^{-1} \left(\frac{\pi T - 2ih}{J} \right) + \sinh^{-1} \left(\frac{\pi T + 2ih}{J} \right), \quad (12)$$

で表されることが分かっている [28, 30]。

一方、EFP のような多点相関関数はその物理的動機があまりないこともあってか XX0 スピン鎖においても、今まであまり積極的に調べられていなかった。しかしながら、以下に示すように実は XX0 スピン鎖の EFP は非常に簡単に計算できて、その性質を詳細に調べることが可能なのである。

2.1 XX0 スピン鎖の絶対零度での EFP

フェルミオン演算子を用いると EFP は $P(n) = \langle \prod_{j=1}^n c_j c_j^\dagger \rangle$ と表せることが容易に分かる。

Wick の定理を用いると、これはさらに

$$P(n) = \det[\langle c_l c_m^\dagger \rangle]_{l,m=1}^n = \det \left[\frac{1}{2\pi} \int_{k_F}^{2\pi-k_F} e^{i(l-m)q} dq \right]_{l,m=1}^n, \quad (13)$$

と行列式で表せることが示せる。しかも行列式の中の積分は

$$\frac{1}{2\pi} \int_{k_F}^{2\pi-k_F} e^{i(l-m)q} dq = \begin{cases} -\frac{\sin(l-m)k_F}{l-m}, & l \neq m \\ 1 - \frac{k_F}{\pi}, & l = m \end{cases} \quad (14)$$

である。つまり、実は XX0 スピン鎖の EFP は解析的に求まってしまうのである。なお、この場合 ($\Delta = 0$) には磁場の入った $P(n)$ の多重積分公式からも、式 (13) は導ける [22]。しかし、一般の Δ の場合にはこのような Toeplitz 行列式による $P(n)$ の表現は存在しないと考えられている。その意味で XX0 スピン鎖の $P(n)$ は非常に特別である。

さて、式 (13) のような行列式は数学的には Toeplitz 行列式と呼ばれ、古くから研究されてきた。特に $n \rightarrow \infty$ での漸近形に関しては Widom の定理 [31] が知られており、この定理を用いると $P(n)$ の $n \rightarrow \infty$ での漸近形は

$$\begin{aligned} P(n) &\simeq 2^{\frac{1}{12}} e^{3\zeta'(-1)} \left(\sin \frac{k_F}{2} \right)^{-\frac{1}{4}} n^{-\frac{1}{4}} \left(\cos \frac{k_F}{2} \right)^{n^2} \\ &= 2^{\frac{1}{12}} e^{3\zeta'(-1)} \left(\frac{1-h/h_c}{2} \right)^{-\frac{1}{8}} n^{-\frac{1}{4}} \left(\frac{1+h/h_c}{2} \right)^{\frac{n^2}{2}}, \end{aligned} \quad (15)$$

となることがわかる。ただし、ここで $|h| < h_c (= J/2)$ を仮定した。また、 $\zeta(x)$ は Riemann のゼータ関数であり、 $2^{\frac{1}{12}} e^{3\zeta'(-1)} = 0.645002 \dots$ である。式 (15) から $P(n)$ は n が大きいところで確かにガウシアン的に減衰することがわかる。より厳密には急速にガウシアン減衰する項に $n^{-\frac{1}{4}}$ という項が補正として付加されている。実は XX0 スピン鎖の EFP に関しては、上のような Toeplitz 行列式ではなく、それと同等な Fredholm 行列式を用いた表示に基づく研究があって、磁場に依存してガウシアン減衰することはほぼ分かっていた [6, 32, 33]。しかしながら、 n に依らない係数や代数的に減衰する部分 $n^{-1/4}$ 等の prefactor は従来分かっていたいなかった。今回これらの項の具体的な形が明らかになったことで、数値計算との詳細な比較が可能になった。

まず、 $P(n)$ の値を Toeplitz 行列式 (13) から計算したものと漸近形 (15) を図 1 に示す。図中の m は磁化を表し、

$$m \equiv \frac{1}{2} - \frac{k_F}{\pi}, \quad (16)$$

で与えられる。驚くべきことに十分小さな n の $P(n)$ の値も漸近形 (15) の上に乗っていることが分かる。また、磁場 $h(>0)$ を大きくしていくと減衰は遅くなるが、臨界磁場 h_c

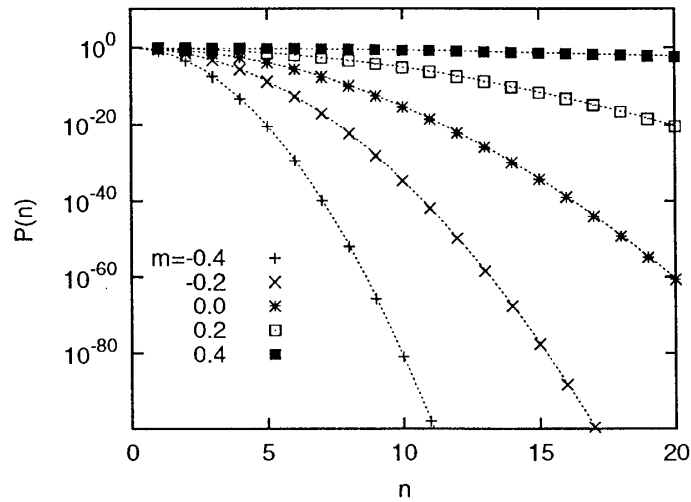


図 1: XX0 スピン鎖の絶対零度での EFP (文献 [22] より)

を超えない限り $P(n)$ はガウシアン的に減衰していくことも注目すべき点である。なお、 $h \geq h_c$ では $P(n)$ はもちろん恒等的に 1 である。

次に DMRG を用いて XX0 模型の EFP を直接に数値計算した結果を図 2 に示す。破線はやはり漸近形 (15) である。また、磁化 $m = 0$ の場合の実際の計算結果を表 1 に示す。以上の結果から、DMRG による数値計算は解析的な結果と非常によく合っていることがわかる。逆に、この結果から DMRG による数値計算は EFP の研究に非常に有効であることが言える。

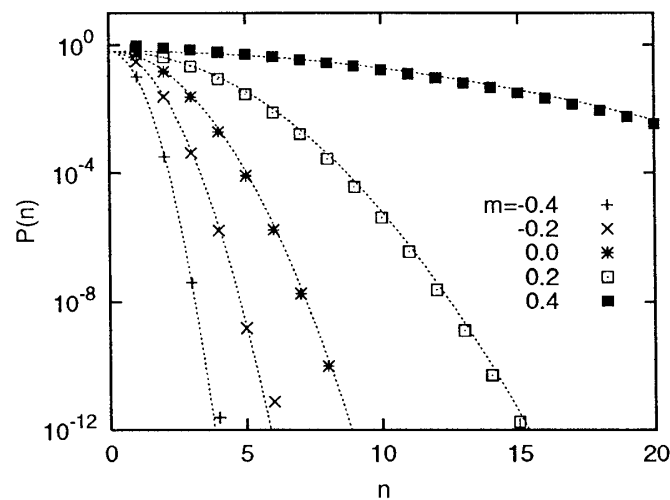


図 2: DMRG による XX0 スピン鎖の EFP の数値計算 (文献 [22] より)

n	DMRG	厳密値
1	0.500	0.5
2	1.487×10^{-1}	1.487×10^{-1}
3	2.368×10^{-2}	2.368×10^{-2}
4	1.945×10^{-3}	1.945×10^{-3}
5	8.120×10^{-5}	8.126×10^{-5}
6	1.713×10^{-6}	1.715×10^{-6}
7	1.820×10^{-8}	1.823×10^{-8}
8	9.806×10^{-11}	9.740×10^{-11}

 表 1: DMRG による XX0 スピン鎖の EFP の数値計算 ($m = 0$)

2.2 XX0 スピン鎖の有限温度での EFP

XX0 スピン鎖の場合、有限温度でも EFP は解析的に計算できる。事実、有限温度における Wick の定理 (Bloch-de Dominicis の定理) を適用すると、EFP は

$$\begin{aligned}
 P(n) &= \langle \prod_{j=1}^n c_j c_j^\dagger \rangle_T \\
 &= \det \left[\langle c_l c_m^\dagger \rangle_T \right]_{l,m=1}^n \\
 &= \det \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(l-m)q} \rho(q) dq \right]_{l,m=1}^n,
 \end{aligned} \tag{17}$$

と計算できる。ここで、

$$\rho(q) = \frac{1}{1 + e^{-\varepsilon(q)/T}} = 1 - \frac{1}{1 + e^{\varepsilon(q)/T}}, \tag{18}$$

である。また、 $1/(1 + e^{\varepsilon(q)/T})$ はフェルミ分布関数であることに注意しておく。結局、絶対零度の場合と比べると有限温度では行列式の中の積分が

$$\int_{k_F}^{2\pi - k_F} dq \longrightarrow \int_0^{2\pi} \rho(q) dq, \tag{19}$$

と変わっているだけである。これは絶対零度でステップ関数であった分布関数が有限温度では“連続な”フェルミ分布関数になることにほかならない。しかしながら、この違いによって n が大きいところでの $P(n)$ の漸近的ふるまいは本質的に変わってしまうのである。実際、今度は Toeplitz 行列式に対する Szegő の定理 (例えば文献 [34] の第 10 章参照) が適用できて、 $P(n)$ の漸近形は

$$\ln P(n) = n\rho_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k\rho_k \rho_{-k} + o(1), \tag{20}$$

で与えられることが示せる。ここで ρ_k は $\ln \rho(q)$ のフーリエ成分、すなわち

$$\ln \rho(q) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k e^{ikq}, \tag{21}$$

である。特に、 ρ_0 は

$$\rho_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(1 + e^{-\varepsilon(q)/T}) dq = \frac{f(T, h) + h}{T}, \quad (22)$$

のように 模型の 1 サイトあたりの自由エネルギー $f(T, h)$ と磁場で表せるので漸近形 (20) は

$$P(n) \simeq c(T, h) \exp\left(-\frac{n}{\xi}\right), \quad (23)$$

$$\xi^{-1} = -\frac{f(T, h) + h}{T}, \quad (24)$$

$$c(T, h) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} k \rho_k \rho_{-k}\right), \quad (25)$$

と表現することもできる。すなわち XX0 スピン鎖の場合、序節で述べた有限温度における $P(n)$ の漸近形が正しいことが解析的に証明できたのである。

温度 $T = 0.05, 1$ の場合に Toeplitz 行列式 (17) から計算した $P(n)$ と対応する漸近形 (23) をそれぞれ図 3 と図 4 にセミログでプロットした。これらの図から確かに n が十分大きいときには $P(n)$ は指数関数的に減衰していることがわかる。とりわけ、高温 ($T = 1$) では n が小さいところでも $P(n)$ の値は漸近形 (23) 上に乗っている。一方、低温 ($T = 0.05$) の場合には n が小さいときにはガウシアン的に減衰し、 n が大きくなるにつれて指数関数的に減衰しているのが読み取れる。これは序節で述べた物理的描像と合致している。

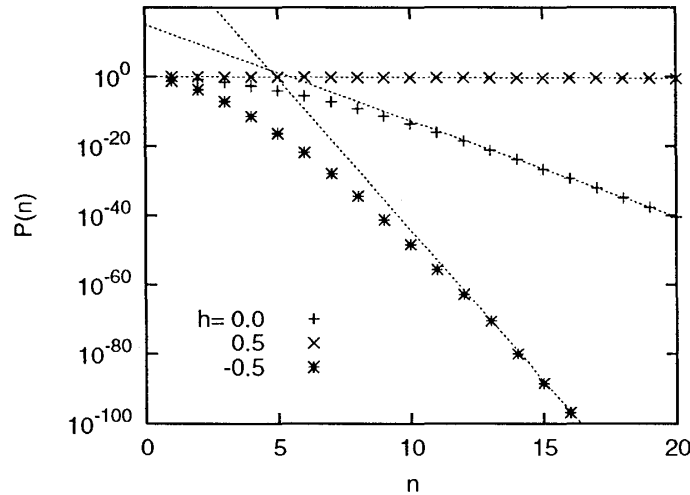


図 3: XX0 スピン鎖の有限温度での EFP : $J = 1, T = 0.05$ (文献 [22] より)

また、以上の解析的な結果とは独立に、有限温度での EFP を量子モンテカルロ法を用いて数値計算してみた。温度 $T = 1$ の場合の結果を図 5 に示す。ここで図中の破線は漸近形 (23) であり、量子モンテカルロ法による結果と非常によく一致していることがわかる。

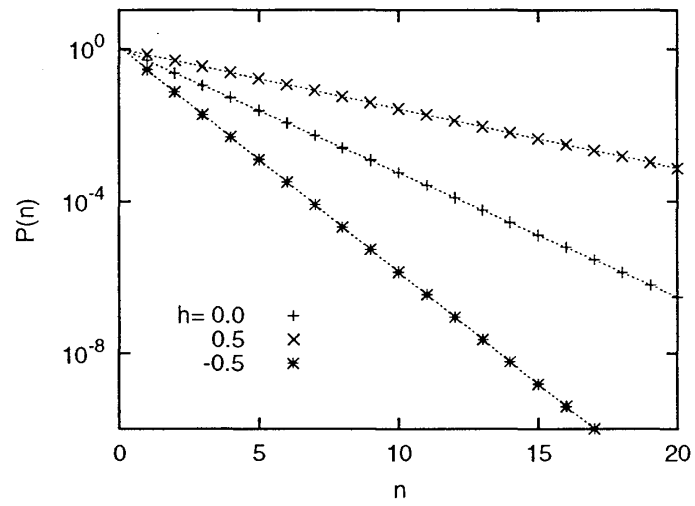


図 4: XX0 スピン鎖の有限温度での EFP : $J = 1, T = 1$ (文献 [22] より)

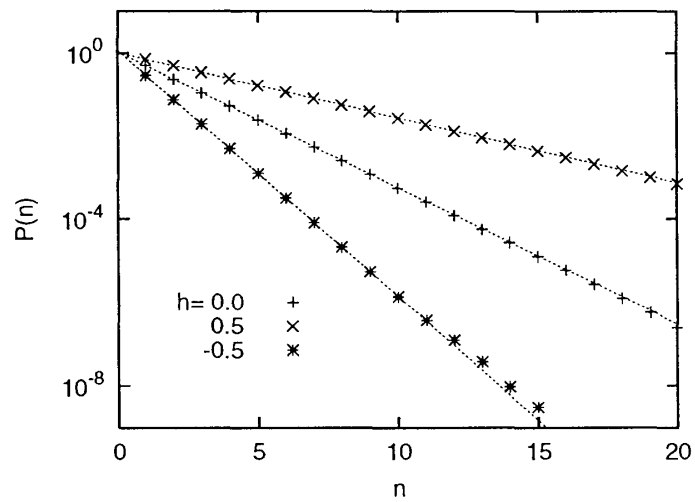


図 5: 量子モンテカルロ法による XX0 スピン鎖の EFP の数値計算: $J = 1, T = 1$ (文献 [22] より)

さて、 $|h| < h_c$ のとき、XX0 スピン鎖の自由エネルギーは低温で

$$f(T, h) = e - \frac{\pi T^2}{6v_s} + O(T^3), \quad (26)$$

とふるまう。ここで e は基底状態エネルギー (8) であり、また v_s はフェルミ速度 ($= J \cos^{-1}(2h/J)$) である。これから、EFP の“相関距離” ξ の低温での温度依存性は

$$\xi^{-1} = \frac{1}{\pi T} \left\{ J \sin \left[\cos^{-1} (2h/J) \right] - 2h \cos^{-1} (2h/J) \right\} + \frac{\pi T}{6J \cos^{-1}(2h/J)} + O(T^2), \quad (27)$$

で与えられることがわかる。すなわち相関距離 ξ は低温極限で温度に比例してゼロになる。これは二点相関関数の相関距離 (ξ_{xx} および ξ_{zz}) が低温で $1/T$ で発散するのと極めて対照的である。これは EFP の場合には、絶対零度では有限温度よりずっと早く減衰する（ガウシアン的減衰）ことに対応している。なお、 $h = h_c$ では 相関距離 ξ は低温で $1/\sqrt{T}$ で発散することを付け加えておく。このことは $h = h_c$ では絶対零度ですべてのスピンの上向きに揃って $P(n) = 1$ になることに関連している。一方、高温極限では $\xi^{-1} \rightarrow \ln 2$, $c(T, h) \rightarrow 1$ となり、 $P(n)$ は $(1/2)^n$ に近づく。つまり、磁場のない全く独立なスピン系の EFP と同じになるわけである。 $P(n)$ の相関距離 ξ の温度依存性を図 6 に示す。

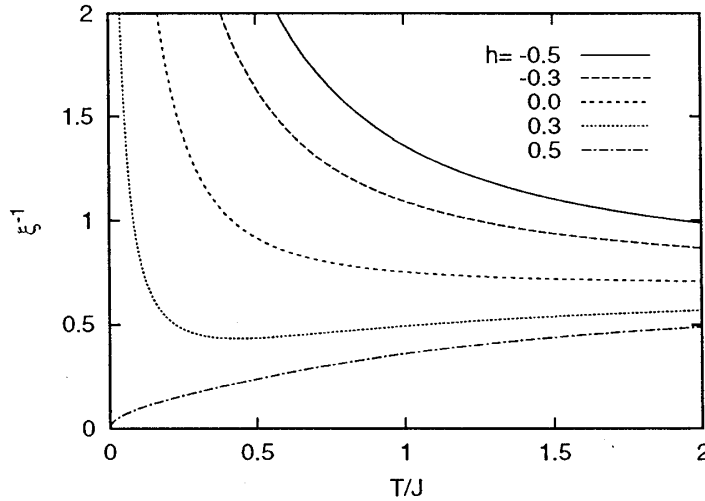


図 6: XX0 スピン鎖の EFP の相関距離の逆数 ξ^{-1} の温度依存性 (文献 [22] より)

2.3 数値計算手法と性能の詳細

ここで、既に結果だけ示した数値計算のアルゴリズムを説明しよう。また、パフォーマンスに関するやや立ち入った議論も示す。

1次元の量子多体模型の第一原理計算に関しては、1990年代に大きな発展があり、現在では、相当信頼できる計算ができるようになっている。前節で示したように、我々は絶対

零度の EFP の数値計算には DMRG [12, 13, 35] を、また、有限温度の計算には連続時間量子モンテカルロ法 [14, 15, 16, 17, 18] を採用した。

まず、DMRG を用いた絶対零度における計算の実際を紹介しよう。我々は、絶対零度のバルクの物理量を計算するのに適している “infinite algorithm” を採用した。(端の効果を調べたいとき、また、システムサイズを指定した上で有限サイズ補正を精査したいときは、“finite algorithm” が適している。) 我々の計算のアルゴリズム自体は標準的であり、原論文 [12, 13] に従っている。また、DMRG の会議録 [35] の説明等も役に立つので参照してほしい。いずれにしても、詳細を別にすれば、DMRG は数値的な実空間繰り込みである。特にブロック状態の選定に密度行列を活用する点が特徴的で、その命名の由来にもなった。つまり、密度行列のウェイトの高い状態を残して、低い状態は捨て去ることによって繰り込みを実現しているのである。本計算では、ウェイト $w_\alpha < 10^{-10}$ の状態は捨て去った。これは、ブロックに、(最大) $m = 160$ 程度の状態を残すことに相当する。(磁場をかけてスピンのゆらぎを押さえると、必要な状態数が減るので、それに連動して必要な m も押さえられる。) また、繰り込み回数は約 200 回である。

次にパフォーマンスの議論に立ち入ろう。そのまえに、DMRG のからくりに関する Östlund と Rommer の指摘 [36] を踏まえておく。彼らによると、DMRG による計算は、暗に行列積で「変分」波動関数をつくることに相当している。実際、その変分波動関数のサイズは DMRG のブロック状態数と等しい。つまり、DMRG は本質的に変分法なのである。したがって DMRG を用いた計算は固有エネルギーの精度は高いが相関関数の信頼度は低いという性質がある。このため計算の初期段階では、我々は計算結果の確からしさに不安を持っていた。ところが、既に示したように、DMRG の結果は、解析的な表式と非常に満足すべき一致を示している。特に強調したい点は、 n が大きくなると $P(n)$ の値自体は急速に小さくなるが、相対誤差は保たれている点である。ガウシアン減衰の指数を精度良く見積もる、というのが、我々の目下の目標なので、この結果は非常に具合がよい。前節での XX0 スピン鎖における計算は、解析計算のサポートという側面もあるが、むしろ、以後の一般的な場合に備えるという意味合いもある。我々は、XX0 スピン鎖における DMRG 計算で、その信頼性に関する感触をえることができ、以後、より非自明な場合にも、計算をすすめる自信を得ることができた。

実際のところ、なぜ DMRG を用いた EFP の計算がうまくいくのかのからくり自体は不明である。一般に行列積変分波動関数を用いる DMRG の相関関数の計算では指数関数的な減衰を示すと考えられている。したがってガウシアン減衰する EFP は DMRG ではとらえにくいはずである。この点に関しては、今後の発展が期待される。

ちなみに、「 $n = 2$ の EFP は、最近接なので、エネルギー期待値に相当している。だから、DMRG で (もっと高い) 精度が確保されないのはおかしい」と批判を受けることが多いが、これは間違っている。いま、XX0 スピン鎖であるので、スピンの縦成分と横成分は等しくない。これらを、足し合わせたものがエネルギーであり、変分原理によって高い信頼度が確保されているのである。つまり、スピンの縦成分の項だけの精度は、変分原理の

保証が無いのである。

だが、幾らかの問題点も存在する。例えばブロックに繰り込まれたスピン数の偶奇によって、ブロック状態のヒルベルト空間の構造がまったく異なる点である。つまり、偶数番目の繰り込みと奇数番目の繰り込みが(多数回の繰り込みを経た後でも)、互いに収束し合わない。これはある意味「端の影響が残っている」ためともいえ、バルク極限の収束値を得る障害になっている。現在のところ、両者の相加平均を最終的な答として採用している。

つぎに、量子モンテカルロを用いた有限温度における数値計算についてまとめておこう。本計算では、連続時間アルゴリズムとループアルゴリズムを採用している。良く知られているように、従来の量子モンテカルロ計算では、虚時間を離散化しているため離散化に伴う誤差や補正を考慮しなければならなかった。これがすなわち、トロッター外挿という手続きである。ところが、新しく考案された連続時間アルゴリズムでは、そのような離散化の誤差は最初から解消され、トロッター外挿の必要もない。そのため非常に精度の良い計算が可能になった。我々の計算では、特に定量的な信頼度を最大限重要視したいので、連続時間アルゴリズムを採用した。また、同時にループアルゴリズムを用いてスピン配位の更新を大域的に行った。このアルゴリズムは効率よく状態更新できるという利点がある。

実際の計算では、周期境界条件の下でのシステムサイズ $N = 128$ の系を取り扱っている。それぞれのデータについて、500 万 MCS を費やしている。また、その本計算に入る前に、50 万 MCS の予備状態更新を実行している。これは、熱平衡状態へ到達するためである。既に前節で結果を示したように、これらのアルゴリズムによって有限温度における EFP の解析的な結果を非常に良くサポートする結果を得ることができた。しかしながら、計算上の問題点も存在している。例えば、本計算方法では強磁場側でかつ低温の場合ではモンテカルロ平均にばらつきや系統誤差がみられ、解析的な結果を再現できなかった。この条件下では、状態更新が「凍結する」という困難が、以前から指摘されている。残念ながら、この条件下での、EFP の数値計算は困難な課題として残されている。

現在、XX0 スピン鎖の場合の結果に encourage されて、より非自明な場合への応用を目指している。次節では XXX スピン鎖の場合の結果を紹介する。

3 XXX スピン鎖 ($\Delta = 1$) の場合

$\Delta = 1$ 、すなわち反強磁性 XXX スピン鎖は物理的にとりわけ重要なモデルである。この場合、絶対零度での零磁場での EFP の多重積分表示 (3) は

$$P(n) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda_1}{2\pi} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\lambda_n}{2\pi} \prod_{a>b} \frac{\sinh(\lambda_a - \lambda_b)}{\lambda_a - \lambda_b - \pi i} \times \prod_{j=1}^n \frac{(\lambda_j - \frac{\pi i}{2})^{j-1} (\lambda_j + \frac{\pi i}{2})^{n-j}}{\cosh^n \lambda_j}, \quad (28)$$

で与えられる。さて、 $P(1)$ の値は自明に $1/2$ であるが、 $P(2)$, $P(3)$ の値も二点相関関数の特別な場合の値⁵

$$\langle S_1^z S_2^z \rangle = \frac{1}{12}(1 - 4 \ln 2), \quad \langle S_1^z S_3^z \rangle = \frac{1}{12}(1 - 16 \ln 2 + 9\zeta(3)), \quad (29)$$

を用いて

$$P(2) = \langle S_1^z S_2^z \rangle + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \ln 2 = 0.102284273 \dots, \quad (30)$$

$$P(3) = \langle S_1^z S_2^z \rangle + \frac{1}{2} \langle S_1^z S_3^z \rangle + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} - \ln 2 + \frac{3}{8} \zeta(3) = 0.007624158 \dots, \quad (31)$$

と書けることが以前からわかっていた。実際、 $P(2)$ に関しては多重積分 (28) から解析的な表式 (30) が得られることは知られていた。しかし、 $P(3)$ に関しては多重積分表示 (28) から表式 (31) を導くことは、長い間誰もできなかった。ところが、最近、Boos-Korepin はそれが実際に可能であることを示し、さらに $P(4)$ の解析的な値も多重積分表示 (28) から導いた [19, 38]。引き続き、我々との共同研究で $P(5)$ の解析的な値も計算することにも成功した [39]。以下に $P(4)$ と $P(5)$ の結果をまとめて示す。

$$P(4) = \frac{1}{5} - 2 \ln 2 + \frac{173}{60} \zeta(3) - \frac{11}{6} \ln 2 \cdot \zeta(3) - \frac{51}{80} \zeta^2(3) - \frac{55}{24} \zeta(5) + \frac{85}{24} \ln 2 \cdot \zeta(5) = 0.000206270 \dots, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} P(5) &= \frac{1}{6} - \frac{10}{3} \ln 2 + \frac{281}{24} \zeta(3) - \frac{45}{2} \ln 2 \cdot \zeta(3) - \frac{489}{16} \zeta(3)^2 \\ &\quad - \frac{6775}{192} \zeta(5) + \frac{1225}{6} \ln 2 \cdot \zeta(5) - \frac{425}{64} \zeta(3) \cdot \zeta(5) - \frac{12125}{256} \zeta(5)^2 \\ &\quad + \frac{6223}{256} \zeta(7) - \frac{11515}{64} \ln 2 \cdot \zeta(7) + \frac{42777}{512} \zeta(3) \cdot \zeta(7) \\ &= 2.011725953 \dots \times 10^{-6}. \end{aligned} \quad (33)$$

Boos-Korepin は多重積分表示に現れる被積分関数を積分の値を変えないように、特別な形 (“canonical form”) に変形し、その後で実軸上の積分路を複素上半平面上での積分に変形させることによって積分 (最終的には留数計算) を実行した。具体的な計算方法の詳細は文献 [38] を見てほしい。この計算法を用いれば、原理的には任意の $P(n)$ が計算でき、それぞれ、ゼータ関数の特殊値 $\zeta(2k+1)$ と $\ln 2$ で表現できると考えられている。残念ながら現時点では $P(6)$ 以上の計算は実行されていない。また、 $P(n)$ の一般式に対する予想もない。しかしながら、XXX スピン鎖のような非自明な模型の $P(n)$ に対する多重積分が実際に実行できることが示された意義は大きい。実は、最近、XXZ 鎖で $\Delta = 1/2$ の場合にも、絶対零度で零磁場の $P(n)$ に対する多重積分が解析的に実行できることが、Kitanine-Maillet-Slavnov-Terras によって示された。これに関しては次節で紹介する。

さて、XX0 スピン鎖の場合と同様にして、我々は DMRG を用いて $n \geq 6$ の $P(n)$ の値を数値的に計算した。その結果を $n = 5$ までの厳密値とあわせて図 7 にプロットする。ただし、ここでは縦軸は $\ln P(n)$ 、横軸は n^2 を取ってみた。

⁵ 次近接相関関数 $\langle S_1^z S_3^z \rangle$ の値は高橋によって求められた [37]。

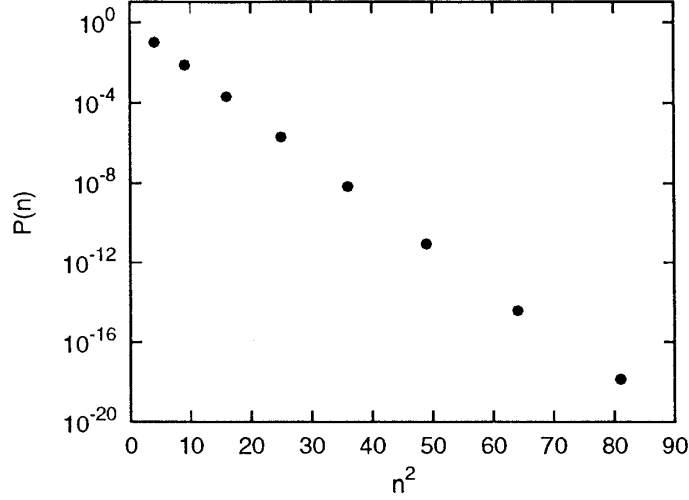


図 7: XXX スピン鎖の絶対零度での EFP の値

図 7 から明らかなように XXX スピン鎖の場合も $P(n)$ は確かにガウシアン的に減衰しているようである。代数的に減衰する部分を無視して $P(n) \sim a^{-n^2}$ とガウシアンで減衰すると仮定すると、我々の数値計算からは $a = 1.6719 \pm 0.0005$ と推定された [39]。より正確には XX0 スピン鎖の場合と同様に漸近形は $P(n) \simeq c_0 n^{-\gamma} a^{-n^2}$ で与えられるはずであり、これらの指数 c_0, γ, a を求めていくことは今後の課題である。

また、有限温度の場合の $P(n)$ の量子モンテカルロ法による数値計算結果を図 8 に示す。ここでは温度 T を変えてプロットした。また、縦軸は $\ln P(n)$ にとった。図 8 から XXX スピン鎖の場合も n が増大するにつれて、指数関数的に減衰しているのがわかる。図中の破線は漸近形 (5) である。XX0 鎖の場合と異なり漸近形の prefactor は知られていないので単純に 1 に取った。そのため、漸近形のプロットにおいては傾き (つまり f/T) のみが意味を持ち、 $P(n)$ のそれと良く合っていることがわかる⁶。

4 XXZ スピン鎖、 $\Delta = 1/2$ の場合

最近、Kitanine-Maillet-Slavnov-Terras によって XXZ スピン鎖で $\Delta = 1/2$ の場合、すなわち $\eta = \pi/3$ の場合に $P(n)$ の多重積分表示 (3) が解析的に計算できることが示された [42]⁷。その結果は非常にシンプルで

$$P(n) = \frac{1}{2^{n^2}} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)!k!}{(2k)!(2k+1)!} = \frac{1}{2^{n^2}} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{(3k+1)!}{(n+k)!}, \quad (34)$$

⁶ XXZ スピン鎖の自由エネルギーの計算にはいくつか方法がある。最近の発展としては文献 [40, 41] を参照。

⁷ 実際には彼らによって提出された同等ではあるが新しい多重積分表示 [43] から計算されたもので、式 (3) から直接計算されたわけではない。

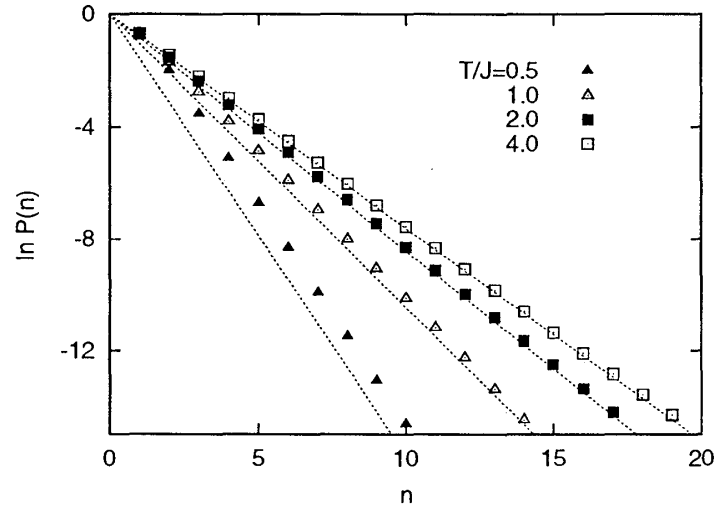


図 8: XXX スピン鎖の有限温度での EFP の数値計算

で与えられる⁸。具体的には

$$\begin{aligned}
 P(1) &= \frac{1}{2}, \\
 P(2) &= \frac{1}{8} = 0.125, \\
 P(3) &= \frac{7}{512} = 0.013671875, \\
 P(4) &= \frac{21}{32768} = 6.40869140625 \times 10^{-4}, \\
 P(5) &= \frac{429}{33554432} = 12785196 \cdots \times 10^{-5}, \\
 P(6) &= \frac{1859}{17179869184} = 1.0820804 \cdots \times 10^{-7},
 \end{aligned} \tag{35}$$

となり、驚くべきことに全て有理数で与えられるのである。実際、これらの値は我々の DMRG による数値計算からも正しいことが確認される (表 2)。

さて、ここでは、式 (34) を用いて n が大きいところでの $P(n)$ の漸近形を調べてみよう。まず、ガンマ関数に対する公式

$$\Gamma(k + \frac{1}{3})\Gamma(k + \frac{2}{3}) = \frac{2\pi(3k-1)!}{3^{3k-\frac{1}{2}}(k-1)!}, \quad \Gamma(k + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}(2k)!}{2^{2k}k!}, \quad (k \text{ は正の整数}) \tag{36}$$

を用いると式 (34) は

$$P(n) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{3n^2} \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma(k - \frac{1}{3})\Gamma(k + \frac{1}{3})}{\Gamma(k - \frac{1}{2})\Gamma(k + \frac{1}{2})}, \tag{37}$$

⁸ $P(n)$ のこの表式自体は Razumov–Stroganov によって有限系での厳密対角化の結果から予想されていた [44]。

n	$P(n)$
1	0.500
2	1.250×10^{-1}
3	1.367×10^{-2}
4	6.410×10^{-4}
5	1.277×10^{-5}
6	1.081×10^{-7}

 表 2: XXZ スピン鎖 ($\Delta = 1/2$) の EFP の数値計算 (DMRG)

と表されることがわかる。次にガンマ関数の対数に関する Malmsten の公式

$$\ln \Gamma(z) = \int_0^\infty \left[\frac{e^{(1-z)t} - 1}{1 - e^{-t}} + (z - 1) \right] \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad (\Re z > 0) \quad (38)$$

を用いると

$$\begin{aligned} \ln \prod_{k=1}^n \frac{\Gamma(k - \frac{1}{3})\Gamma(k + \frac{1}{3})}{\Gamma(k - \frac{1}{2})\Gamma(k + \frac{1}{2})} &= \sum_{k=1}^n \int_0^\infty \frac{e^{-kt}}{1 - e^{-t}} (e^{\frac{4}{3}t} + e^{\frac{2}{3}t} - e^{\frac{3}{2}t} - e^{\frac{5}{2}t}) \frac{e^{-t}}{t} dt \\ &= \int_0^\infty \frac{\sinh \frac{5}{12}t \sinh \frac{t}{12}}{\sinh^2 \frac{t}{2}} \frac{(e^{-nt} - 1)}{t} dt, \end{aligned} \quad (39)$$

と計算されるが n が大きいところでは積分の第 1 項は

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\sinh \frac{5}{12}t \sinh \frac{t}{12}}{\sinh^2 \frac{t}{2}} \frac{e^{-nt}}{t} dt &= \int_0^\infty \left(\frac{5}{36} - \frac{115}{15552} t^2 + \dots \right) \frac{e^{-nt}}{t} dt \\ &= \frac{5}{36} \left(-\ln n + \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \right) - \frac{115}{15552} \frac{1}{n^2} + \dots, \end{aligned} \quad (40)$$

と漸近展開できる。したがって $P(n)$ の $n \rightarrow \infty$ での漸近形は

$$\begin{aligned} P(n) &\simeq c_0 n^{-\frac{5}{36}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{3n^2}, \\ c_0 &= \exp \left[\int_0^\infty \left(\frac{5e^{-t}}{36} - \frac{\sinh \frac{5t}{12} \sinh \frac{t}{12}}{\sinh^2 \frac{t}{2}} \right) \frac{dt}{t} \right], \end{aligned} \quad (41)$$

と求まるのである [42, 44]。つまり、 $\Delta = 1/2$ の場合には 絶対零度で $P(n)$ がガウシアン的に減衰することが厳密に示されたわけである。式 (34) を用いて計算した $P(n)$ の値と漸近形 (41) を図 9 に示す。 n が十分小さなところの $P(n)$ の値もほとんど漸近形 (41) 上に乗っていることがわかる。

以上の結果は $\Delta = 0$ の場合以外で初めて、 n が有限のところでの値を厳密に計算し、その後で n が大きいところでの漸近形を導くことに成功した例であることを強調しておきたい。

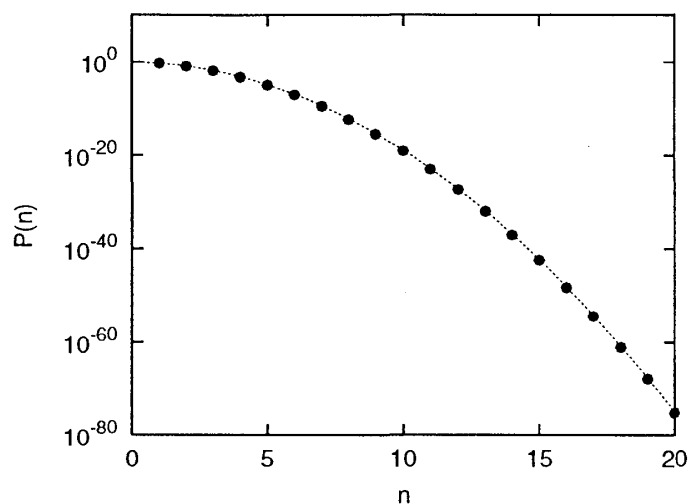


図 9: XXZ スピン鎖、 $\Delta = 1/2$ の場合の絶対零度での EFP

また、有限温度の $P(n)$ を量子モンテカルロ法を用いて数値計算した結果を図 10 に示す。やはり、この場合も $P(n)$ は指数関数的に減衰し、図中の破線で示した漸近形 (5) (ただし prefactor=1) と傾きがよく一致していることがわかる。

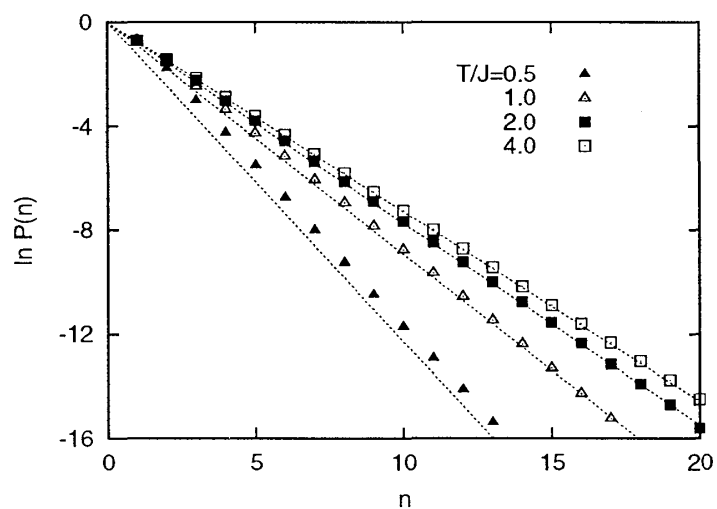


図 10: XXZ スピン鎖、 $\Delta = 1/2$ の場合の有限温度での EFP の数値計算

5 まとめと展望

1次元の厳密に解ける模型といえども、やはり相関関数の厳密な計算は難しいというのが現状である。そのため、特に数理物理的な観点からはどのような相関関数であれ、もしその厳密な値が計算でき、さらにその漸近形が評価できれば非常に価値がある。本論文ではそのような観点から EFP と呼ばれる“新しい相関関数”について最近の発展をまとめた。

実際 XX0 スピン鎖や、 $\Delta = 1/2$ の XXZ スピン鎖の場合には EFP の厳密値を解析的に計算し、さらに漸近形を求めることができることを紹介した。特に、我々が関与した XX0 スピン鎖の場合の計算を詳しく解説し、さらに、DMRG や連続時間量子モンテカルロ法による数値計算の結果を示した。DMRG を用いた計算では我々の期待以上に良い精度の数値が得られた。一般に、DMRG は、相関関数の計算が不得手であることを思い起こせばこれは DMRG の新たな応用可能性を示しているといえる。

一般の異方性 Δ の場合では、 $P(n)$ を解析的に計算することは今のところ困難である。XXX スピン鎖では、 $n = 5$ まで求められたが、同じ方法で $n \geq 6$ の場合の $P(n)$ を順次求めていくのは非常に大変な作業になるだろう。これまでの結果から一般形のもつべき特徴が示唆されているが、一般形そのものの予想を立てるのは難しい。また、 $\Delta = 1/2$ の場合と同様に全て解析的に計算できてしまう特殊な Δ の値が他にあるかどうかはわからない。いずれにしろ、解析的なアプローチには限界があるので、我々は現在、主に DMRG を用いて一般の異方性の場合を調べている。現在までの計算によると、 $\Delta > -1$ の領域では全てガウシアン

$$P(n) \simeq c_0 n^{-\gamma} a^{n^2}, \quad (42)$$

に減衰するようである。今後の研究では、上式のガウシアン減衰のパラメーター c_0 、 γ 、 a が Δ の関数としてどう表されるかに特に興味がある。

また、有限温度では一般の異方性 Δ の場合でも

$$P(n) \simeq c(T) \exp\left(\frac{f+h}{T}\right), \quad (43)$$

の漸近形を持つのは間違いなさそうである。この場合、量子モンテカルロ法による数値計算との比較のためにも prefactor $c(T)$ の解析的な表式を求めることが課題である。

序節で $P(n)$ は場の理論の枠組みではとらえられないのではないかと述べたが、最近、Abanov-Korepin によってボゾン化法を用いた EFP へのアプローチが提案された [45]。彼らがとり扱っているのは weakly ferromagnetic string であって厳密には EFP ではないが、 $-1 < \Delta < 1$ の領域で、絶対零度でガウシアン減衰、有限温度で指数的に減衰することが議論されている。今後の発展が期待される。

$P(n)$ は、粒子の言葉では、「凝集性」の目安ととらえることができると考えられる。その意味では、絶対零度でのガウシアン減衰は量子効果によって粒子が非常に凝集しにくくなっていることを示していると解釈できるであろう。この観点からは $P(n)$ に類似した

ほかの多点相関関数も同様に調べることによって、これまで知られていなかった新しい物理が見えてくるかもしれない。

謝辞

本研究の共同研究者である高橋實先生、V. E. Korepin 先生、および H. E. Boos 氏に感謝いたします。また、鈴木増雄先生、井上真先生、藤井康広氏、堺和光氏にも我々の研究に興味を持って議論していただいたことを感謝します。

参考文献

- [1] M. Takahashi : *Thermodynamics of One-Dimensional Solvable Models*, Cambridge University Press, 1999.
- [2] V. E. Korepin, A. G. Izergin and N.M. Bogoliubov : *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*, Cambridge University Press, 1993.
- [3] M. Jimbo and T. Miwa: *Algebraic analysis of solvable lattice models* AMS, 1995.
- [4] 川上則雄, 梁成吉 : 共形場理論と 1 次元量子系, 岩波書店, 1997.
- [5] V. E. Korepin, A. G. Izergin, F. H. L. Essler, D. B. Uglov : *Phys. Lett. A* **190** (1994) 182.
- [6] F. H. L. Essler, H. Frahm, A. G. Izergin and V. E. Korepin : *Commun. Math. Phys.* **174** (1995) 191.
- [7] F. H. L. Essler, H. Frahm, A. R. Its, V. E. Korepin : *Nucl Phys B* **446** (1995) 448.
- [8] M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa and A. Nakayashiki : *Phys. Lett.* **168A** (1992) 256.
- [9] M. Jimbo and T. Miwa: *J. Phys. A: Math. Gen.* **29** (1996) 2923.
- [10] N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras : *Nucl. Phys. B* **567** (2000) 554.
- [11] A. Nakayashiki : *Int. J. Mod. Phys.* **9** (1994) 5673.
- [12] S. R. White : *Phys. Rev. Lett.* **69**, (1992) 2863.
- [13] S. R. White : *Phys. Rev. B* **48**, (1993) 10345.
- [14] M. Suzuki : *Prog. Theor. Phys.* **56** (1976) 1454.
- [15] B. B. Beard and U.-J. Wiese : *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 5130.

- [16] H. G. Evertz, G. Lana and M. Marcu : Phys. Rev. Lett. **70** (1993) 875.
- [17] U.-J. Wiese and H.-P. Ying : Z. Phys. B **93** (1994) 147.
- [18] N. Kawashima and J. E. Gubernatis : Phys. Rev. Lett. **73**, (1994) 1295.
- [19] H. E. Boos and V. E. Korepin : J. Phys. A **34** (2001) 5311.
- [20] M. Suzuki : private communication.
- [21] M. Suzuki : Prog. Theor. Phys. **69** (1983) 65.
- [22] M. Shiroishi, M. Takahashi and Y. Nishiyama : J. Phys. Soc. Jpn. **70** (2001) 3535.
- [23] E. H. Lieb, T. Schultz and D. Mattis: Ann. Phys. (N.Y.) **16** (1961) 407.
- [24] S. Katsura: Phys. Rev. **127** (1962) 1508.
- [25] T. Niemeijer: Physica **36** (1967) 377.
- [26] B. M. McCoy: Phys. Rev. **173** (1968) 531.
- [27] S. Katsura, T. Horiguchi and M. Suzuki: Physica **46** (1970) 67.
- [28] E. Barouch and B. M. McCoy: Phys. Rev. A **3** (1971) 786, 2137.
- [29] H. G. Vaidya and C. A. Tracy: Physica **92A** (1978) 1.
- [30] M. Inoue and M. Suzuki: Prog. Theor. Phys. **79** (1988) 645.
- [31] H. Widom: Indiana Univ. Math. J. **21** (1971) 277.
- [32] P. A. Deift, A. R. Its and X. Zhou: Ann. Math. **146** (1997) 149.
- [33] Y. Fujii: J. Phys. Soc. Jpn. **69** (2000) 3143.
- [34] B. M. McCoy and T. T. Wu : *The two-dimensional Ising model*, Harvard University Press, 1973.
- [35] *Density-Matrix Renormalization — A New Numerical Method in Physics*, eds. I. Peschel, X. Wang, M. Kaulke and K. Hallberg, Springer-Verlag, 1999.
- [36] S. Östlund and S. Rommer : Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 3537.
- [37] M. Takahashi : J. Phys. C: Solid State Phys. **10** (1977) 1289.
- [38] H. E. Boos and V. E. Korepin : P65-108 in *MathPhys Odyssey 2001: Integrable Models and Beyond*, eds. M. Kashiwara and T. Miwa, Birkhäuser, 2002. (hep-th/0105144).

- [39] H. E. Boos, V. E. Korepin, Y. Nishiyama, M. Shiroishi : J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002) 4443.
- [40] M. Takahashi : P299-304 in *Physics and Combinatorics*, eds. A. K. Kirillov and N. Liskova, World Scientific, 2001 (cond-mat/0010486).
- [41] M. Takahashi, M. Shiroishi and A. Klümper : J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) L187.
- [42] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras : J. Phys. A: Math. Gen. **35** (2002) 3185.
- [43] N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras : *Spin-spin correlation functions of the XXZ-1/2 Heisenberg chain in a magnetic field* (hep-th/0201045).
- [44] A. V. Razumov and Yu. G. Stroganov : J. Phys. A: Math. Gen. **34** (2001) 3185.
- [45] A. G. Abanov and V. E. Korepin : *On the probability of ferromagnetic strings in antiferromagnetic spin chains* (cond-mat/0206353).