

間欠型カオスの統計力学的定式化

静大・教養 佐藤 信一

名大・工 本田 勝也

力学系のマルチフラクタル性が注目されて以来、その定式化が熱力学的定式化と対応することは数多くの論文が述べている。我々は、一連の熱力学形式に対する考察に基づいて、単純化した間欠型カオスのモデルに統計力学的定式化を適用し、マルチフラクタル・スペクトラムを議論した。

まず、統計力学的議論を展開するために、間欠型カオスを2状態のランダム変数の確率過程に単純化する。2状態+1、-1をとるランダム変数を s_i とし、部分列 $\{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ が観測される確率を $p(s_1, \dots, s_n)$ とする。+1が時系列におけるバースト状態を表し、-1が層流的状態を表す。また、 i 番目の状態 s_i を知ったときに部分列 $\{s_{i+1}, \dots, s_{i+n}\}$ が生じる条件付き確率を $p(s_{i+1}, \dots, s_{i+n} | s_i)$ とする。ここで、次の式で表される間欠型カオスのモデルを考える。

$$p(1|-1) = a, \quad p(1|1) = b \quad (1.a)$$

$$p(-1|-1, \dots, -1, 1) = c j^{-\nu} \quad (j=1, 2, \dots) \quad (1.b)$$

(1.b)式は、-1の次に $j-1$ 個の-1が続き、 j 番目に1が来る条件付き確率を表す。確率の保存則から $a+b=1$ 、 $c=\{\zeta(\nu)\}^{-1}$ である(ただし、 ζ はRiemannのゼータ関数)。このモデルに対して、更に次の対応を考える：時間軸を1次元空間と見なし、+1→粒子占有状態、-1→空状態を対応させる。これにより、我々は間欠型カオスと1次元格子気体との対応を得た事になる。以下では、すべて格子気体との対応に基づいて述べることにする。距離 j だけ離れた隣合う粒子間の相互作用エネルギー $U(j)$ は(1.a)、(1.b)式より

$$\begin{aligned} U(j) &= -\ln b & \text{for } j=1 \\ &= -\ln a - \ln c + \ln(j-1) & \text{for } j \geq 2 \end{aligned} \quad (2)$$

となる。逆温度を q (ただし、 $-\infty \leq q \leq \infty$)とし、サイズ n の格子系で m 個の粒子を含む系の分配関数を $Z_{n,m}(q)$ とする。そして、次の母関数 Ξ を導入する。

$$\Xi(P, q, \mu) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n e^{-Pn} e^{\mu m} Z_{n,m}(q) \quad (3)$$

ここで P は圧力に、 μ はケミカル・ポテンシャルに対応する。 Ξ を関数 $U(j)$ を用いて書き下すと

$$\Xi(P, q, \mu) = 1 / \{1 - \Phi(P, q)\} \quad (4)$$

$$\Phi(P, q) = \sum_{j=1}^{\infty} \exp \{-Pj - qU(j)\} \quad (5)$$

となる。後は統計力学の処方箋に従って、サイト当りのヘルムホルツ自由エネルギー $f(q)$ を計算すると熱力学的極限において

$$f(q) = -\bar{P}(q) \quad (6)$$

$$\text{ただし、} \quad \Phi(\bar{P}, q) = 1 \quad (7)$$

が容易に示される。もともとの間欠型カオスの時系列との対応を考えると $f(q) = (q-1)K_0$ が得られるので q 次Renyiエントロピー K_0 が代数方程式 (7) の解として求められる。

(7)式に対する考察から、 $q = 1$ が相転移の臨界点であり、臨界指数の ν 依存性から相転移のタイプが三つに分類されることが分かる (Case I $= \nu > 3$, Case II $= 2 < \nu < 3$, Case III $= 1 < \nu < 2$: Case I と Case II が 1 次相転移であり、Case III が 2 次相転移である)。実際に観測する物理量は $q = 1$ における値であり、それがちょうど臨界点に対応している事は間欠型カオスの局所軌道拡大率の大きなゆらぎ、過渡的カオスの存在が相転移の臨界性に由来していることを示している。