

Novikov's work on non-linear quasi-classical approximations

新潟大学工学部 田島 慎一 (Shinichi TAJIMA)

1990 年に Novikov は、非線形偏微分方程式 $u_{xxx} - 6uu_x = \varepsilon$ の漸近解析に関し、興味ある論文 [25] を発表している。方程式の形から推測できるように、この方程式は KdV 方程式や Painlevé 方程式と密接に関係する。実際 Novikov は論文の中で、この方程式の漸近解析を、KdV 方程式の周期解との類似に基づいて行うことを提唱している。非線形可積分な偏微分方程式の modulation に関しては、Whitham による画期的な研究以来、様々な視点から研究がなされており、KdV 方程式の摂動問題に限っても多くの研究成果が得られている。Novikov 自身 1983 年以来、Whitham の平均化法に関連し一連の論文を発表している。しかし、非線形偏微分方程式論の立場からは、KdV 方程式に上記のような形で摂動項を入れた方程式を扱った研究はなされていなかったようである。また、Novikov のこの論文で展開されている解析は方法論的にも独特であり、その点からもたいへん興味深く刺激的である。以下に Novikov の論文 [25] の紹介を試みる。

1. KdV 方程式からの準備

関数 u を未知関数とする KdV 方程式 $u_t + u_{xxx} - 6uu_x = 0$ は保存則

$$u_t + (u_{xx} - 3u^2)_x = 0$$

の形に書き表すことが出来る。このときさらに次の保存則も成立する。

$$(u^2)_t + (-4u^3 + 2uu_{xx} - (u_x)^2)_x = 0$$

これら二つの方程式の第 2 項に注目し、関数 u の微分多項式 C, D を

$$C = u_{xx} - 3u^2$$

$$D = 2uu_{xx} - (u_x)^2 - 4u^3$$

で定める。 C, D は流束 (flux) であり、今後の議論の中でも基本的役割を果たす。

次に、Lax 形式と Zakharov-Shabat の零曲率方程式について簡単に復習しておく。

微分作用素 L, A を

$$L = -\partial_x^2 + u, \quad A = -4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3u_x$$

で定めると、

$$[L, A] = u_{xxx} - 6uu_x$$

が成立し、KdV 方程式は Lax 形式 $[L, A] = L_t$ により表現出来る。また、 2×2 行列 Q, Λ を

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -u_x & 2u + 4\lambda \\ -u_{xx} + 2u^2 + 2\lambda u - 4\lambda^2 & u_x \end{pmatrix}$$

で定める。いま

$$a = -u_x, \quad b = 2u + 4\lambda, \quad c = -u_{xx} + 2u^2 + 2\lambda u - 4\lambda^2$$

とおくと

$$u_{xx} - b(u - \lambda) + c = 0$$

が成り立つ。この関係式を使えば

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \Lambda, \frac{\partial}{\partial x} - Q \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6uu_x - u_{xxx} - u_t & 0 \end{pmatrix}$$

が成り立つ事を簡単に確かめられる。従って、方程式

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - \Lambda, \frac{\partial}{\partial x} - Q \right] = 0$$

も、KdV 方程式を表している。この方程式を Zakharov-Shabat の零曲率方程式と言う。
行列 Λ の行列式は

$$\begin{aligned} \det \Lambda &= -a^2 - bc \\ &= 16\lambda^3 + 4(u_{xx} - 3u^2)\lambda + (2uu_{xx} - (u_x)^2 - 4u^3) \\ &= 16\lambda^3 + 4C\lambda + D \end{aligned}$$

となり、 λ の多項式とみなしたとき、係数に流束 C, D が表れている事を注意しておく。

2. Riemann 面の導入

この節では Novikov の論文において基本的な役割をはたす「Riemann 面の族」を導入する。これは Whitham の平均化法を KdV 方程式の周期解に適応する際に Riemann 面の族が自然に表れる事と対応している。

対象とする方程式 $u_{xxx} - 6uu_x = \varepsilon$ は、微分作用素

$$L = -\partial_x^2 + u, \quad A = -4\partial_x^3 + 6u\partial_x + 3u_x$$

を用いて $[L, A] = \varepsilon$ と表現出来る。KdV 方程式のときと同様に、 2×2 行列 Q, Λ を

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u - \lambda & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -u_x & 2u + 4\lambda \\ -u_{xx} + 2u^2 + 2\lambda u - 4\lambda^2 & u_x \end{pmatrix}$$

で定める。行列 Q の変数 λ に関する微分は

$$Q_\lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

と成る。この事に注目して、Zakharov-Shabat の零曲率方程式の変数 t に関する微分の項を変数 λ に関する微分の ε 倍におき変えてみると

$$[\varepsilon \frac{\partial}{\partial \lambda} - \Lambda, \frac{\partial}{\partial x} - Q] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 6uu_x - u_{xxx} - \varepsilon & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。 2×2 行列 Λ の行列式が流束 C, D を用いて

$$\det \Lambda = 16\lambda^3 + 4C\lambda + D$$

と表されることも、KdV 方程式の時と全く同じである。ただし

$$C = u_{xx} - 3u^2, \quad D = 2uu_{xx} - (u_x)^2 - 4u^3$$

である。パラメータ ε が $\varepsilon = 0$ を満たすときは、関数 u は変数 t に依存しない KdV 方程式の定常解とみなす事ができる。この場合は保存則

$$u_t + C_x = 0, \quad (u^2)_t + D_x = 0$$

より、 C, D は定数となる事が直ちに分かる。さて、有限帯ポテンシャルの理論（KdV 方程式の周期解）では Riemann 面

$$\det(\mu \cdot 1 - \Lambda) = \mu^2 + \det \Lambda = 0$$

の導入が本質的であった。このことに対応して

$$R(\lambda) = -\det \Lambda = -16\lambda^3 - 4C\lambda - D$$

とおき、「Riemann 面 $\mu^2 - R(\lambda) = 0$ 」を導入する。このとき

$$C_x = \varepsilon, \quad D_x = 2\varepsilon u, \quad R(\lambda)_x = -\varepsilon(2u + 4\lambda)$$

が成り立つ。 C は定数ではないが、パラメータ ε のはいりかたから、変数 x に比べゆっくり変化する量とみなす事が出来る。（ D は関数 u に陽に依存しているため、通常の変調理論の枠で解析を行う事を困難にしているように思える）次の関係も基本的である。

$$\sqrt{R(\lambda)}|_{\lambda=-\frac{u}{2}} = u_x.$$

3. Whitham の平均化法

この節では前節で得られた「Riemann 面」を基に、方程式 $u_{xxx} - 6uu_x = \varepsilon$ に Whitham の平均化法を適応してみる。議論を分かりやすくする為、Novikov の論文で扱われた場合とは cycle の取り方等を変えてある。原論文では appendix の中で詳しい解析がなされているが、ここでは基本的な事柄を紹介するにとどめる。(というよりそこまでしか分からなかったといった方が正直)

$2\omega_1, 2\omega_3$ を基本周期に持つ Weierstrass の楕円関数を $\wp$ とおく。ここで ω_1 は実数、 ω_3 は純虚数とする。KdV 方程式の定常周期解として $2\wp$ をとる。周期を 2π に規格化する為に関数

$$\varphi(\tau; g_2, g_3) = 2\wp\left(\frac{\omega_1}{\pi}\tau; g_2, g_3\right)$$

を導入しておく。ただし、 g_2, g_3 は楕円関数 $\wp$ の不変量を表す。このとき関数

$$u(x) = \varphi\left(\frac{\pi}{\omega_1}x; g_2, g_3\right)$$

は、KdV 方程式 $u_{xxx} - 6uu_x = 0$ を満たす。

次に、パラメータ ε を用いて "slow variable" を $X = \varepsilon x$ により導入する。以下、方程式 $u_{xxx} - 6uu_x = \varepsilon$ に Whitham の平均化法が適応できるとし

$$u_0 = \varphi\left(\frac{S(X)}{\varepsilon}; g_2(X), g_3(X)\right)$$

を初項とするような漸近解

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots$$

を考察する。ここで phase $S(X)$ は $\frac{dS}{dX} = \frac{\pi}{\omega_1}$ を満たす。また、

$$R(\lambda) = -\det \Lambda = -16\lambda^3 - 4C\lambda - D = -4(4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3)$$

より $g_2(X) = -C, g_3(X) = -\frac{D}{4}$ となるはずである。項 g_2 に関しては $C_x = \varepsilon$ より、 $\frac{dg_2}{dX} = -1$ が成り立つと考えることが出来る。項 g_3 については $D_x = \varepsilon u$ が成立しているので、ここでは周期に渡る平均を考えることにする。 D の周期にわたる平均を $\bar{D}$ であらわすことにすれば $\frac{d\bar{D}}{dX} = 2\bar{u} = 4\bar{\wp}$ となる。以上の事をまとめて

$$g_2(X) = -X + g_2^0, \quad g_3 = -\frac{\bar{D}}{4}$$

$$\frac{dg_2}{dX} = -1, \quad \frac{dg_3}{dX} = -\frac{\eta_1}{\omega_1}$$

を得る。これらの関係式をもとにして、phase $S(X)$ を計算してみる。

まず、「Riemann 面 $\mu = \sqrt{R(\lambda)} = \sqrt{-4(4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3)}$ 」に注目して、

$$\lambda = \wp(z), \quad \mu = 2i\wp'(z)$$

とおく。

$$\frac{d\mu}{dg_2} = \frac{2\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}}, \quad \frac{d\mu}{dg_3} = \frac{2}{\sqrt{R(\lambda)}}$$

となるが

$$\begin{aligned} 2i \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} &= \wp(z) dz \\ 2i \frac{d\lambda}{\sqrt{R(\lambda)}} &= dz \\ \sqrt{R(\lambda)} d\lambda &= 2i(\wp'(z))^2 dz \end{aligned}$$

より

$$\frac{d\mu}{dX} = -\frac{d\mu}{dg_2} \frac{dg_2}{dX} - \frac{d\mu}{dg_3} \frac{dg_3}{dX} = \frac{2(\lambda + \frac{\eta_1}{\omega_1})}{\sqrt{R(\lambda)}}$$

を得る。Riemann 面の基本 cycle を a, b とおくと

$$2i \oint_a \frac{\lambda + \frac{\eta_1}{\omega_1}}{\sqrt{R(\lambda)}} d\lambda = 0$$

$$2i \oint_b \frac{\lambda + \frac{\eta_1}{\omega_1}}{\sqrt{R(\lambda)}} d\lambda = \frac{\eta_3 \omega_1 - \eta_1 \omega_3}{\omega_1} = -\frac{\pi i}{2\omega_1}$$

がなりたつから

$$-2 \oint_b \frac{d\mu}{dX} d\lambda = \frac{\pi}{\omega_1}$$

となる。従って

$$S(X) = -2 \oint_b \mu d\lambda$$

を得る。

4. Schrödinger 方程式の対角化

前節で導入した Zakharov-Shabat の零曲率方程式

$$[\varepsilon \frac{\partial}{\partial \lambda} - \Lambda, \frac{\partial}{\partial x} - Q] = 0$$

は、 $\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$ に対する線形方程式系

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} = \Lambda \Psi \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} = Q \Psi \end{cases}$$

の両立条件に他ならない。ここで

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u - \lambda & 0 \end{pmatrix}$$

であるから、第2式は Schrödinger 方程式

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + u\psi = \lambda\psi$$

を行列表現したものである。さて、ポテンシャル u が周期的なとき、Schrödinger 方程式の Bloch 解は、行列 Λ の固有ベクトルから構成することが出来る。従って、未知関数の変換等を行って、上記の線形方程式系をなるだけ対角化してから解析を行う事には自然であろう。この考えに基づいて線形方程式系を変形していく。

$$a = -u_x, \quad b = 2u + 4\lambda, \quad c = -u_{xx} + 2u^2 + 2\lambda u - 4\lambda^2$$

とおくと

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -u_x & 2u + 4\lambda \\ -u_{xx} + 2u^2 + 2\lambda u - 4\lambda^2 & u_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$$

と表せる。いま

$$\chi_+ = \frac{-a + \sqrt{R(\lambda)}}{b}, \quad \chi_- = \frac{-a - \sqrt{R(\lambda)}}{b}$$

とおくと

$$\Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \chi_- \end{pmatrix} = \sqrt{R(\lambda)} \begin{pmatrix} 1 \\ \chi_- \end{pmatrix}, \quad \Lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \chi_+ \end{pmatrix} = -\sqrt{R(\lambda)} \begin{pmatrix} 1 \\ \chi_+ \end{pmatrix}$$

が成り立つ。そこで行列

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \chi_- & \chi_+ \end{pmatrix}$$

により未知関数の変換 $\Psi = U^{-1}\tilde{\Psi}$ を行う。線形方程式系は

$$\begin{cases} \varepsilon \tilde{\Psi}_\lambda &= (U\Lambda U^{-1} - \varepsilon U(U^{-1})_\lambda) \tilde{\Psi} \\ \tilde{\Psi}_x &= (UQU^{-1} - U(U^{-1})_x) \tilde{\Psi} \end{cases}$$

に変換される。

行列 U の定義より

$$U\Lambda U^{-1} - \varepsilon U(U^{-1})_\lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{R(\lambda)} & 0 \\ 0 & -\sqrt{R(\lambda)} \end{pmatrix} + \varepsilon \frac{1}{\chi_+ - \chi_-} \begin{pmatrix} \chi_{-, \lambda} & \chi_{+, \lambda} \\ -\chi_{-, \lambda} & -\chi_{+, \lambda} \end{pmatrix}$$

$$UQU^{-1} - U(U^{-1})_x = \frac{1}{\chi_+ - \chi_-} \begin{pmatrix} \chi_{-, x} + \chi_+ \chi_- - (u - \lambda) & \chi_{+, x} + \chi_+^2 - (u - \lambda) \\ -\chi_{-, x} - \chi_-^2 + (u - \lambda) & -\chi_{+, x} - \chi_+ \chi_- + (u - \lambda) \end{pmatrix}$$

を得る。次の関係式が成り立つので

$$\chi_+ - \chi_- = -\frac{2\sqrt{R(\lambda)}}{b}, \quad (\chi_+ + \chi_-)_\lambda = \frac{8a}{b^2}$$

関数 $t = -\frac{1}{2} \ln(\chi_+ - \chi_-)$ を用いて

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\chi_+ - \chi_-} \begin{pmatrix} \chi_{-, \lambda} & \chi_{+, \lambda} \\ -\chi_{-, \lambda} & -\chi_{+, \lambda} \end{pmatrix} \\ &= t_\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{2a}{b\sqrt{R(\lambda)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\chi_+ - \chi_-} \begin{pmatrix} 0 & \chi_{+, \lambda} \\ -\chi_{-, \lambda} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表すことが出来る。

更に

$$(\chi_+ + \chi_-)_x = \frac{2u_{xx}}{b} - \frac{4a^2}{b^2}, \quad u_{xx} - b(u - \lambda) + c = 0$$

を用いて計算すれば次の補題の関係式を示すことが出来る。

補題 $\chi_\pm$ は次を満たす。

$$\chi_{\pm, x} + \chi_\pm^2 - (u - \lambda) = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{R(\lambda)}},$$

$$\frac{1}{\chi_+ - \chi_-} (-\chi_{+, x} - \chi_+ \chi_- + (u - \lambda)) = t_x - \frac{\sqrt{R(\lambda)}}{b},$$

$$\frac{1}{\chi_+ - \chi_-}(\chi_{-,x} + \chi_+ \chi_- - (u - \lambda)) = t_x + \frac{\sqrt{R(\lambda)}}{b}.$$

これらの関係式より

$$UQU^{-1} - U(U^{-1})_x = t_x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{R(\lambda)}}{b} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{R(\lambda)}}{b} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\varepsilon b}{4R(\lambda)} \\ -\frac{\varepsilon b}{4R(\lambda)} & 0 \end{pmatrix}$$

を得る。ここで更に、次の未知関数の変換を行う。

$$\tilde{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{\chi_+ - \chi_-}} \tilde{\tilde{\Psi}}$$

この変換により方程式より t_λ 及び t_x を含む項を除くことが出来、 $\tilde{\tilde{\Psi}}$ は次の線形方程式を満たすことが計算により確かめられる。

$$\varepsilon \tilde{\tilde{\Psi}}_\lambda = \left(\begin{pmatrix} \sqrt{R(\lambda)} & 0 \\ 0 & -\sqrt{R(\lambda)} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{2a}{b\sqrt{R(\lambda)}} & 0 \\ 0 & -\frac{2a}{b\sqrt{R(\lambda)}} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & \frac{\chi_{+,\lambda}}{\chi_+ - \chi_-} \\ \frac{-\chi_{-,\lambda}}{\chi_+ - \chi_-} & 0 \end{pmatrix} \right) \tilde{\tilde{\Psi}}$$

$$\tilde{\tilde{\Psi}}_x = \left(\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{R(\lambda)}}{b} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{R(\lambda)}}{b} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{4R(\lambda)} \\ -\frac{b}{4R(\lambda)} & 0 \end{pmatrix} \right) \tilde{\tilde{\Psi}}$$

注意 この式は Novikov の論文にある式と、符号が違う箇所がある。おそらく、私の計算ミスによるものと思う。(計算したら、符号がちがっちゃった。どこで計算ミスをしたのかノートを見直しても分からないので、このままにしておきます)

5. WKB 解析と Baker-Akhiezer 関数

KdV 方程式の解析において、対応する線形の Schrödinger 方程式とその Baker-Akhiezer 関数の解析は重要な役割を果たした。非線形偏微分方程式 $u_{xxx} - 6uu_x = \varepsilon$ の解析にも、この考え方を適応しようというのが Novikov の基本的考え方である。論文の中でも、非線形方程式の漸近解析を直接行うのではなく、対応する線形方程式系の漸近解析を行いその結果から汲み取れる事に基づいて解析を行っている。90 年頃から、 τ 関数を用いて、非線形可積分系の準古典極限を扱う研究が盛んになされているが、Novikov の考え方はこれらの研究に通じるものがある。

前書きはこのくらいにして、論文の紹介を続けよう。対象とする線形微分方程式系は次である。

$$\begin{cases} \varepsilon \tilde{\Psi}_\lambda = (\Lambda_0 + \varepsilon \Lambda_1^d + \varepsilon \Lambda_1^*) \tilde{\Psi} \\ \tilde{\Psi}_x = (Q_0 + \varepsilon Q_1^*) \tilde{\Psi} \end{cases}$$

ただし

$$\Lambda_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{R(\lambda)} & 0 \\ 0 & -\sqrt{R(\lambda)} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1^d = \begin{pmatrix} \frac{2a}{b\sqrt{R(\lambda)}} & 0 \\ 0 & -\frac{2a}{b\sqrt{R(\lambda)}} \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1^* = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\chi_{+, \lambda}}{\chi_+ - \chi_-} \\ \frac{-\chi_{-, \lambda}}{\chi_+ - \chi_-} & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q_0 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{R(\lambda)}}{b} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{R(\lambda)}}{b} \end{pmatrix}, \quad Q_1^* = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{b}{4R(\lambda)} \\ -\frac{b}{4R(\lambda)} & 0 \end{pmatrix}.$$

とおいた。この方程式系の形式解として次の形のものを考える。

$$\tilde{\Psi} = (1 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \cdots) \exp\{(B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \cdots)/\varepsilon\}$$

ただし、 A_j ($j \geq 1$) は対角成分は零の 2×2 行列、 B_j ($j \geq 0$) は対角行列とする。

これを第一番目の方程式に代入し、 ε のべきで整理することにより

$$B_{0, \lambda} = \Lambda_0, \quad B_{1, \lambda} = \Lambda_1^d, \quad A_1 \Lambda_0 - \Lambda_0 A_1 = \Lambda_1^*$$

を得る。漸近解の初項に対応して、関数

$$\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon} \int^\lambda \sqrt{R(\lambda)} d\lambda\right\}$$

を得る。ただし $R(\lambda) = -16\lambda^3 - 4C\lambda - D$ である。

さて、 $ik = \lambda^{1/2}$ においてこの関数の $\lambda \rightarrow \infty$ における漸近挙動を考えると

$$\frac{1}{\varepsilon} \int \sqrt{-16\lambda^3 - 4C\lambda - D} d\lambda \approx \left(1 + \frac{D}{4\varepsilon k} + O(k^{-2})\right) \exp\left\{-\frac{8}{5\varepsilon} k^5 + \left(x + \frac{C_0}{\varepsilon} k\right)\right\}$$

を得る。ここで $C = X + C_0$, $X = \varepsilon x$ を使った。漸近解の残りの項の漸近挙動を考慮しても同じ結果が成り立つことが確かめられる。振幅の第二項に注目すると、関係式 $D_x = 2\varepsilon u$ より

$$2 \left(\frac{D}{4\varepsilon}\right)_x = u$$

を得る。すなわち、漸近解 $\tilde{\Psi}$ は、KdV 方程式に対応する Schrödinger 方程式の Baker-Akhiezer 関数と、同様の性質を持つことになる。

論文の中で Novikov はさらに解析をすすめている。漸近解の指数関数項を第二項までとると、

$$\exp\left\{\frac{1}{\varepsilon}\left(\int \sqrt{R} - \frac{\varepsilon u_x}{(u+2\lambda)\sqrt{R}}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$$

となることに注目して Baker-Akieszer 関数を導入している。

また、 $\tilde{R}(\lambda) = R(\lambda) = 2\lambda^3 + 2C\lambda - D$ とおくと

$$\begin{aligned}\tilde{R}(u) &= 2u^3 + 2Cu - D \\ &= 2u^3 + 2(u_{xx} - 3u^2)u - (2uu_{xx} - 4u^3 - u_x^2) \\ &= u_x^2\end{aligned}$$

となるので、 D は

$$\left(\frac{D_{xx}}{2\varepsilon}\right)^2 = \tilde{R}\left(\frac{D_x}{2\varepsilon}\right)$$

を満たす、これらを使って興味ぶかい議論を展開している。

6. 終わりに

今年（1997 年）の 4 月に、数理解析研究所の河合隆裕先生が Novikov のこの論文を紹介くださり、この論文にはじめて接した。刺激に満ちた論文であり、興味をもって読んだ。原論文はかならずしもよみやすい論文ではないので、一部を多少整理してここに紹介したがそれ以外に私自身の寄与はない。Novikov の扱った方程式は、もともとは 2D 重力に関する Douglas-Shenker らの仕事に端を発して表れたものの事であり、この論文を読みこなすことは私の力量を越えている。興味ある方は論文に直接あたって頂きたい。英訳は不自然な表現がめだつのでロシア語の原論文にあたった方が良いかもしれない。94 年に P.G. Grinvich との共著で、続編とも言うべき論文 [27] が発表されている。

参考文献

- [1] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei, WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter, II – Multiple-scale analysis of Painlevé transcendents, in Structure of solutions of differential equations (eds: M. Morimoto and T. Kawai), World Scientific (1996), 1-49.
- [2] S.Yu. Dobrokhotov and V.P. Maslov, Finite-zone, almost-periodic solutions in WKB approximations, J. Sov. Math., **15** (1980), 1433-1487.
- [3] M.R. Douglas and S.H. Shenker, Strings in less than one dimension, Nuclear Phys. **335** (1990), 635-654.

- [4] B.A. Dubrovin, Theta functions and non-linear equations, *Russian Math. surveys* **36** (1981), 11-92.
- [5] B.A. Dubrovin, V.B. Matveev and S.P. Novikov, Non-linear equations of Korteweg-de Vries type, finite zone linear operators, and Abelian varieties, *Russian. Math. Surveys* **31** (1976), 59-146.
- [6] B.A. Dubrovin and S.P. Novikov, The Hamiltonian formalism of one-dimensional systems of hydrodynamic type and the Bogolyubov-Whitham averaging method, *Soviet Math. Dokl.* **30** (1983), 665-669.
- [7] B.A. Dubrovin and S.P. Novikov, Hydrodynamics of weakly deformed soliton lattices. Differential geometry and Hamiltonian theory, *Russ. Math. Surveys* **44** (1989), 35-124.
- [8] B.A. Dubrovin, I.M. Krichever and S.P. Novikov, Integrable systems. I, in *Encyclopedia of Mathematical Sciences*, **4** Dynamical systems IV, Springer (1990), 171-280.
- [9] N.M. Ercolani, D.W. McLaughlin and H. Roitner, Attractors and Transients for a perturbed periodic KdV equation: A nonlinear spectral analysis, *J. Nonlinear Sci.* **3** (1993), 477-539.
- [10] H. Flaschka, M.G. Forest and D.W. McLaughlin, Multiphase averaging and the inverse spectral solution of the Korteweg-de Vries equation, *Comm. Pure and Appl. Math.* **33** (1980), 739-784.
- [11] M.G. Forest and D.W. McLaughlin, Modulations of perturbed KdV wavetrains, *SIAM J. Appl. Math.* **44** (1984), 287-300.
- [12] A.V. Gurevich and L.P. Pitaevskii, Nonstationary structure of a collisionless shock wave, *Sov. Phys. JETP* **38** (1974), 291-297. Averaged description of waves in the Korteweg-de Vries-Burgers equation, *Sov. Phys. JETP* **66** (1987), 490-495.
- [13] R. Haberman, The modulated phase shift for weakly dissipated nonlinear oscillatory waves of the Korteweg-de Vries type, *Studies in Appl. Math.* **78** (1988), 73-90.
- [14] А.Р. Итс и В.Б. Матвеев, Об одном классе решений уравнения Кортевега-де Фриса (On a class of solutions of the KdV equation), *Problems of mathematical physics* **8**, Izdat Leningrad Univ. (1976), 70-92 (Russian).
- [15] A. Jeffrey and T. Kawahara, *Asymptotic Methods in Nonlinear Wave Theory*, Pitman Boston, London, Melbourne (1982).
- [16] Y. Kodama, A method for solving the dispersionless KP equation and its exact solutions, *Physics Lett. A* **129** (1988), 223-226., Exact solutions of hydrodynamic type

- equations having infinitely many conserved densities, *Physics Lett. A* **135** (1989), 171-174.
- [17] R.A. Kraenkel, M.A. Manna and J.G. Pereira, The Korteweg-de Vries hierarchy and long water-waves, *J. Math. Phys.* **36** (1995), 307-320.
 - [18] I.M. Krichever, The τ -function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories, *Comm. Pure and Appl. Math.* **37** (1994), 437-475.
 - [19] P.D. Lax and C.D. Levermore, The small dispersion limit of the Korteweg-de Vries equation. I,II,III., *Comm. Pure and Appl. Math.* **36** (1983), 253-290, 571-593, 809-830.
 - [20] J.C. Luke, A perturbation method for nonlinear dispersive wave problem, *Proc. Roy. Soc. London A* **292** (1966), 403-412.
 - [21] I. McIntosh, On the modulation of solutions to scalar Lax equations according to Whitham's procedure, *Physics Lett. A* **145** (1990), 434-436.
 - [22] R.M. Miura and M.D. Kruskal, Application of a non linear WKB method to the Korteweg-de Vries equation, *SIAM. J. Appl. Math.* **26** (1974), 376-395.
 - [23] G. Moore, Geometry of the string equations, *Commun. Math. Phys.* **133** (1990), 261-304.
 - [24] S. Novikov, S.V. Manakov, L.P. Pitaevskii, and V.E. Zakharov, *Theory of Solitons*, Consultants Bureau, New York, A Division of Plenum Publishing Corporation (1984).
 - [25] С. П. Новиков, Квантование конечнозонных потенциалов и нелинейная квазиклассика, возникающие в непertурбативной теории струн. *Функцион. анализ и его прил.* **24** (1990), 43-53., English transl., Quantization of finite-gap potentials and nonlinear quasiclassical approximation in nonperturbative string theory, *Functional Anal. Appl.* **24** (1990), 196-206.
 - [26] S.P. Novikov, *Solitons and Geometry*, Accademia Nazionale dei Lincei and the Scuola Normale Superiore, Pisa (1994)
 - [27] П. Г. Гриневич и С. П. Новиков, Струнное уравнение -II. Физическое решение. *Алгебра и анализ*, том **6** (1994), 118-140., English transl., String equation-II. Physical solution, *St. Petersburg Math. J.* **6** (1995), 553-574.
 - [28] V. Yu. Novokshenov, Whitham deformations of two-dimensional Liouville tori, in *Singular Limits of Dispersive Waves*, eds by N.M. Ercolani et al., Plenum Press, New York (1994), 105-116.

- [29] K. Takasaki and T. Takebe, Integrable hierarchies and dispersionless limit, *Reviews in Math. Physics* **7** (1995), 743-808.
- [30] S. Venakides, The generation of modulated wavetrains in the solution of the Korteweg-de Vries equation, *Comm. Pure and Appl. Math.* **38** (1985), 883-909., The Korteweg-de Vries equation with small dispersion: Higher order Lax-Levermore theory, *Comm. Pure and Appl. Math.* **43** (1990), 335-361.
- [31] G.B. Whitham, Non-linear dispersive waves, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* **283** (1965), 238-261., A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a Lagrangian, *J. Fluid Mech.* **22** (1965), 273-283., Two-timing, variational principles and waves, *J. Fluid Mech.* **44** (1970), 373-395.
- [32] G.B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, A Wiley-Interscience Publication. (1974).
- [33] T. Zhang and S. Venakides, Periodic limit of inverse scattering, *Comm. Pure and Appl. Math.* **46** (1993), 819-865.