

散逸系の運動学的波動と正則化長波展開

鳥取大・工 応用数理 大信田 丈志 (OOSHIDA Takeshi)

Dept. Applied Mathematics & Physics, Tottori Univ.

1 はじめに

物理的な「波動」の例を挙げると言われたとき、多くの可積分系研究者がまっさきに考えるのは、おそらく、気体中の衝撃波と、浅水系の重力波ではないだろうか。戸田格子や FPU 格子のような格子振動の連続極限を考える人もいるかもしれない。これらの波動においては、運動量の保存が本質的である。運動方程式は慣性と復元力で成り立っている、と言い替えてもよい。しかし、もしも世の中の波動がすべて慣性と復元力を基本原理として成り立っていると考える人があったら、それは大きな誤解だと言わなければならない。散逸系では、反応拡散方程式や運動学的波動といった、運動量保存とは異なる機構に基づく波動現象が存在するからである。

本講演では、散逸系の波動のうち、運動学的波動 [1, §2.2] と呼ばれるものについて考察する。考えるべき問題は、系の支配方程式が与えられたときに、長波近似を用いて、波動を記述するための最低限の自由度のみを含む方程式を抽出することである。最低次で既に運動量が非保存的になるので、非粘性の波からの摂動として考えることはできない。むしろ、粘性無限大の極限からの摂動と考えるほうが妥当である。このとき、慣性の効果を取り入れようとすると展開が収束しないという困難が生じる。この困難を克服するため、Padé 近似を長波展開に応用した「正則化長波展開」[2, 3] を提案する。

具体的な例題として、垂直壁面上または斜面上を重力で流れる薄い流体の系 [4] を考える。この流れは「液膜流」と呼ばれ、特徴的な表面波を生じることが知られている。液膜流の簡単なモデル方程式の一例として、Benney-Kawahara 方程式¹

$$\partial_t \eta + (c_1 + c'_1 \eta) \partial_x \eta + c_2 \partial_x^2 \eta + c_3 \partial_x^3 \eta + c_4 \partial_x^4 \eta = 0 \quad (1.1)$$

が挙げられる。Lin は、式 (1.1) に 5 階微分の項を含めた方程式 [6, 式 (25)] を導いている。本講演では、ある意味で式 (1.1) に似た、別の方程式を導出する。驚くべきことに、導出された方程式は、垂直壁かつ粘性無限大の極限でソリトン的な挙動を示す。これは、通常の KdV ソリトンの物理的背景として想定される浅水系 (水平かつ非粘性) とは正反対の状態である。

以下に、本講演の構成を示す。まず第 2 章で、運動学的波動について説明する。特に、液膜流の粘性無限大の極限で、ソリトン的な挙動が見られることを示す。慣性の効果を取り入れるための数学的準備として、第 3 章で、微分方程式に対する Padé 近似の応用について考える。第 4 章では、液膜流の方程式を導くための Benney の長波展開を紹介したあ

¹式 (1.1) を単に Benney 方程式と呼ぶこともあるが [5, §7]、Benney 方程式という名称は、第 4 章で出てくる別の方程式 (4.10) を指すことも多い。Chang の本 [4, §3] では、式 (1.1) を「Kawahara 方程式」または「一般化 KS 方程式」と呼び、式 (4.10) を Benney 方程式と呼んでいる。本講演では、式 (1.1) を「Benney-Kawahara 方程式」、式 (4.10) を「Benney-Gjevik 方程式」と呼んで区別することにする。

と、その困難を克服するための方法として、正則化長波展開を導入する。基本的な発想は、波数空間における Padé 近似であるが、単なる線形分散関係ではなく、高次の非線形効果を取り込んだ形になっている。最後に、当日の講演では省略した内容であるが、第 5 章で粉体流動層への正則化方程式の応用を取り上げる。

2 運動学的波動

保存系の波では運動量保存が本質的であるが、散逸系では、そもそも運動量が保存されないことが多い。しかし、エネルギーも運動量も保存しないような系においても、質量保存 (または似たような運動学的保存則) のみに基づく波動が可能である。このような波動は、運動学的波動と呼ばれる。

以下では、保存系の波について簡単にまとめたあと、運動学的波動を生じる非保存系の実例をいくつか考察する。なお、「保存系」という言葉は曖昧だが、とりあえず、『運動量とエネルギーの両方に対して狭義の保存則²が成り立つ系』ということにしておく。

2.1 保存系の波動

保存系の波の典型例として、浅水波を考えよう。水平方向に x 軸をとり、鉛直上向きに z 軸をとる。支配方程式は、深さ方向 (z 方向) に積分した形で書くと、次のようになる:

$$\partial_t h + \partial_x \int_0^h u \, dz = 0 \quad (2.1a)$$

$$\rho \partial_t \int_0^h u \, dz + \partial_x \left\{ \rho \int_0^h u^2 \, dz + P \right\} = 0 \quad (2.1b)$$

ここで $h = h(x, t)$ は自由表面の位置、 u は速度場の x 成分であり、圧力項 P は

$$P = \int_0^h (p - p_{\text{atm}}) \, dz, \quad p = p_{\text{atm}} + \rho g(h - z) + [\text{慣性の効果}]$$

で与えられる。大気圧 p_{atm} 、流体の密度 ρ 、重力加速度 g は、いずれも定数である。この系の運動は、流体の慣性と、復元力としての静水圧によって支配される。あきらかに、式 (2.1a) は質量保存 (運動学的関係式) であり、式 (2.1b) は運動量の保存を示している。

運動量保存の式 (2.1b) を用いて u と h を関係づけ、表面波を単一の変数で記述する方程式を導くことができる。特に、長波展開の最低次で得られる線形の波動方程式において、平均水深を h_0 とし、正の方向に進む単波を仮定すると

$$\frac{u}{\sqrt{gh_0}} = \frac{\eta}{h_0}, \quad \eta \stackrel{\text{def}}{=} h - h_0$$

を得るので、これを用いて方程式系 (2.1) から u を消去し、表面変位 η のみを含む方程式に帰着させればよい。こうして、Benjamin-Bona-Mahony (BBM) 方程式 [7, 8]

$$(1 - A\partial_x^2) \partial_t \eta + (c + c'\eta) \partial_x \eta = 0 \quad (2.2)$$

²いわゆる収支釣り合いの式において、生成項 (系の外部とのやりとりを含む) がゼロになる場合を指す。わざわざ「狭義の」と断ったのは、収支釣り合いの式を (広義の) 保存則と称する場合があるからである。

を得る。長波近似を前提にすれば、時間微分項の前の演算子は次のように反転できる:

$$(1 - A\partial_x^2)^{-1} = 1 + A\partial_x^2 + \dots$$

これを用いて BBM 方程式 (2.2) を書き直し、高次の項を切り捨てると、KdV 方程式

$$\partial_t \eta + (c + c' \eta) \partial_x \eta + B \partial_x^3 \eta = 0 \quad (2.3)$$

が得られる。方程式 (2.2) または (2.3) の第 1・第 2・第 3 保存量は、もとの方程式 (2.1) における 質量・運動量・エネルギーの保存則に対応している。

波動の別の例として、気体中の 1 次元的な圧力波を考える。順圧近似が成り立つものとし、1 次元での粘性係数を $\tilde{\eta}_* = (4/3)\tilde{\eta}$ とすると、支配方程式は

$$\partial_t \rho + \partial_x (\rho u) = 0 \quad (2.4a)$$

$$\partial_t (\rho u) + \partial_x [\rho u^2 + p(\rho) + \tilde{\eta}_* \partial_x u] = 0 \quad (2.4b)$$

と書ける。式 (2.4b) は、やはり運動量保存を記述する。また、長波極限では $\tilde{\eta}_*$ の項を無視することができるので、力学的エネルギーも最低次近似では保存される。

2.2 非保存系の波動

気体中の圧力波 (2.4) は、浅水重力波 (2.1) と同じく、運動量保存に基づく波動であり、その意味で保存系の波である。式 (2.4) には粘性が含まれているけれども、これは非保存系の波動の典型例だとは言えない。長波極限での波動の性格は保存系としての部分で決定されており、粘性項は摂動的に追加されているに過ぎないからである。

非保存系の波動の典型例として、むしろ、運動量保存とは全く異なる原理に基づくものがあることに注目しよう。極端な例として、反応拡散系の“波動”を挙げることができる。反応拡散方程式 [9, §12] は、

$$(\partial_t + \kappa \nabla^2) u = F(u, v)$$

$$(\partial_t + \nu \nabla^2) v = G(u, v)$$

のような形をしており、あきらかに非保存的である。それにもかかわらず、“波”としか思えないような挙動が反応拡散系において見られる。この例から分かるように、質量保存や運動量保存は、波動にとって本質的ではない。

散逸系の波動のうち、反応拡散系とは別の重要なクラスとして、運動学的波動 [1, §2.2] がある。これは、質量あるいは粒子数だけが保存則に従うような波動である。式で書くと、密度を ρ として、

$$\partial_t \rho + \partial_x q = 0, \quad q \simeq Q(\rho) \quad (2.5)$$

のような方程式で記述される。

式 (2.5) に従う系としては、たとえば交通流における最適速度モデル (の連続体極限) が挙げられる。車の流量 q は、運動量保存で決まっているわけではなく、車間距離 ρ^{-1} に応じた最適速度によって決まる。式 (2.5) から q を消去すると

$$(\partial_t + c \partial_x) \rho \simeq 0, \quad c = Q'(\rho)$$

という1階の波動方程式が得られる。この方程式は、車の密度の波が速度 c で伝播することをあらわす。

より物理的な例として、1次元粉体流動層 [10, 11] を考えよう。これは、管のなかに粉粒体を満たし、下から流体 (空気など) を吹き入れて粉粒体を流動化させたものである。管が細いので回転的な運動が抑えられ、粉体の運動は重力の影響に支配された1次元的なものになる。流入速度がある値を越えると、密度波が出現することが知られており、これはいわゆるバブリング現象の1次元版だと考えられる³。

管にそって鉛直上向きに z 軸をとり、粉粒体の数密度を $\phi = \phi(z)$ 、流体の速度を u 、粉粒体の巨視的速度を v とする。巨視的運動方程式のうち、最低次の項は、流体が粉粒体を引きずる力 (抗力) と粉粒体にはたらく重力とのつりあいであり、式で書くと

$$-\phi g + \zeta(\phi) (u - v) \simeq 0 \quad (2.6)$$

のようになる。慣性とか、密度による復元力とかいった項は、長波近似の最低次では方程式に現れず、次のオーダーでの補正として現れるに過ぎない。式 (2.6) を運動学的な式

$$\partial_t \phi + \partial_z (\phi v) = 0, \quad \partial_t (1 - \phi) + \partial_z \{ (1 - \phi) u \} = 0$$

と組み合わせ、微小攪乱を仮定すると、密度波の伝播を記述する方程式が得られる [12, §4.2]。

エネルギーの立場から見ると、抗力は非保存的な項であり、慣性は保存的な項である。ところが、密度波の方程式をしらべてみると、話は逆であって、抗力は波動の中立的伝播を決定する“保存的效果”であり、慣性は波の成長をもたらす“非保存的效果”であることが分かる。このようなことを考えると、エネルギーの立場で保存項と非保存項を区別しようとすることは、非保存系の運動学的波動では、かえって有害だとさえ言える。

2.3 「マグマソリトン」と「はちみつソリトン」

1次元粉体流動層のような系では、慣性の効果は波の成長をもたらす非保存的效果であることを述べた。実際、驚くべきことに、慣性が効かない極限 (すなわち粘性が非常に大きい極限) でソリトンのような挙動を示す系が存在する。

マグマの上昇運動を運動を記述する現象論的方程式 [13] は、ちょうど1次元粉体流動層での重力項を浮力項に置き換えたような形をしている。したがって、マグマの量に関する運動学的波動が存在し、マグマが多い領域が上向きに伝播する。この波動がソリトンのような挙動を示すことを Scott & Stevenson [14, 15] が発見し、「マグマソリトン」と命名した。はちみつを用いたマグマソリトンの衝突実験 [13, 16] では、ソリトンが衝突して互いにすりぬける様子が、位相シフトまで含めてみごとに示されている。

マグマソリトンを記述する弱非線形方程式 [17, 18] は、BBM 方程式 (2.2) に類似した方程式になる。BBM 方程式は可積分ではないが、KdV 方程式の第1・第2・第3保存量に似た3つの保存則をもち、かなりの程度まで“ソリトンらしい”挙動を示す。すなわち、マ

³管が太い場合に生じる通常のバブリングにおいては、回転運動が本質的である。1次元系では、回転が排除されるため、問題が大幅に簡単化される。

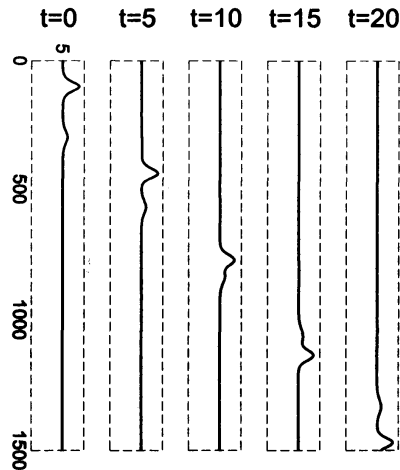


図 1: 「はちみつソリトン」の衝突

グマの上昇運動のようなきわめて粘性的な系が、ソリトンの挙動を示す方程式に帰着するのである。

マグマソリトンと BBM 方程式との対応をより明確にするために、別の例で考えてみよう。すなわち、軸対称な通路内の上昇流を考える代わりに、平らな垂直壁面上を重力で流下する粘性流体の自由表面流を考える。平板を垂直に立て、板にそって「はちみつ」の層を重力で流下させることを想像すればよい。言わば「はちみつソリトン」である。

図 1 に、はちみつソリトンの数値計算例を示す。用いた方程式は、第 4 章に示す、液膜流の正則化方程式 (4.17) である。物性値として、動粘性率 ν 、密度 ρ 、表面張力係数 T を

$$\nu = 50 \text{ cm}^2/\text{s}, \quad \rho = 1.4 \text{ g/cm}^3, \quad T = 0.069 \text{ N/m}$$

と設定し (すなわち水の 1000 倍の粘性を仮定)、液膜厚さの代表値を 5 mm とした。系の大きさは 1.5 メートルに設定してある。初期条件として、大きさの異なる 2 つの定常進行孤立波を用意し、衝突をおこなわせた。その結果、たしかに 2 つの孤立波がソリトンのように衝突していることが図 1 から確認できる。

垂直平板上のはちみつソリトンが BBM 方程式に帰着することを示そう。平板にそって下に向かう方向に x 軸をとり、平板に垂直に z 軸をとる。運動学的関係式は

$$\partial_t h + \partial_x Q = 0, \quad Q = \int_0^h u \, dz \quad (2.7)$$

で与えられ、ここで Q は体積流量である。運動方程式は、適当に無次元化すると

$$R D_t u = g - \partial_x p + (\partial_x^2 + \partial_z^2) u \quad (2.8)$$

と書ける。ここで D_t は Lagrange 微分、 R は Reynolds 数である。運動方程式 (2.8) を深さ方向 (z 方向) に積分し、さらに

$$p = \text{const.} (= p_{\text{atm}}), \quad \int_0^h \partial_z^2 u \, dz \sim -h^{-2} Q$$

のような荒っぽい評価を用いると、

$$0 = gh + (\partial_x^2 - h^{-2}) Q \quad (2.9)$$

となる。ただし、粘性が大きい極限を考え、 $R \rightarrow 0$ とした。方程式 (2.9) を運動学的関係式 (2.7) と組み合わせることにより、「はちみつソリトン」の方程式が得られる。特に、振幅が小さい場合、 $h = 1 + \eta$ と置いて η で展開すると、BBM 方程式 (2.2) に帰着する。

興味深いことは、この系では運動量もエネルギーも保存されないにもかかわらず、BBM 方程式という、3つの保存量をもつ方程式が得られることである。すなわち、運動量でもエネルギーでもない、奇妙な保存量が存在する。この保存量の物理的な意味は、ソリトンの挙動の原因となる保存量だという点を除いて、今のところ不明である。

2.4 慣性の効果：液膜流

はちみつソリトンに有限の慣性の効果を含めることを考えよう。慣性の効果 (Reynold 数) が極端に大きい場合を別にすれば、流れ自体は層流にとどまり、表面波だけが慣性によって不安定化する。これが、いわゆる液膜流の波動 [4] である。典型的には、表面波が下流に伝播しながら発達し、Kuramoto-Sivashinsky (KS) 的な振動裾をもつ孤立波を生じるに至る。実験としては、Kapitza の古典的な研究 [19] が有名であり、最近では Liu ら [20, 21] による精密な実験が知られている。

表面波の記述に必要な自由度だけを Navier-Stokes 方程式から取り出してくるための系統的な方法として、Benney の長波展開法 [22, 23] が知られている。しかし、Benney の方法は、有限の慣性の効果をうまく取り込むことができない。この問題について第 4 章で論じる前に、数学的準備として、Padé 近似の微分方程式への応用について考えてみよう。

3 微分方程式における Padé 近似

Benney の長波展開は、微分演算子によるべき級数展開と見ることができる。つまり、長波展開の破綻は、べき級数展開の破綻の一種なので、処方箋として、Padé 近似 [24] が使える可能性がある。

以下、常微分方程式による例題において、Padé 近似の適用例をいくつか考察してみよう。Padé 近似といえば「広田の方法」[25] を忘れるわけにはいかないが、ここで考察する例は、それとは異なる形での Padé 近似の応用を示している。

3.1 べき級数解における収束性の問題

常微分方程式の初期値問題

$$\frac{df}{dz} = f^2, \quad f(0) = 1 \quad (3.1)$$

を考えよう。もちろん、解は変数分離法で求められるけれども、ここではそんなことは知らないものとして、べき級数の形で解を求めてみる。結果は次のとおり：

$$f = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \quad (3.2)$$

では、たとえば $f(-2)$ はいくらだろうか。級数 (3.2) に単純に $z = -2$ を代入しても収束しない。しかし、 $-\infty < z < 0$ に f の特異点があるわけではないので、常微分方程式の解として $f(-2)$ はきちんと定義できるはずである。

級数解 (3.2) の“有効範囲”は、複素平面上で原点を中心とする単位円の内側に限られる。これは、 $z = 1$ に特異点があり、これが級数解の収束半径を決めているためである。収束円の外側 (たとえば $z = -2$) での f の値を求めようとすれば、解の有効範囲を拡張しなければならない。数学の言葉で言えば、解析接続をおこなう必要がある。

級数解 (3.2) の場合、次のようにすれば収束半径の制約を取り除くことができる：

$$\begin{array}{rcl} f & = & 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots \\ -) & z f & = z + z^2 + z^3 + \cdots \\ \hline (1-z)f & = & 1 \end{array} \quad \text{したがって} \quad f = \frac{1}{1-z} \quad (3.3)$$

こうして得られた結果に、たとえば $z = -2$ を代入して $f(-2) = 1/3$ を得る。要するに、 f をそのまま級数展開すると $z = 1$ にある特異点がじゃまになって $|z| > 1$ で収束しないわけだから、 $1-z$ を掛けて特異点を消してしまえば良い。

3.2 小さいが有限の慣性をもつ振動子

より物理的な例を考えよう。減衰項と外力項をもつ調和振動子の運動方程式は、適当に変数変換すると

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = f(t) \quad (3.4)$$

と書き直せる。ここで、慣性の効果が小さい場合 ($0 < m \ll 1$) の解を考える。

まず、外力項 $f(t)$ をゼロとした式

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0 \quad (3.5)$$

の解を求めよう。式 (3.5) の一般解は

$$x = A_+ \exp(s_+ t) + A_- \exp(s_- t) \quad (3.6)$$

$$s_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4m}}{2m} = \begin{cases} -1 - m + \cdots \\ -m^{-1} + \cdots \end{cases} \quad (3.7)$$

で与えられる。2つのモードのうち、 s_- のモードは急激な動きを示し、他方、 s_+ のモードは、比較的ゆっくりした動きを示す。定常応答への接近を考える際には、前者を無視し、後者 (s_+ のモード) だけを抜きだして考えればよい。すなわち、前者は境界層⁴に相当し、後者は中心多様体に相当する。

次に、外力項が正弦波 $f = \cos \omega t$ で与えられるとして、式 (3.4) の定常応答解を求めよう。いま m は小さいので、解を

$$x = x^{(0)} + m x^{(1)} + m^2 x^{(2)} + \cdots \quad (3.8)$$

⁴式 (3.5) は、境界層理論についての、Prandtl 自身による簡単な例題 [26, §4.7] として知られている。

の形に仮定して、式 (3.4) に代入する。第 0 近似解は

$$x^{(0)} = A_0 \cos \omega t + B_0 \sin \omega t; \quad A_0 = \frac{1}{1 + \omega^2}, \quad B_0 = \frac{\omega}{1 + \omega^2} \quad (3.9)$$

である。これを、 m の 1 次で得られる方程式

$$(1 + \partial_t^2) x^{(1)} = -\partial_t^2 x^{(0)} \quad (3.10)$$

の右辺に代入し、定常応答を求めると

$$x^{(1)} = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t; \quad A_1 = \frac{\omega^2 (1 - \omega^2)}{(1 + \omega^2)^2}, \quad B_1 = \frac{2\omega^3}{(1 + \omega^2)^2}$$

となる。以下、各オーダーで同様に計算を続ければよい。展開の一般項は

$$x^{(n)} = A_n \cos \omega t + B_n \sin \omega t; \quad \begin{bmatrix} A_n \\ B_n \end{bmatrix} = \frac{\omega^{2n}}{(1 + \omega^2)^n} \begin{bmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

で与えられ、したがって級数解が次のように求められる:

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=0}^{\infty} m^n x^{(n)} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t \end{bmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{m\omega^2}{1 + \omega^2} \begin{bmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{bmatrix} \right)^n \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

注意すべきことは、式 (3.12) の右辺に含まれる無限和が収束するとは限らない、ということである。収束条件は $m\omega^2 < 1$ なので、仮に m が小さくても、 ω が ある程度の大きさを越えると収束条件が破れることがあり得る。また、 $m\omega^2 \lesssim 1$ の場合には収束が遅くなるので、実際問題として、

$$m \ll \omega^{-2} \quad (3.13)$$

でない限り、級数を途中で打ち切ることができない。しかし、たとえ条件 (3.13) が満たされない場合でも、無限和を

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{m\omega^2}{1 + \omega^2} \begin{bmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{bmatrix} \right)^n = \left(\mathbf{1} - \frac{m\omega^2}{1 + \omega^2} \begin{bmatrix} 1 & -\omega \\ \omega & 1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \quad (3.14)$$

のように足しあげてしまえば、何の問題もなく定常応答解を求めることができる。

このように、べき級数展開で得られる無限和を具体的に計算してしまえば、級数解の有効性に関する制約条件 (今の場合 $m\omega^2 \ll 1$) を取り除くことができる。もちろん、無限和の計算が (近似的にでも) 可能かどうかは、個々の問題に依存することであり、あらゆる場合に通用するわけではない。このことは、解析接続できない複素関数の存在を考えれば明らかである。しかし、たとえば解の特異点が数個の極に限られるような場合には、総和法による解析接続は有効な手段となる。

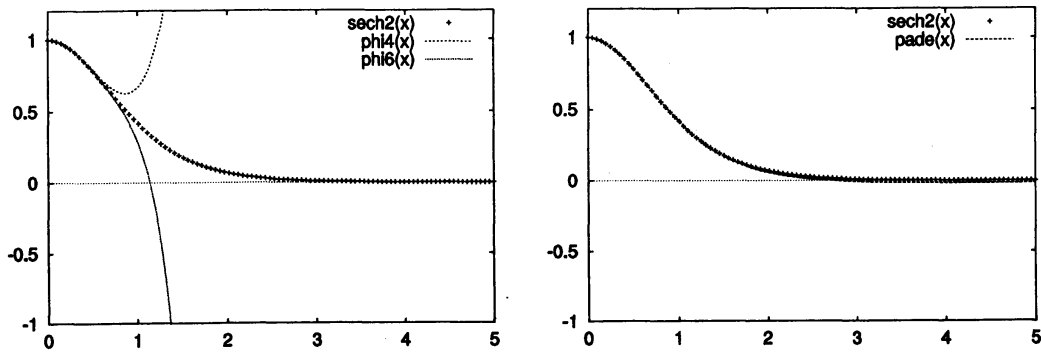


図 2: 式 (3.15) の近似解と厳密解の比較。左はべき級数解、右は Padé 近似。

3.3 Padé 近似

今までの例は、級数解の一般項が具体的に求められ、さらに無限級数の総和を厳密に計算できるような問題であった。しかし、いつでもそのようなことが可能だとは限らない。そこで、級数解が有限の次数までしか求められない場合に、近似的に級数の総和を計算する方法について考えよう。この方法は、Padé 近似 [25, 24] として知られている。

例題として、常微分方程式

$$f \frac{d^2 f}{dx^2} - 2 \left(\frac{df}{dx} \right)^2 = 2f^3 - 4f^2, \quad f(0) = 1, \quad \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=0} = 0 \quad (3.15)$$

を考えよう。解が偶関数になることはすぐ分かるので、

$$f = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + a_6 x^6 + \cdots \quad (3.16)$$

と置く。これを式 (3.15) に代入して $a_0, a_1, a_2, \dots$ を順に決定することにより、

$$f = 1 - x^2 + \frac{2}{3}x^4 - \frac{17}{45}x^6 + \cdots \quad (3.17)$$

を得る。

べき級数解 (3.17) を x の 4 次まで残して打ち切ったものを ϕ_4 とし、6 次まで残して打ち切ったものを ϕ_6 とする。これらの近似解が、方程式 (3.15) の真の解をどれだけ良く近似しているかが問題である。

じつは、方程式 (3.15) には 厳密解

$$f = \operatorname{sech}^2 x \quad (3.18)$$

が存在する (代入して計算すれば容易に確認できる)。そこで、べき級数による近似解と厳密解 (3.18) とを比較してみよう。図 2(a) に示すとおり、 $x = 0$ の近傍では一致は良好であるが、 $x > 1$ では、 ϕ_4 も ϕ_6 も全く合わない。特に、 ϕ_6 が ϕ_4 より高次だからといって一致が良くなるわけではないことに注意しよう。

図 2(a) は、 x が大きくなると べき級数 (3.16) の収束性が失われることを示唆している。そこで、未定の多項式

$$\psi = 1 + b_2 x^2 + b_4 x^4$$

を導入し、 f のべき級数 (3.16) を、別の級数

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \psi f = c_0 + c_2 x^2 + c_4 x^4 + c_6 x^6 + \cdots \quad (3.19)$$

に変換してみる。式 (3.19) を考える狙いは、 ψ をうまく選び、 f の特異点を ψ のゼロ点で打ち消すようにすれば、 g は f よりも良い収束性を示すはずだという点にある。

具体的に $\{b_k\}$ を定めるため、 g の展開が“途中で切れる”ことを要請する。たとえば、 f の 6 次までの展開 (3.17) を式 (3.19) に代入し、 $c_4 = c_6 = 0$ を要請すると、 ψ の係数が

$$b_2 = \frac{13}{15}, \quad b_4 = \frac{1}{5} \quad (3.20)$$

と決まる。これから g が定まり、 f の Padé 近似

$$f = \frac{g}{\psi} \simeq \frac{1 - \frac{2}{15}x^2}{1 + \frac{13}{15}x^2 + \frac{1}{5}x^4} \quad (3.21)$$

が得られる。Padé 近似 (3.21) と厳密解 (3.18) をグラフで比較すると、図 2(b) にあるように、かなり良く一致していることが分かる。

4 液膜流

4.1 系の設定

液膜流の支配方程式を記し、これから表面波の方程式を抽出する問題について考えよう。壁を下る方向に x 軸、法線方向に z 軸をとる [27, p.63]。流体は $0 < z < h(x, t)$ の範囲を占め、その運動は非圧縮 Navier-Stokes 方程式に従う [2, p.3249]:

$$\rho = \text{const.}, \quad \text{div } \mathbf{u} = \partial_x u + \partial_z w = 0 \quad (4.1a)$$

$$\rho D_t \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \text{div } \vec{\tau} = \rho g \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{bmatrix}, \quad \vec{\tau} = -p \mathbf{1} + 2\tilde{\eta} \text{sym grad } \mathbf{u} \quad (4.1b)$$

ここで g は重力加速度、 α は斜面の傾斜角、 $\tilde{\eta} = \rho\nu$ は粘性係数である。はちみつソリトンのところで登場した式 (2.8) は、式 (4.1b) の x 成分に対応する。

境界条件として、底面 ($z = 0$) では粘着条件

$$\mathbf{u}|_{z=0} = 0 \quad (4.2)$$

を課す。また、表面 ($z = h$) では、自由表面についての力学的条件と運動学的条件を課す。

力学的境界条件は応力に関する条件であり、大気圧を p_{atm} 、表面張力係数を T とすると

$$\vec{\tau} \cdot \mathbf{n} = (-p_{\text{atm}} + T\Sigma) \mathbf{n} \quad (4.3a)$$

によって与えられる。ここで $\mathbf{n}$ は表面の法線ベクトル、 Σ は表面の曲率であり、

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial_x h)^2}} \begin{bmatrix} -\partial_x h \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \frac{\partial_x^2 h}{[1 + (\partial_x h)^2]^{3/2}}$$

という関係で h と結ばれている。他方、運動学的条件は、表面の運動と流体の速度の整合性から出てくる条件であり、 $D_t(h-z)|_{z=h} = 0$ と書ける。この条件は、質量保存の式

$$\partial_t h + \partial_x Q = 0, \quad Q = \int_0^h u dz \quad (4.3b)$$

と同等である。ここで Q は体積流量を表す。

4.2 一様な液膜の線形安定性解析

方程式系 (4.1)–(4.3) は、一様定常な液膜をあらわす厳密解

$$u = U_N \left\{ \frac{2z}{h} - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right\}; \quad U_N = \frac{g \sin \alpha}{2\nu} h^2, \quad h = \text{const.} \quad (4.4)$$

をもつ [27, p.63]。解 (4.4) を Nusselt 解という。適当に無次元化すると、Nusselt 解は

$$u = 2hz - z^2, \quad h \sim 1$$

と書ける。一様な液膜 ($h = \text{const.}$) の場合だけでなく、液膜厚さ h が変動する場合でも、 h の変動がゆるやかであれば、流れは局所的に Nusselt 解で近似できる。

無次元パラメータの選択には複数の流儀があるが、ここでは次の 3 つを採用する：

- Reynolds 数 R (慣性の大きさ)
- Weber 数 W (表面張力の大きさ)
- 傾斜角 α

なお、 W の代わりに $K \sim WR^{2/3}$ を用いる流儀もある。Kapitza 数 K は物性値だけで決まる無次元パラメータである。水の場合、 $K \approx 3000$ であり、表面張力が大きい物質であることが分かる。したがって、 $R \sim O(1)$ であれば、 W もまた大きな値をとる。

さて、Nusselt 解 (4.4) の線形安定性解析 [28, 29] によると、一様液膜は

$$R > R_c = \frac{5}{4} \cot \alpha \quad (4.5)$$

で不安定化し、長波長の表面波が生じる⁵。垂直壁では $R_c = 0$ である。正の成長率をもつ波数領域は、 $(R - R_c)/W$ が小さければ

$$0 < k < k_0 \simeq \sqrt{\frac{4}{5} \left(\frac{R - R_c}{W} \right)} \quad (4.6)$$

で与えられる。

⁵ただし、 R が極端に大きい場合は、表面波とは別の種類の不安定性 [30, 31] が先に生じるので、その場合の安定性条件は式 (4.5) では与えられない。

4.3 Benney の長波展開

不安定性によって生じた表面波は、下流に進みながら指数関数的に成長するが、やがて非線形的な効果によって成長がおさえられ、ある有限の振幅をもつ定常進行波的な波となる。このような非線形の表面波について調べるため、系統的な展開によって、表面 h の発展方程式を導出しよう。

式 (4.6) により、もしも $(R - R_c)/W \ll 1$ であれば $\partial_x \sim k_0 \ll 1$ と評価できる。これは、流れ場の x 方向の変動がゆるやかであることを意味する。変動がゆるやかな極限を考えると $\partial_x = 0$ となり、これは Nusselt 解 (4.4) にほかならない。したがって、 k_0 を展開パラメータとして、Nusselt 解からの摂動計算をおこなうことが考えられる。

このような長波展開による非線形方程式の導出は、Benney [22] によって最初に試みられた。展開パラメータとして、 k_0 の代わりに

$$\partial_x \stackrel{\text{def}}{=} \mu \partial_{x_1} \quad (4.7)$$

によって長波パラメータ μ を定義し、さらに

$$\mu \sim \sqrt{R/W} \ll 1, \quad R \sim O(1) \quad \left(\text{すなわち } W = \mu^{-2} \tilde{W}, \quad \tilde{W} \sim R \sim \mu^0 \right)$$

として、 μ で基礎方程式系を展開する。

長波展開の結果、速度場はすべて消去され、流量 Q が $\{h, \partial_x h, \partial_x^2 h, \dots\}$ の関数として与えられる。この関数は、 μ によるべき級数

$$Q = Q_0 + \mu Q_1 + \mu^2 Q_2 + \dots + \mu^n Q_n + \dots \quad (4.8)$$

の形で得られ、Gjevik [23, 32] によれば⁶

$$Q_0 = \int_0^h u_0 dz = \int_0^h (2hz - z^2) dz = \frac{2}{3} h^3 \quad (4.9a)$$

$$Q_1 = \int_0^h u_1 dz = \frac{8}{15} Rh^6 \partial_{x_1} h - \frac{2}{3} (\cot \alpha) h^3 \partial_{x_1} h + \frac{2}{3} \tilde{W} h^3 \partial_{x_1}^3 h \quad (4.9b)$$

$$\begin{aligned} Q_2 = R^2 & \left[\frac{1016}{315} h^9 (\partial_{x_1} h)^2 + \frac{32}{63} h^{10} \partial_{x_1}^2 h \right] \\ & - (R \cot \alpha) \left[\frac{32}{15} h^6 (\partial_{x_1} h)^2 + \frac{40}{63} h^7 \partial_{x_1}^2 h \right] + \frac{14}{3} h^3 (\partial_{x_1} h)^2 + 2h^4 \partial_{x_1}^2 h \\ & + \tilde{W} R \left[\frac{40}{63} h^7 \partial_{x_1}^4 h + \frac{16}{3} h^6 (\partial_{x_1} h) \partial_{x_1}^3 h + \frac{16}{5} h^6 (\partial_{x_1}^2 h)^2 + \frac{32}{5} h^5 (\partial_{x_1} h)^2 \partial_{x_1}^2 h \right] \end{aligned} \quad (4.9c)$$

である。第0近似 (4.9a) は 局所 Nusselt 解にほかならない。第1近似、すなわち Q_1 まで残して Q_2 以降を捨てる近似により、Benney-Gjevik の長波方程式

$$\partial_t h + \frac{2}{3} \partial_x \left[h^3 + \left(\frac{4}{5} Rh^6 - h^3 \cot \alpha \right) \partial_x h + Wh^3 \partial_x^3 h \right] = 0 \quad (4.10)$$

⁶式 (4.9) は、もちろん、Mathematica を用いて容易に確認できる。

を得る。なお、長波パラメータ μ は、 ∂_x および W のなかに再吸収してある。式 (4.10) は、場の自由度として $h = h(x, t)$ だけを含んでおり、これは表面波を記述するための必要最小限の自由度であることに注意しよう。

さて、Benney-Gjevik 方程式 (4.10) が、実験で観察されるような表面波を再現できるかどうか問題である。少なくとも、定常進行波をあらわす解が存在することを確認する必要がある。

Pumir ら [33] は、式 (4.10) の数値計算をおこない、あるパラメータに対しては確かに定常進行する解が存在することを示した。実際、表面波の振幅が小さい極限を考え、 $h = 1 + \eta$ として η で展開すると、式 (4.10) は Kuramoto-Sivashinsky(KS) 方程式

$$(\partial_t + 2\partial_x)\eta + 4\eta\partial_x\eta + \frac{8}{15}(R - R_c)\partial_x^2\eta + \frac{2}{3}W\partial_x^4\eta = 0 \quad (4.11)$$

に帰着する。微小振幅 ($|\eta| \ll 1$) の仮定は、少なくとも $(R_c - R)/W \rightarrow +0$ の極限では確かに満たされる。KS 方程式は定常進行する解をもつことから、Benney-Gjevik 方程式も同様な解をもつというのは自然なことである。特に、孤立波的な定常進行解は片側に振動裾をもち、これは実験で観察される波形と似ているように見える。

けれども、長波展開の結果には、重大な問題点があることが分かった。それは、定常進行する孤立波解が、 R が小さいところでしか存在しないということである。KS 極限では確かに定常進行解が存在するのだが、 R を増やしていくと、ある R の値で サドル・ノード分岐が生じ、定常進行する解が存在しなくなる。さらに、この分岐点よりも大きな R の値に対して式 (4.10) の初期値問題を解くと、有限時間で発散してしまう [33]。この分岐は偽の分岐であって、実験的には、これよりも大きな R で定常進行する孤立波が観測される。すなわち、式 (4.10) は実験と矛盾する。また、Navier-Stokes 方程式の直接計算 [34] とも矛盾する。さらに困ったことに、長波展開の次数を上げても、偽の分岐が生じるという結果は全く改善されない。

この困難を解決するための方針は 2 つある。ひとつは、 h のみを含む方程式 (1 モード方程式) にすることをあきらめ、他のモードを含めるようにすることである。2 モード方程式⁷は、第 2 のモードを 流量 Q で代表させると、

$$\partial_t h + \partial_x Q = 0 \quad (4.12a)$$

$$\partial_t Q = \dots \quad (4.12b)$$

のような形で書ける [35, 36, 37]。本来、 Q は 独立した自由度ではなく、 h に従属するはずなのだが、慣性が大きくなると Q の従属が不完全となるので、式 (4.12) のような 2 モードの記述が必要となると考えられる。さらに、3 モードの方程式も研究されている [37, 38]。これとは別に、1 モードの枠内で改良の余地を探すという方針があり得る。改良のための方策として、BBM 方程式 (2.2) のような交差微分項を導入することを考えよう [39, 2]。交差微分項の存在は、有理関数的な複素分散関係式を意味する。したがって、交差微分項の係数を系統的に決める方法として、Padé 近似が応用できる。

⁷もちろん式 (4.12) から Q を消去することは可能だが、その場合、代わりに $\partial_x^2 h$ が現われるので、これを 1 モード方程式と称するのは適切ではない。

4.4 正則化長波展開

第3章の例を踏まえ、Padé近似を用いて Benney の長波展開を改良する。

まず、長波展開がうまくいかない理由を考察しよう。Benney の長波展開では、流量 Q を、式 (4.8) のようなべき級数の形で求める。一般に、 Q_n は R^n に比例する部分を含み、 R がある程度の大きさになるとこの部分が主要な項になる。係数は複雑であるが、おおまかに言って1程度の大きさと見てよいから、

$$\mu^n Q_n \sim (\mu R)^n$$

と見積もることができる。したがって、もし $\mu R \gtrsim 1$ だと、べき級数は収束しない。級数解を有限項で打ち切ることができるためには $\mu R \ll 1$ でなければならず、また $\mu \sim \sqrt{R/W}$ であるから、長波展開の有効性は

$$R \ll W^{1/3} \quad (4.13)$$

の場合に限られることが分かる。制約条件 (4.13) は第3章で振動子の例題に出てきた制約条件 (3.13) を思わせる。実際、両者は似たような方法で対処することができるのである。

液膜流の波動では、非線形性・分散性・波の成長・波の安定化の4つがすべて重要になるから、これらをすべて含むような方程式、すなわち Benney-Kawahara 方程式 (1.1) かそれに似た方程式を合理的に導出できれば良いと思われる。しかし、 μR が小さくない場合、流量 Q の展開 (4.8) を途中で打ち切ることにはできないので、方程式 (1.1) を c_4 で終わりにして良い理由はなく、無限個の高次項を含めなければならない。説明のためのモデルとして、非線形項を無視し、また線形項の係数をすべて +1 とした方程式を考えよう：

$$\partial_t h + \partial_x h + \partial_x^2 h + \partial_x^3 h + \partial_x^4 h + \cdots + \partial_x^n h + \cdots = 0. \quad (4.14)$$

微分演算子 ∂_x はそもそも有界でないから、左辺の無限級数はこのままでは発散し、意味をなさない。しかし、方程式 (4.14) に $-\partial_x$ を作用させ、これをもとの方程式 (4.14) に加えると、有限個の項から成る方程式が得られる：

$$\begin{array}{r} \partial_t h + \partial_x h + \partial_x^2 h + \partial_x^3 h + \cdots = 0 \\ -) \quad \partial_t \partial_x h + \partial_x^2 h + \partial_x^3 h + \cdots = 0 \\ \hline (1 - \partial_x) \partial_t h + \partial_x h = 0. \end{array} \quad (4.15)$$

この手続きは、いわば微分演算子に関する Padé 近似である。

方程式 (4.15) は Klein-Gordon 方程式であり、Bessel 関数を用いて基本解を書き下すことができる。この結果は、方程式 (4.14) を有限項で切断した結果とは定性的に異なることに注意しよう。

4.5 液膜流の正則化方程式

微分演算子に関する Padé 近似というアイデアを、液膜流の長波展開 (4.9) に応用したい。そこで、未定の関数 $A^{(1)}(h), A^{(2)}(h)$ を用いて

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \hat{L}Q = S_0 + \mu S_1 + \mu^2 S_2 + \cdots \quad (4.16a)$$

$$\hat{L} \stackrel{\text{def}}{=} 1 + A^{(1)}\partial_x + A^{(2)}\partial_x^2 = 1 + \mu A^{(1)}\partial_{x_1} + \mu^2 A^{(2)}\partial_{x_1}^2 \quad (4.16b)$$

と置く ($\partial_x = \mu \partial_{x_1}$)。Padé 近似の発想にしたがい、近似的に S_2 が消えるように $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ を決めよう。液膜厚さを

$$h = \bar{h} + \phi, \quad |\partial_{x_1} \bar{h}| \ll |\partial_{x_1} \phi| \sim |\phi| \sim \epsilon \ll 1$$

のように振幅展開すると

$$S_2 \approx \tilde{W} \left(\frac{40}{63} Rh^7 + \frac{2}{3} h^3 A^{(1)} \right) \partial_{x_1}^4 \phi + \left[\frac{32}{63} R^2 h^{10} - \frac{40}{63} Rh^7 \cot \alpha + 2h^4 + A^{(1)} \left(\frac{8}{15} Rh^6 - \frac{2}{3} h^3 \cot \alpha \right) + 2h^2 A^{(2)} \right] \partial_{x_1}^2 \phi$$

と評価できるので、この項をゼロにするには

$$A^{(1)} = -\frac{20}{21} Rh^4, \quad A^{(2)} = -h^2$$

のように選べばよい。こうして $\hat{L}$ が定まり、 $S = \hat{L}Q$ も

$$S = \frac{2}{3} \left[h^3 - \frac{72}{35} Rh^6 \partial_x h - (\cot \alpha) h^3 \partial_x h + Wh^3 \partial_x^3 h \right]$$

のように定まる。最後に、関係式 (4.3b) を用いて Q を消去する:

$$\partial_t h - \frac{4}{21} R \partial_x \partial_t (h^5) - \partial_x (h^2 \partial_x \partial_t h) + \frac{2}{3} \partial_x \left[h^3 - \partial_x \left(\frac{\cot \alpha}{4} h^4 + \frac{72}{245} Rh^7 \right) + Wh^3 \partial_x^3 h \right] = 0. \quad (4.17)$$

式 (4.17) が、液膜流の正則化方程式である。

4.6 正則化方程式の検証および意味

正則化方程式 (4.17) の定常進行解の分岐図を求め、長波展開の結果と比較したものを、図 3 に示す。傾斜角 ($\alpha = \pi/2$) と Weber 数 ($W = 90$) を固定し、波の速度 c を Reynolds 数 R に対してプロットしてある。比較対象として、Gjevik による式 (4.10) と、Nakaya による高次の式 [40, 式 (27)] との両方を示している。

臨界 Reynolds 数 (ここでは $R_c = 0$) の近くでは、3つの方程式の結果はほとんど全く同じである。しかし、 $R = 1.5$ を超えると、挙動に違いが生じる。Gjevik の長波方程式では、 $R = 2.2099$ (×で示す点) で サドル・ノード分岐を生じ、分枝は別の分枝 (ここでは示していない) と出会って消滅する。Nakaya の方程式もまた $R = 1.5843$ で同様の分岐を生じる。一方、正則化方程式 (4.17) はそのような分岐を全く示さない。すなわち、長波展開の破綻は、少なくとも定性的には回避されていることが分かる。

式の形のうえでの正則化方程式 (4.17) の特徴は、 $\partial_x \partial_t h$ などの交差微分項を含むことである。このような方程式の可能性は、Indireskumar & Frenkel [39] によって指摘されているが、具体的な係数の決定や Benney 方程式との比較はおこなわれていない。正則化長

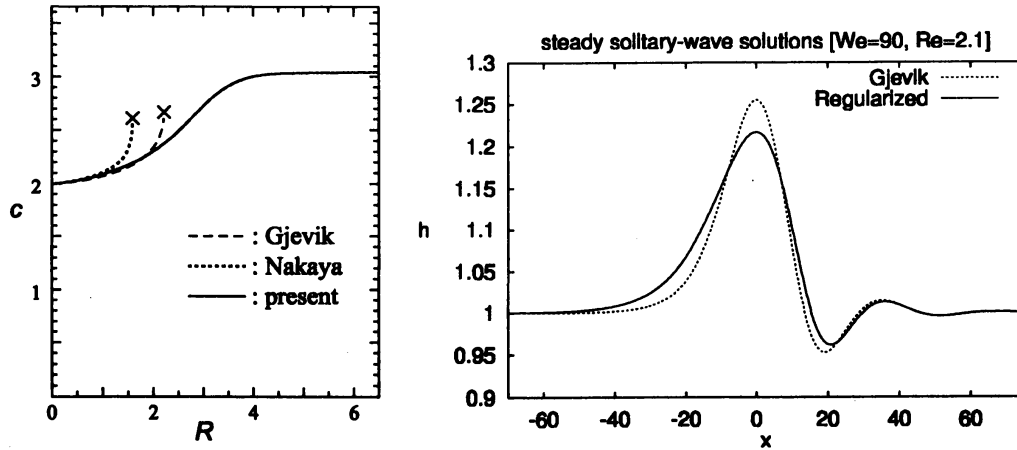


図 3: 定常進行孤立波解に関する、Benney の長波展開と正則化長波展開の結果の比較。左は分岐図、右は $R = 2.1$ での表面波の波形。パラメータは $W = 90$, $\cot \alpha = 0$ とした。

波展開の技術的な要点は、高次の長波展開との整合性を要求することによって交差微分項の係数を決定するところにあると言える。

正則化長波展開は、Benney の長波展開の制約条件を完全に取り除くわけではないが、少なくとも制約を緩和する。Benney の方法が適用できるためには、条件 (4.13) により、

$$\delta_* \stackrel{\text{def}}{=} R/W^{1/3}$$

が $\delta_* \ll 1$ を満たさなければならない。正則化により、収束が加速され、この制約条件が緩められる。すなわち、 $\delta_* \lesssim 1$ であれば、正則化方程式 (4.17) は定量的に正しい結果を与える。このとき、孤立波の裾の長さは、(W を固定すると) $R^{-1/2}$ に比例する。

物理的には、正則化方程式 (4.17) は、慣性による時間遅れの効果を空間的な勾配を通じて取り込んだ式になっている。正則化演算子 $\hat{L}$ の Green 関数は R 程度の長さの裾をもち、したがって、 $\delta_* \gtrsim 1$ では孤立波の裾の長さは R に比例して増大する。裾の長さに関する限り、この結果は、より現実に近いモデルの結果 [41] と整合している。ただし、 $\delta_* \gtrsim 1$ では波の振幅や速度に関する定量的な妥当性は失われる。これは 1 モードの方程式の限界であると考えられる。

4.7 振幅展開による簡単化

数学的な見通しを良くするために、特に表面波の振幅が小さい場合に着目し、正則化方程式 (4.17) を単純化することを考えよう。これは、ちょうど Benney-Gjevik 方程式 (4.10) を振幅展開して KS 方程式 (4.11) を得る手続きに対応する。

まず、式 (4.17) に $h = 1 + \eta$ を代入し、最低次の非線形性を残すと、

$$\left(1 - \frac{20}{21}R\partial_x - \partial_x^2\right)\partial_t\eta + \frac{2}{3}\partial_x \left[3\eta + 3\eta^2 - \left(\cot\alpha + \frac{72}{35}R\right)\partial_x\eta + W\partial_x^3\eta\right] = 0 \quad (4.18)$$

となる。簡単化のため、垂直壁を仮定し、さらに独立変数を $W^{-1/3}$ でスケールして

$$\partial_x = (A_0 W)^{-1/3} \partial_\xi, \quad \partial_t = B_0 (A_0 W)^{-1/3} (\partial_\tau - C_0 \partial_\xi) \quad (4.19)$$

と置く。ここで A_0, B_0, C_0 は 1 程度の大きさの定数であり、方程式の係数になるべく簡単になるように決定する。式 (4.19) により、正則化演算子の部分は

$$1 - \frac{20}{21} R \partial_x - \partial_x^2 = 1 - \delta \partial_\xi - (A_0 W)^{-2/3} \partial_\xi^2, \quad \delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{20}{21} R (A_0 W)^{-1/3} \quad (4.20)$$

と書き直せる。表面張力が非常に大きい ($W \gg 1$) と仮定し、正則化演算子 (4.20) の 2 階微分の項を無視することにすれば、方程式 (4.18) は

$$(1 - \delta \partial_\xi) (\partial_\tau - C_0 \partial_\xi) \eta + B_0^{-1} \partial_\xi \left[2\eta + 2\eta^2 - \frac{36}{25} \delta \partial_\xi \eta + \frac{2}{3} A_0^{-3} \partial_\xi^3 \eta \right] = 0$$

と書き直せる。左辺を展開して、 $\partial_\xi^2 \eta$ の係数がゼロになるように C_0 を決定し、さらに余計な係数になるべく現われないように A_0, B_0 を決める。結果は

$$A_0 = \frac{25}{21}, \quad B_0 = \frac{14}{25}, \quad C_0 = \frac{18}{7}$$

となる。さらに $(25/7)\eta = H$ と置いて、最終的に次の方程式を得る:

$$(1 - \delta \partial_\xi) \partial_\tau H + \partial_\xi (H + H^2 + \partial_\xi^3 H) = 0. \quad (4.21)$$

式 (4.21) の定常進行解は、KS 方程式の定常進行解を簡単な式で変数変換すれば得られる。しかし、式 (4.21) の非定常解は、KS 方程式とは異なる挙動を示す可能性がある。その理由は、KS 方程式の解の長さスケールは

$$(R - R_c) \partial_x^2 \eta \sim W \partial_x^4 \eta \quad (4.22)$$

というつりあいによって一定の値に固定されているのに対し、式 (4.21) について同様のつりあいを考えると、局所的な位相速度を c として

$$-\delta \partial_\xi \partial_\tau H = c \delta \partial_\xi^2 H \sim \partial_\xi^4 H \quad (4.23)$$

なので、 c の変化によって長さスケールを変える可能性が残されているからである。式 (4.21) の非定常解の挙動を調べ、KS 方程式との違いを明らかにすることに興味を持たれる。

5 粉体流動層

正則化長波展開の発想は、そもそも 1 次元の粉体流動層のモデルに端を発する [3, 11]。1 次元系を扱っているかぎり、縮約としての利点は少ないが、液膜流との比較や将来的な 2 次元系への拡張を念頭において、粉体流動層における正則化方程式について簡単に述べる。

5.1 粉体流動層の現象論的方程式

1次元粉体流動層については、第2章で簡単に説明した。通常の流体と違って、粉体系の一般的な基礎方程式は確立されていない。また、記述の立場としても、粒子描像・連続体描像などさまざまな見方がある。しかし、いずれにせよ、1次元流動層に対する最低次近似は「粉体相の速度は密度の関数である」という式になり、交通流と同じような“最適速度モデル”に帰着する。これは、式(2.6)で説明したような体積力のつりあいによる。

粒子密度(体積分率)を ϕ 、気流の速度を u 、粒子の(局所平均)速度を v とする。連続の式および系の1次元性から、 $\phi v + (1 - \phi)u$ は z に関して一定でなければならないので、これを V とおき、式(2.6)を

$$-\rho g \phi + \tilde{I}(\phi) (V - v) = 0 \quad (5.1)$$

のように書き直す[10]。こうして ϕ と v が関係づけられ、“最適速度モデル”が出てくる。必ずしも一様ではない1次元粉体流動相の運動方程式は、たとえば

$$\partial_t \phi + \partial_x (\phi v) = 0, \quad (5.2a)$$

$$\rho \phi (\partial_t + v \partial_x) v = -\rho g \phi + \tilde{I}(\phi) (V - v) + \partial_x \left\{ -\tilde{P}(\phi) + \tilde{\eta}(\phi) \partial_x v \right\} \quad (5.2b)$$

のように書ける。方程式(5.2b)は、最適速度モデル的な体積力のつりあい(5.1)に、Navier-Stokes方程式に類似した微分項(応力と慣性)を加えた形をしている。

5.2 1次元粉体流動層の正則化方程式

さて、方程式(5.2)はじつは正則化方程式の形に書き直せることを示す。速度の代わりに流束 $J = \phi v$ を変数とすることを考え、式(5.2b)の v を J/ϕ でおきかえる。つぎに、微分を含む項はすべて線形化してしまおう。その結果、

$$\partial_t \phi + \partial_x J = 0 \quad (5.3a)$$

$$\tau \partial_t J = f(\phi) - J - \tau b^2 \partial_x \phi + \nu \partial_x^2 J \quad (5.3b)$$

のような方程式が得られる。運動方程式(5.3b)は、流束 J が、密度の関数 f に対して、いくらか空間的・時間的な遅れを伴って追従することを示している。流束 J を変数にとったおかげで、連続の式は線形になり、また“粘性項”の係数も定数で近似できる形になっている。非線形性が陽に残っているのは $f(\phi)$ だけである。なお、 $\tilde{I}(\phi)$ あるいは $\zeta(\phi)$ については実験式が知られている[12]ので、 $f(\phi)$ の関数形が決定できることに注意しよう。

方程式(5.3b)は時間微分項を持つため、方程式系(5.3)全体としては正方向に向かう波と負方向に向かう波のふたつがあることになる。しかし、負方向に向かう波は追従モードなので、これを系の記述から排除したい。そのために、運動方程式(5.3b)のなかの時間微分項を以下のように処理する。

まず、式(5.3)の最低次近似は

$$(\partial_t + a \partial_x) \phi \simeq 0, \quad a \stackrel{\text{def}}{=} f'(\phi) \quad (5.4)$$

で与えられる。このことを用いて、 J の時間微分項を

$$\tau \partial_t J = -\tau a \partial_x J + \tau (\partial_t + a \partial_x) J \quad (5.5)$$

と書き換える。特性線にそったゆるやかな変化 $(\partial_t + a \partial_x)$ は、次のように近似してよい:

$$(\partial_t + a \partial_x) J \approx (\partial_t + a \partial_x) f(\phi) = a(\partial_t + a \partial_x) \phi = -a \partial_x J + a^2 \partial_x \phi. \quad (5.6)$$

臨界の近くを考えて $a = b = \text{const.}$ と近似すれば、結局、慣性項が

$$\tau \partial_t J \approx -2\tau b \partial_x J + \tau b^2 \partial_x \phi \quad (5.7)$$

のように空間微分で表示される。これを式 (5.3b) に代入し、適当に変数変換すると

$$\partial_t \phi + \partial_x J = 0 \quad (5.8a)$$

$$(1 - \gamma \partial_x - \partial_x^2) J = f(\phi) - \gamma \partial_x \phi \quad (5.8b)$$

のような式が得られる。以上が粉体流動相に対する正則化方程式の発見法的導出である。

液膜流の場合に正則化方程式 (4.17) を Navier-Stokes 方程式から導出したことに比べると、方程式系 (5.2) から式 (5.8) を導出したことは、あまり大幅な単純化になっていない。ここでの単純化の本質的内容は、縮約というよりも、時間微分に関する1階化である。定常進行解を考えている限り、あまりメリットはないが、非定常な波の発展を考える際にはそれなりの有用性があるものと考えられる。

5.3 Whitham の波動階層

粉体流動層の方程式で、微小振幅波を仮定し、さらに速度場を消去して、密度波の方程式を導くことができる [12, §4.2]。粉体流動層の密度波の方程式の基本的な構造は、

$$\gamma(\partial_t + a \partial_x) \phi + (\partial_t^2 - b^2 \nabla^2) \phi = 0 \quad (5.9)$$

という方程式で与えられる。1次元の場合は $\nabla^2 = \partial_z^2$, 2次元の場合は $\nabla^2 = \partial_z^2 + \partial_x^2$ である。方程式 (5.9) を適当に書き直すと、いわゆる電信方程式に帰着する。

粉体流動層に限らず、散逸系の運動学的波動に慣性を取り込むと一般に式 (5.9) と同様の方程式が現われることが、Whitham [1, §10] によって指摘されている。簡単化のため、1次元の場合に限って考えよう。一様状態が安定であるための条件は、波動階層条件

$$|a| < b \quad (5.10)$$

で与えられる。そこで、波動階層条件が崩れる臨界の近傍、すなわち a と b がほぼ等しいという状況を想定しよう。このとき、方程式 (5.9) は

$$\begin{aligned} (\partial_t - b \partial_x + \gamma)(\partial_t + b \partial_x) \phi &= -a^2 \delta_0^2 \partial_x^2 \phi \\ \delta_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{a^2 - b^2} \sim \sqrt{2a(a-b)} \end{aligned} \quad (5.11)$$

と書き直せる。このことは、方程式 (5.9) が、 δ_0 程度の余計な項を別にすれば“因数分解”できるということを示している。ここで、長波極限での見積もり

$$\partial_t \phi \simeq -a \partial_z \phi$$

を利用すると、式 (5.11) は

$$\hat{L}(\partial_t + a \partial_z) \phi = -a^2 \delta_0^2 \partial_z^2 \phi, \quad \hat{L} = \gamma - 2a \partial_z \quad (5.12)$$

と書き直される。この式の構造は、本質的には正則化方程式と同じである。すなわち、正則化演算子による慣性項の扱いというのは、因数分解によって従属モードを分離して消去するのと同じようなことであると考えられる。

5.4 2次元電信方程式の1階化

密度波の式 (5.9) に戻り、2次元の場合に従属モードを消去する問題を考える。1次元の場合の式 (5.11) からの類推により、因数分解に持ち込んでモードを分離することにしよう。すなわち、Dirac が Klein-Gordon 方程式に対しておこなったのと同じことを、2次元電信方程式に対して考えることになる。

方程式 (5.9) に対応する1階の方程式を

$$(\partial_t + A_0 + A_1 \partial_z + A_2 \partial_x) \phi = 0 \quad (5.13)$$

と仮定する。式 (5.13) に $(\partial_t + B_0 + B_1 \partial_z + B_2 \partial_x)$ を作用させ、その結果が式 (5.9) と一致することを要請しよう。容易に分かるように

$$B_0 = \gamma - A_0, \quad B_1 = -A_1, \quad B_2 = -A_2$$

である。また、 A_0, A_1, A_2 が満たすべき条件式は次のようになる：

$$\begin{aligned} A_1^2 = A_2^2 = b^2, \quad A_1 A_2 + A_2 A_1 = 0, \\ (\gamma - A_0) A_0 = 0, \quad (\gamma - A_0) A_1 - A_1 A_0 = \gamma a, \quad (\gamma - A_0) A_2 - A_2 A_0 = 0. \end{aligned}$$

これらの条件は、2次の正方行列を用いて満たすことができる。たとえば

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} a & +\sqrt{a^2 - b^2} \\ -\sqrt{a^2 - b^2} & -a \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

とすれば良い。したがって、方程式 (5.9) は次のように書き直せる：

$$(\partial_t + a \partial_z) \phi_+ + b(\delta_0 \partial_z + \partial_x) \phi_- = 0 \quad (5.15a)$$

$$(\partial_t - a \partial_z + \gamma) \phi_- + b(-\delta_0 \partial_z + \partial_x) \phi_+ = 0 \quad (5.15b)$$

あとは ϕ_- のモードを消去するため、式 (5.15b) に $(\partial_t + a \partial_z) \phi_- \simeq 0$ を代入し、さらに $a \simeq b$ を考慮して、式 (5.12) に相当する式

$$\hat{L}(\partial_t + a \partial_z) \phi = a^2 (-\delta_0^2 \partial_z^2 + \partial_x^2) \phi, \quad \hat{L} = \gamma - 2a \partial_z \quad (5.16)$$

を得る。式 (5.16) の線形分散関係は、式 (5.9) から直接計算した線形分散関係とかなり良く一致する。

6 まとめ

液膜流を中心に、運動学的波動における正則化方程式について説明した。追従モードを消去して方程式を簡単化する際に、追従が不完全だと級数展開が収束しないので、それを Padé 近似によって収束させるというのが、この方法の要点である。液膜流以外の系への応用や、複数の主要モードを含む場合への拡張が、今後の課題となる。

参考文献

- [1] G. B. Whitham. Linear and nonlinear waves. Wiley, 1974.
- [2] Ooshida Takeshi. Surface equation of falling film flows with moderate Reynolds number and large but finite Weber number. *Physics of Fluids*, Vol. 11, pp. 3247–3269, 1999.
- [3] Ooshida T. & T. Kawahara. Generic weakly-nonlinear model equation for density waves in two-phase fluids. *Phys. Rev. E*, Vol. 56, p. 511, 1997.
- [4] H.-C. Chang & E. Demekhin. *Complex Wave Dynamics on Thin Films*. Elsevier, 2002.
- [5] 川原 琢治. ソリトンからカオスへ. 朝倉書店, 東京, 1993.
- [6] S. P. Lin. Finite amplitude sideband stability of a viscous film. *J. Fluid Mech.*, Vol. 63, p. 417, 1974.
- [7] D. H. Peregrine. Calculations of the development of an undular bore. *J. Fluid Mech.*, Vol. 25, p. 321, 1966.
- [8] T. B. Benjamin, J. L. Bona & J. J. Mahony. Model equation for long waves in nonlinear dispersive systems. *Phil. Trans. R. Soc. London*, Vol. A272, p. 47, 1972.
- [9] 太田 隆夫. 非平衡系の物理学. 裳華房, 2000.
- [10] T. S. Komatsu & H. Hayakawa. Nonlinear waves in fluidized beds. *Phys. Lett. A*, Vol. 183, p. 56, 1993.
- [11] OOSHIDA Takeshi. フラックス-密度追随方程式による管内粒子流の記述. 日本流体力学会年会'96 講演論文集, 1996.
- [12] R. Jackson. *The Dynamics of Fluidized Particles*. Cambridge Univ. Press, 2000.
- [13] 井田 喜明. マグマ・ソリトン. ながれ (日本流体力学会誌), Vol. 6, p. 150, 1987.
- [14] D. R. Scott & D. J. Stevenson. Magma solitons. *Geophys. Res. Lett.*, Vol. 11, p. 1161, 1984.
- [15] D. R. Scott & D. J. Stevenson. Magma ascent by porous flow. *J. Geophys. Res.*, Vol. 91, p. 9283, 1986.
- [16] D. R. Scott, D. J. Stevenson & J. A. Whitehead Jr. Observations of solitary waves in a viscously deformable pipe. *Nature*, Vol. 319, pp. 759–761, 1986.
- [17] V. Barcion & F. M. Richter. Nonlinear waves in compacting media. *J. Fluid Mech.*, Vol. 164, p. 429, 1986.
- [18] T. Kawahara. Chaotic behavior of waves in two-phase system. In S. Morioka & L. van Wijngaarden, editors, *IUTAM Symposium on Waves in Liquid/Gas and Liquid/Vapour Two-Phase Systems*. IUTAM, Kluwer, 1994.
- [19] P. L. Kapitza. Wave flow of thin viscous liquid films. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, Vol. 18, p. 3, 1948.
- [20] J. Liu, J. D. Paul & J. P. Gollub. Measurements of the primary instabilities of film flows. *J. Fluid Mech.*, Vol. 250, p. 69, 1993.
- [21] J. Liu & J. P. Gollub. Solitary wave dynamics of film flows. *Physics of Fluids*, Vol. 6, p. 1702, 1994.
- [22] D. J. Benney. Long waves on liquid films. *J. Math. Phys.*, Vol. 45, p. 150, 1966.
- [23] B. Gjevik. Occurrence of finite-amplitude surface waves on falling liquid films. *Physics of Fluids*, Vol. 13, p. 1918, 1970.
- [24] C. M. Bender & S. A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers*. McGraw Hill, 1978.
- [25] 広田 良吾. 直接法によるソリトンの数値. 岩波書店, 東京, 1992.

- [26] H. Schlichting & K. Gersten. *Boundary Layer Theory*. Springer-Verlag, 8th edition, 2000.
- [27] L. Landau & Y. Lifshits. *流体力学 1*. 東京図書, 1970. 竹内 均 訳.
- [28] T. B. Benjamin. Wave formation in laminar flow down an inclined plane. *J. Fluid Mech.*, Vol. 2, p. 554, 1957.
- [29] C.-S. Yih. Stability of liquid flow down an inclined plane. *Physics of Fluids*, Vol. 6, p. 321, 1963.
- [30] G. J. de Bruin. Stability of a layer of liquid flowing down an inclined plane. *J. of Eng. Math.*, Vol. 8, p. 259, 1974.
- [31] J. M. Floryan, S. H. Davis & R. E. Kelly. Instability of a liquid film flowing down a slightly inclined plane. *Physics of Fluids*, Vol. 30, p. 983, 1987.
- [32] B. Gjevik. Spatially varying finite-amplitude wave trains on falling liquid films. *Acta Polytech. Scand. Mech. Eng.*, Vol. 61, p. 1, 1971.
- [33] A. Pumir, P. Manneville & Y. Pomeau. On solitary waves running down an inclined plane. *J. Fluid Mech.*, Vol. 135, p. 27, 1983.
- [34] T. R. Salamon, R. C. Armstrong & R. A. Brown. Traveling waves on vertical films: Numerical analysis using the finite element method. *Physics of Fluids*, Vol. 6, p. 2202, 1994.
- [35] V. Ya. Shkadov. Wave conditions of a flow in a thin viscous liquid layer under the action of gravitational force. *Izv. Akad. Nauk. SSSR, Mekh. Zhid. i Gaza*, Vol. 1, p. 43, 1967.
- [36] A. J. Roberts. Low-dimensional models of thin film fluid dynamics. *Phys. Lett. A*, Vol. 212, p. 63, 1996.
- [37] C. Ruyer-Quil & P. Manneville. Modeling film flows down inclined planes. *Eur. Phys. J. B*, Vol. 6, p. 277, 1998.
- [38] L. T. Nguyen & V. Balakotaiah. Modeling and experimental studies of wave evolution on free falling viscous films. *Physics of Fluids*, Vol. 12, pp. 2236–2256, 2000.
- [39] K. Indireskumar & A. Frenkel. Spatiotemporal patterns in a 3-d film flow. In Y. Renardy, et al., editors, *Advances in Multi-Fluid Flows*, pp. 288–309, Seattle, 1995. AMS-IMS-SIAM Summer Research Conference.
- [40] C. Nakaya. Long waves on a thin fluid layer flowing down an inclined plane. *Physics of Fluids*, Vol. 18, p. 1407, 1975.
- [41] H.-C. Chang, E. A. Demekhin & E. Kailaidin. Interaction dynamics of solitary waves on a falling film. *J. Fluid Mech.*, Vol. 294, p. 123, 1995.