

Geometric Mean and Norm Schwarz Inequality

北海道大学（名誉教授） 安藤 毅 (Tsuyoshi Ando)

Hokkaido University (Emeritus)

Email: ando@es.hokudai.ac.jp

この講演の内容は Annals of Functional Analysis [1] に出版される予定なので、以下では要約にとどめる。

1. Introduction Schwarz の不等式は $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ と $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ にたいして

$$\left| \sum_{j=1}^n \xi_j \overline{\eta_j} \right| \leq \sqrt{\left\{ \sum_{j=1}^n |\xi_j|^2 \right\} \cdot \left\{ \sum_{j=1}^n |\eta_j|^2 \right\}}$$

主張するものである。これは 2×2 行列の positivity として捉えることができる

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \xi_j \overline{\xi_j} & \sum_{j=1}^n \xi_j \overline{\eta_j} \\ \sum_{j=1}^n \eta_j \overline{\xi_j} & \sum_{j=1}^n \eta_j \overline{\eta_j} \end{bmatrix} \geq 0.$$

この positivity は Hilbert space $\mathcal{H}$ 上の bounded linear operator の組 $\{X_1, \dots, X_n\}$ と $\{Y_1, \dots, Y_n\}$ に対しても成り立つ：

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n X_j X_j^* & \sum_{j=1}^n X_j Y_j^* \\ \sum_{j=1}^n Y_j X_j^* & \sum_{j=1}^n Y_j Y_j^* \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} X_j \\ Y_j \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_j \\ Y_j \end{bmatrix}^* \geq 0.$$

これから

$$\left\| \sum_{j=1}^n X_j Y_j^* \right\| \leq \sqrt{\left\| \sum_{j=1}^n X_j X_j^* \right\| \cdot \left\| \sum_{j=1}^n Y_j Y_j^* \right\|}$$

が出る。ここで $\|\cdot\|$ は operator norm である。

われわれはこれを 2×2 operator matrix に関しての一般的な関係

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \implies \sqrt{\|A\| \cdot \|C\|} \geq \|B\|$$

と捉えよう。一方 $A, C \geq 0$ にたいしては一般に geometric mean $A \sharp C$ が定義されており

$$\sqrt{\|A\| \cdot \|C\|} \geq \|A \sharp C\|$$

となっている。

この講演では、 A, B, C に、または単独に B に、如何なる条件があれば

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \implies \|A \sharp C\| \geq \|B\|$$

が成り立つかを考察する。右側の不等式を Norm Schwarz inequality と言おう。

2. Operator matrix と geometric mean $A, B, C, \dots$ は Hilbert space $\mathcal{H}$ の bounded linear operator とする. 特に I は identity operator である. 以下はよく知られた事実である.

Lemma 1. (参照 [2, Chapter 1]) 以下の性質は同値である.

1. $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0$,
2. $\begin{bmatrix} C & B^* \\ B & A \end{bmatrix} \geq 0$,
3. $A, C \geq 0$ で $B = A^{1/2}WC^{1/2} \quad \exists \quad \|W\| \leq 1$,
4. $A \geq 0, C \geq B^*(A + \epsilon I)^{-1}B \quad \forall \epsilon > 0$, ここで $A > 0$ のときは $B^*(A + \epsilon I)^{-1}B$ を単に $B^*A^{-1}B$ で置き換えてよい.

$A, C > 0$ の geometric mean $A \sharp C$ は

$$A \sharp C := A^{1/2} \cdot (A^{-1/2}CA^{-1/2})^{1/2} \cdot A^{1/2}$$

で定義される. この形からは見通せないが geometric mean は A, C に関して symmetric になる. 更に以下のような性質がある.

Lemma 2. (参照 [2, Chapter 3]) $A, C > 0$ の geometric mean は以下のような性質を持つ.

1. $A \sharp C = C \sharp A$,
2. $AC = CA \implies A \sharp C = (AC)^{1/2}$,
3. $A^{-1} \sharp C^{-1} = (A \sharp C)^{-1}$,
4. $(\alpha A) \sharp (\beta C) = \sqrt{\alpha\beta}(A \sharp C) \quad \forall \alpha, \beta > 0$,
5. $A \mapsto A \sharp C$ は order preserving,
6. $A \sharp C = \max \left\{ X \geq 0; \begin{bmatrix} A & X \\ X & C \end{bmatrix} \geq 0 \right\}$,
7. $(X^*AX) \sharp (X^*CX) \geq X^*(A \sharp C)X \quad \forall X$.

(5) の単調性より, 一般の $A, C \geq 0$ に対しては

$$A \sharp C := \lim_{\epsilon \downarrow 0} (A + \epsilon I) \sharp (C + \epsilon I)$$

で定義すると

$$\|A \sharp C\| = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \|(A + \epsilon I) \sharp (C + \epsilon I)\|.$$

また

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \iff \begin{bmatrix} A + \epsilon I & B \\ B^* & C + \epsilon I \end{bmatrix} \geq 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

である.

このことから, Norm Schwarz inequality の考察の範囲では $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0$ と書いたときは, $A, C > 0$ を仮定しても一般性を失われない. Lemma 1 より

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \implies C \geq B^* A^{-1} B, \quad \begin{bmatrix} A & B \\ B^* & B^* A^{-1} B \end{bmatrix} \geq 0$$

であり, また geometric mean の定義より

$$A \sharp (B^* A^{-1} B) = A^{1/2} \cdot |A^{-1/2} B A^{-1/2}| \cdot A^{1/2}$$

となる. ここで X の modulus $|X|$ は $|X| := (X^* X)^{1/2}$ で定義される. これから B に関する条件

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \implies \|A \sharp C\| \geq \|B\| \quad (\dagger)$$

は

$$\|A^{1/2} \cdot |A^{-1/2} B A^{-1/2}| \cdot A^{1/2}\| \geq \|B\| \quad \forall A > 0. \quad (\ddagger)$$

という条件と同じ事になる.

3. $(\ddagger)$ のための必要条件 一般に次ぎ成りたつ.

Lemma 3. $\|A^{-1/2} B A^{1/2}\| \geq \|A^{1/2} \cdot |A^{-1/2} B A^{-1/2}| \cdot A^{1/2}\| \quad \forall A > 0, B.$

ここで operator X の spectral radius $r(X)$ は norm を使って, 2つの立場からの記述が可能である: ([3, pages 48, 82])

$$r(X) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|X^n\|^{1/n} = \inf\{\|A^{-1} X A\|; A > 0\}.$$

これから直ちに

$$r(X) \leq \|X\|, \quad r(XY) = r(YX) \quad \forall X, Y$$

が判る. $r(X) = \|X\|$ な X を normaloid という. selfadjoint また normal operator は normaloid である. (本によっては $r(X) = \sup\{|\langle a | X a \rangle|; \|a\| = 1, a \in \mathcal{H}\}$ のものを normaloid と呼ぶものもある.)

Theorem 4. B に対して $(\ddagger)$ が成り立てば, B は normaloid である.

これは $(\ddagger)$ と Lemma 3 から

$$\|A^{-1/2} B A^{1/2}\| \geq \|A^{1/2} \cdot |A^{-1/2} B A^{-1/2}| \cdot A^{1/2}\| \geq \|B\|$$

となっているからである.

この逆としては

Theorem 5. B が ∇ normaloid のときは, $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \implies \|A^{1/2}C^{1/2}\| \geq \|B\|$.

これは Lemma 1 を使って

$$\begin{aligned} \|B\| &= r(B) = r(A^{1/2}WC^{1/2}) = r(WC^{1/2}A^{1/2}) \\ &\leq \|C^{1/2}A^{1/2}\| = \|A^{1/2}C^{1/2}\| \end{aligned}$$

より判る.

3. 充分条件 (†) までも行かないが, A, B, C への条件で $\|A\sharp C\| \geq \|B\|$ を保証するものを考えよう.

Lemma 6. $\begin{bmatrix} A_j & B \\ B^* & C_j \end{bmatrix} \geq 0 \quad (j = 1, 2) \implies \begin{bmatrix} A_1\sharp A_2 & B \\ B^* & C_1\sharp C_2 \end{bmatrix} \geq 0$.

これは Lemma 1 より $B^*A_1^{-1}B \leq C_j \quad (j = 1, 2)$ であるから Lemma 2

$$\begin{aligned} B^*(A_1\sharp A_2)^{-1}B &= (B^*A_1^{-1}\sharp A_2^{-1})B \\ &\leq (B^*A_1^{-1}B)\sharp(B^*A_2^{-1}B) \leq C_1\sharp C_2 \end{aligned}$$

から出る.

これから直ちに判ることは, 一般に次が成り立つ:

$$\sqrt{\|A\sharp(B^*A^{-1}B)\| \cdot \|A\sharp(BA^{-1}B^*)\|} \geq \|B\| \quad \forall A > 0, B.$$

Lemma 6 は次ぎの形で使用されるのが重要である.

Theorem 7. $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0, \begin{bmatrix} A & B^* \\ B & C \end{bmatrix} \geq 0 \implies \|A\sharp C\| \geq \|B\|$.

これは, 2 番目の不等式は $\begin{bmatrix} C & B \\ B^* & A \end{bmatrix} \geq 0$ となるからである.

B が selfadjoint のときは $B = B^*$ なので Theorem 7 が適用できるが, Lemma 6 を直接使えば, Lemma 2 の $B \geq 0$ のときの拡張として次ぎがでる.

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} \geq 0, B = B^* \implies \begin{bmatrix} A\sharp C & B \\ B & A\sharp C \end{bmatrix} \geq 0 \implies A\sharp C \geq \pm B.$$

背理法を使うと次もすぐ判る.

Theorem 8. $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0, \alpha B$ が ∇ unitary $\exists \alpha > 0 \implies \|A\sharp C\| \geq \|B\|$.

最後に A, B, C の相互条件で $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \implies \|A\sharp C\| \geq \|B\|$ を保証するものを挙げよう.

Theorem 9. 以下の条件

1. $AB = BA$,
2. $B^*A^{-1}B = BA^{-1}B^*$,
3. $C = \alpha A \quad \exists \alpha > 0$

の中の1つが満たされれば, $\begin{bmatrix} A & B \\ B^* & C \end{bmatrix} \geq 0 \implies \|A\sharp C\| \geq \|B\|$.

4. Normal operator は $(\dagger)$ を満たすか? 前節の考察では selfadjoint operator や unitary operator は $(\dagger)$ を満たすことが判った, それでは normal operator はどうか問題になる. ここでは $\dim(\mathcal{H}) = n < \infty$ すなわち $A, B, C, \dots \in \mathbb{M}_n$ の場合を考察しよう.

$D := A^{1/2} \cdot |A^{-1/2}BA^{-1/2}| \cdot A^{1/2}$ として $\|D\| \geq \|B\|$ となるかが問題である.

B と D の関係は $DA^{-1/2}D = B^*A^{-1}B$ であるので, $S := A^{-1}$ として

$$B \text{ normal, } S > 0, D \geq 0, DSD = B^*SB \xrightarrow{?} \|D\| \geq \|B\|$$

が問題である. われわれは brute force で $n = 2$ のときは肯定的に解決することができた.

Theorem 10. normal $B \in \mathbb{M}_2$ は $(\dagger)$ と同値な次ぎを満たす:

$$0 \leq S, D \in \mathbb{M}_2, DSD = B^*SB \implies \|D\| \geq \|B\|. \quad (\text{b})$$

しかしここでの方法は $n \geq 3$ の場合には適用できないので, 別の路を探そう. 次ぎのよく知られた事実を挙げておこう.

Lemma 11. $X \in \mathbb{M}_n$ に関して以下の性質は同値である.

1. X は unitary に similar, すなわち $T^{-1}XT = U$ unitary $\exists T$ invertible,
2. X は unitary に positively similar, すなわち $T^{-1}XT = U$ unitary $\exists T > 0$,
3. X のどの eigenvector ξ も unimodular で semi-simple, すなわち $|\xi| = 1, \ker(X - \xi I) = \ker((X - \xi I)^2)$,
4. $\sup_{-\infty < k < \infty} \|X^k\| < \infty$,
5. $\sup_{-\infty < k < \infty} \text{Tr}((X^*)^k X^k) < \infty$.

本題に戻って, B が normal, $D \geq 0$ のときは $DSD = B^*SB$ から $\ker(B) = \ker(D)$ が
 できるので, 以下では B は normal invertible, $D > 0$ としてよい.

$DSD = B^*SB$ は $(S^{1/2}BD^{-1}S^{-1/2})^*(S^{1/2}BD^{-1}S^{-1/2}) = I$ のことであるから, 問題は

$$B \text{ normal, } D > 0, BD^{-1} \text{ unitary に similar} \xrightarrow{?} \|D\| \geq \|B\|$$

ということになるので, Lemma 11 を使うと, normal B , $D > 0$ にたいして,

$$BD^{-1} \text{ の eigenvalue がすべて unimodular, semi-simple} \xrightarrow{?} \|D\| \geq \|B\|.$$

とも, また

$$\sup_{-\infty < k < \infty} \operatorname{Tr} \left((D^{-1}B^*)^k (BD^{-1})^k \right) < \infty \xrightarrow{?} \|D\| \geq \|B\|$$

とも言い表すことができる. しかし, これ等の言い換えが有効かどうかはまだ判らない.

参考文献

- [1] T. Ando, *Geometric mean and norm Schwarz inequality*, Annal. Funct. Anal.
 (to appear).
- [2] R. Bhatia, *Positive Definite Matrices*, Princeton University Press, Princeton, 2007.
- [3] P. Halmos, *A Hilbert Space Problems Book*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York,
 1989.