

Bethe-Salpeter 方程式 の数値解について

京大 理 青 塚 剛 志
宗 像 康 雄

§ 1. 序

交換される meson の質量 μ が 0 でない場合の B-S 方程式の解については、まだあまりよく知られていない。最近、数値計算によって、固有値入の値が計算されているが、我々は関数の振舞いを調べる手掛りとして、total 4-momentum $P_\mu = 0$ の場合の解を積分表示を使って数値計算によって求めた。その方法は、以前、N. Nakanishi によって示されたものと同じであるが、数値計算と実行するために変形された部分があるので、以下にその方法の概略を述べる。

$$(p^2 + m_1^2)(p^2 + m_2^2) \phi(p) = \frac{\lambda}{\pi^2} \int \frac{d^4 k \phi(k)}{(p-k)^2 + \mu^2} \quad (1)$$

の解を極座標を使って

$$\phi_{NLem}(p) = \Phi_{NL}(p^2) \mathcal{H}_{Lem}(\alpha, \theta, \varphi) \quad (2)$$

と分離できると仮定する。 $\mathcal{H}_{Lem}(\alpha, \theta, \varphi)$ は 4 次元 solid har-

monics である。(2)と(1)に代入すれば、 $\Phi_{NL}(p^2)$ に対する積分方程式が得られるが、さらに積分表示

$$\Phi_{NL}(p^2) = \int_0^\infty \frac{d\gamma f_{NL}(\gamma)}{p^2 + \gamma} \quad (3)$$

を仮定して、(2)、(3)を(1)に代入すると

$$\int_0^\infty \frac{(\gamma - m_1^2)(\gamma - m_2^2) f_{NL}(\gamma) d\gamma}{p^2 + \gamma} = \lambda \int_{\mu^2}^\infty \frac{d\gamma}{p^2 + \gamma} \int_0^{(\sqrt{\gamma} - \mu)^2} d\xi K_L(\gamma, \xi) f_{NL}(\xi) \quad (4)$$

という式が得られる。但し、このとき

$$\int_0^\infty f_{NL}(\gamma) d\gamma = \int_0^\infty f_{NL}(\gamma) \gamma d\gamma = 0 \quad (5)$$

を仮定した。(5)式は、 $\Phi_{NL}(p^2)$ が p^2 の大きいところで、 $|p|^{-6}$ の order で 0 に近づくことを示している。

我々は、まず $L=0$, $\mu/2 < m_1 = m_2 \equiv m$ の場合を計算した。この場合

$$K_0(\gamma, \xi) = k(\gamma, \xi)/\gamma \quad (6)$$

$$k(\gamma, \xi) \equiv \sqrt{(\gamma - (\sqrt{\xi} + \mu)^2) \cdot (\gamma - (\sqrt{\xi} - \mu)^2)} = k(\xi, \gamma) \quad (7)$$

となり、weight function は次の形ではなければならない。

$$f_{N0}(\gamma) = \sum_{n=0}^\infty \lambda^n \cdot \theta(\gamma - \Delta_n^2) (\alpha u_n(\gamma) + \beta v_n(\gamma)) \quad (8)$$

$$u_0(\gamma) = \delta'(\gamma - m^2), \quad v_0(\gamma) = \delta(\gamma - m^2)$$

$$\Delta_n = m + n\mu, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(8)と(4)に代入すると、

$$(\gamma - m^2)^2 u_n(\gamma) = \int_{\Delta_{n-1}^2}^{(\sqrt{\gamma} - \mu)^2} K_0(\gamma, \xi) u_{n-1}(\xi) d\xi \quad (9)$$

という式が得られる。 $v_n(\gamma)$ についても全く同じである。

固有値方程式は、(5)式から得られて、

$$D(\lambda) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} d_n \lambda^n = 0 \quad (10)$$

となる。ここで

$$d_0 = 1$$

$$d_n = v_n + \sum_{j=0}^{n-1} (\bar{u}_j v_{n-j-1} - u_j \bar{v}_{n-j-1}) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (11)$$

$$u_n = \int_{\Delta_n^2}^{\infty} u_n(\eta) d\eta, \quad v_n = \int_{\Delta_n^2}^{\infty} v_n(\eta) d\eta$$

$$\bar{u}_n = \int_{\Delta_n^2}^{\infty} u_n(\eta) \varphi(\eta) d\eta, \quad \bar{v}_n = \int_{\Delta_n^2}^{\infty} v_n(\eta) \varphi(\eta) d\eta$$

$$\varphi(\eta) - \varphi(m^2) = \int_{\Delta_1^2}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi(\xi - m^2)} [k(\xi, m^2) - \theta(\xi - (\bar{\gamma} + \mu^2)) k(\eta, \xi)]$$

$\varphi(\eta)$ には、additive const. だけの不定性がある。また、

$$-\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n}{\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n v_n} > 0 \quad (12)$$

§ 2. 数値計算の結果

次の変換によって、全ての量を dimensionless にする。

$$\sqrt{\eta}/\mu = x, \quad \mu^2 m^{2(n+1)} u_n(\eta) = U_n(x), \quad \mu^2 m^{2n} v_n(\eta) = V_n(x)$$

$$m/\mu = M, \quad \lambda/m^2 = \Lambda, \quad m^{2n} d_n = D_n, \quad -\frac{\beta}{\alpha} m^2 = A$$

すると、固有値方程式は、

$$D(\Lambda) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} D_n \Lambda^n = 0 \quad (13)$$

となる。(11)式の中の cancellation が非常に大きいので、得られた D_n の精度は悪いが、(13)式の n は ground state については余り小さくなくても良い。次に結果を示す。

まず、 $M=2$ 、及び $M=4$ の場合の D_n の値を示す。 D_0, D_1, D_2 は、正確な式、または有限区間の定積分によって、必要なだけの精度が得られる。(表の D_5 の値は、符号と大きさの程度を調べるために示したが、精度は非常に悪い。)

	$M=2.0$	$M=4.0$
D_0	1.0	1.0
D_1	- 0.5776986	- 0.7338016
D_2	+ 0.0851303	+ 0.1562699
D_3	- 0.00491	- 0.01408
D_4	+ 0.000153	+ 0.00079
D_5	- 0.000004	- 0.00007

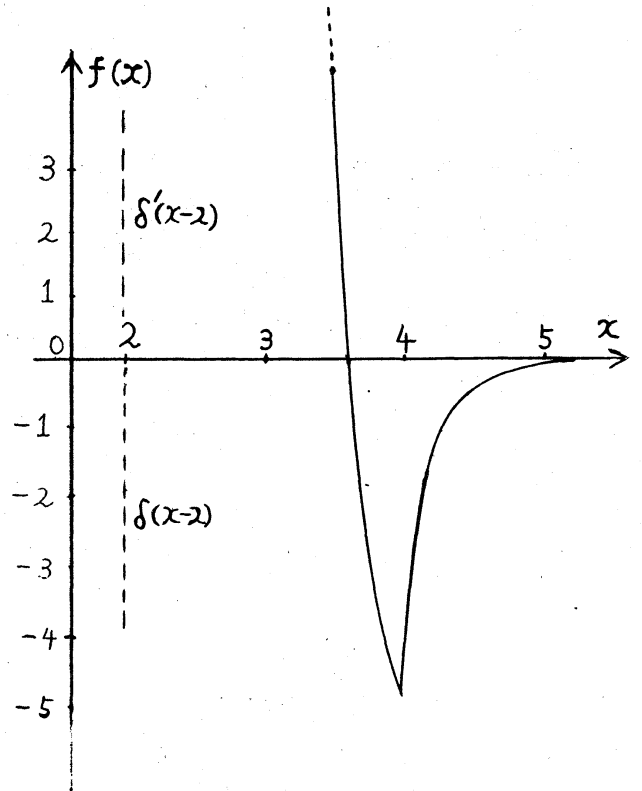
固有値 Λ については、(13) 式の中の sum を $n=n_0$ までとった場合の n_0 について表を示すと、lowest eigen-value は

	$M=2.0$	$M=4.0$
$n_0=3$ のとき	2.546	2.169
$n_0=4$ "	2.574	2.251
$n_0=5$ "	2.572	2.232

次に、 $M=2$ の場合の、weight function を示す。 $U_n(x)$ と $V_n(x)$ の重みの比は、 $A=0.768756$ としている。

右の図で、 δ -関数の位置と点線で示し、 $x=3$ から始まる関数値の目盛は適当にとっている。

$M=4$ の場合についても、右とほぼ同じ形のグラフが得られる。



§3. まとめ

我々は、以上のような方法で、 $P_\mu=0$ の場合の解が求められることが分かった。*unequal mass*, $L \neq 0$ の場合への拡張は容易である。しかし、数値計算の結果から予想される事でまだ証明できていないことがいくつかある。第一に、 $D(\lambda)$ が交替級数であること。第二に $\mu/m \rightarrow 0$ の極限で *Wick-Cutkosky solutions* に一致することである。

また、 $f_{NL}(\eta)$ が η の大きいところで急速に 0 になることを利用して、今の方法を修正し、精度を上げ、さらに *1st-excited state* の解を求めることも可能だが、近似の問題なのでここではこれ以上述べてない。