

ε -approximate solutions in vector optimization

新潟経営大学 経営情報学部 横山一憲

(Kazunori Yokoyama)

本報告では、次のベクトル最適化問題を考える。

(P) minimize $f(x)$
subject to $g(x) \leq 0$
where $f = (f_1, \dots, f_p)$ and $g = (g_1, \dots, g_m)$,
 $f_k (1 \leq k \leq p), g_i (1 \leq i \leq m) : R^n \rightarrow R$,
 $g(x) \leq 0$ means that $g_i(x) \leq 0$ for each $i = 1, \dots, m$.

許容集合 $\{x \in R^n \mid g(x) \leq 0\}$ を K とおく。このような問題について Loridan[2] は、正数 ε で近似された最適解を与え、次のような結果を示した。

Definition. [2] $f_k(x) \leq f_k(\bar{x}) - \varepsilon$, for any $k = 1, \dots, p$ with at least one strict inequality. となるような $x \in K$ が存在しないとき、この $\bar{x} \in K$ を ε -approximate solution for (P) という。

Proposition. [2] $f_k (1 \leq k \leq p)$ が下に有界で $K \neq \emptyset$ ならば ε -approximate solution for (P) が存在する。

ここで、勿論 $\varepsilon = 0$ であれば上記の解はよく知られた Pareto solution となり、 $p = 1$ であればスカラー値問題に対する ε -solution (i.e. $\inf_{x \in K} f(x) + \varepsilon \geq f(\bar{x})$) となる。

最近、Tanaka [4] で Loridan の定義と異なる新しい近似解が提案され、いくつかの結果が示された。

Definition. [4] $f_k(x) \leq f_k(\bar{x})$, for any $k = 1, \dots, p$ with at least one strict inequality. となるような $f(x) \in \{f(x) \mid x \in K, \|f(x) - f(\bar{x})\| > \varepsilon\}$ が存在しないとき、この $\bar{x} \in K$ を ε -approximal solution for (P) という。

Proposition. [4] $f_k (1 \leq k \leq p)$ が下に有界で $K \neq \emptyset$ ならば ε -approximal solution for (P) が存在する。

Proposition. [4] $\bar{x} \in K$ が ε -approximal solution for (P) であれば ε -approximate solution for (P) となる。

上記の Proposition は ε -approximal solution for (P) が ε -approximate solution for (P) よりも強い近似解の概念であることを表している。また ε -approximate solution と同様に次の性質を持つ。

Proposition. $p = 1$ のとき、 ε -approximal solution はスカラー値問題に対する ε -solution (i.e. $\inf_{x \in K} f(x) + \varepsilon \geq f(\bar{x})$) となる。

Proof. $\bar{x}$ を ε -approximal solution とする。このとき $\{x \mid f(\bar{x}) - \varepsilon > f(x)\} \cap K \neq \emptyset$ と仮定すると、 $x \in K$ が存在して $f(\bar{x}) - \varepsilon > f(x)$ となる。故に、 $|f(x) - f(\bar{x})| > \varepsilon$ and $f(\bar{x}) > f(x)$ for

some $x \in K$ が成立する。これは、 $\bar{x}$ が ε -approximal solution であることに矛盾する。故に for any $x \in K, f(\bar{x}) - \varepsilon \not> f(x)$

逆に $\bar{x}$ を ε -solution とする。このとき、 $\bar{x}$ が ε -approximal solution でないと仮定すると、 $x \in K$ が存在して、 $|f(x) - f(\bar{x})| > \varepsilon$ and $f(\bar{x}) > f(x)$. 故に、 $f(\bar{x}) > f(x) + \varepsilon$. 矛盾。□

ここで、二つの近似解を得るための十分条件を以下の条件のもとで示す。

Assumption. f_k : convex, bounded from below for each $k = 1, \dots, p$.

g_i : convex for each $i = 1, \dots, m$.

$K \neq \emptyset$

Proposition. $\bar{x} \in K$ が次の条件を満たすならば $\bar{x} \in K$ は ε -approximate solution for (P) となる。

$$\theta \in \partial_{\varepsilon^k} f_k(\bar{x}) + \sum_{j \neq k} \partial_{\varepsilon_j^k} \mu_j^k f_j(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \partial_{\varepsilon_i^k} \lambda_i^k g_i(\bar{x})$$

$$\sum_{j=1}^p \varepsilon_j^k + \sum_{i=1}^m \varepsilon_i^k - \varepsilon \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i^k g_i(\bar{x}) + \sum_{j \neq k} \mu_j^k \varepsilon_j^k \leq 0 \text{ for each } k = 1, \dots, p$$

となる $\varepsilon_j^k \geq 0, \varepsilon_i^k \geq 0, \mu_j^k \geq 0, \lambda_i^k \geq 0 (k, j = 1, \dots, p, i = 1, \dots, m)$, が存在する。

Proof. (略証) $\bar{x}$ が ε -approximate solution であることと $\bar{x}$ が ε -solution for the scalar problem (P_k) for any $k = 1, \dots, p$ であることは同値。

(P_k) minimize $f_k(x)$ s.t. $g_i(x) \leq 0, f_j(x) - f_j(\bar{x}) + \varepsilon \leq 0 (j \neq k)$.

[3, Theorem 2.4.] を適用すると命題は証明される。□

Proposition. $\bar{x}$ が次の条件を満たすならば $\bar{x}$ は ε -approximal solution for (P) となる。

$$\frac{\eta M}{\varepsilon} B^* \subset \sum_{k=1}^p \partial_{\eta_k} f_k(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \partial_{\lambda_i} g_i(\bar{x}) \text{ and } \sum_{k=1}^p \eta_k = \eta \text{ for any } \eta \geq 0$$

但し M は f の $\bar{x}$ での locally Lipschitz 定数

となる $\lambda_i \geq 0 (i = 1, \dots, m), \eta_k \geq 0 (k = 1, \dots, p)$ が存在する。

Proof. (略証) $\bar{x}$ が、optimal solution for the problem

minimize $\sum_{k=1}^p f_k(x) + \delta_K(x) - \delta_G(x)$ where $G = \{x \in R^n \mid M \|x - \bar{x}\| \leq \varepsilon\}$

ならば、 $\bar{x}$ は ε -approximal solution for (P) となる。ここで、 G は convex なので上記の問題は D.C. problem となる。[1, Theorem 4.1] より、 $\bar{x}$ が optimal for the D.C. problem となる十分条件は、

for any $\eta \geq 0, \partial_{\eta} \delta_G(\bar{x}) \subset \partial_{\eta} (\sum_{k=1}^p f_k(\cdot) + \delta_K(\cdot))(\bar{x})$,

が成立することである。左辺は次のようになる。

$$\partial_{\eta} \delta_G(\bar{x}) = \bigcup_{0 \leq \bar{\eta} \leq \eta + (\lambda_h)(\bar{x})} \partial_{\bar{\eta}} \lambda h(\bar{x}) \text{ where } h(x) = M \|x - \bar{x}\| - \varepsilon$$

$$= \bigcup_{0 \leq \bar{\eta} \leq \eta - \lambda \varepsilon} \partial_{\bar{\eta}} \lambda (M \| \cdot - \bar{x} \|)(\bar{x})$$

$$\subset \eta M B^* / \varepsilon$$

右辺は次のようになる。

$$\partial_{\eta} (\sum_{k=1}^p f_k(\cdot) + \delta_K(\cdot))(\bar{x}) = \bigcup_{(\eta_k \geq 0, \sum_{k=1}^{p+1} \eta_k = \eta)} \{ \sum_{k=1}^p \partial_{\eta_k} f_k(\bar{x}) + \partial_{\eta_{p+1}} \delta_K(\bar{x}) \}$$

$$\supset \sum_{k=1}^p \partial_{\eta_k} f_k(\bar{x}) + \partial_0 \delta_K(\bar{x})$$

$$\supset \sum_{k=1}^p \partial_{\eta_k} f_k(\bar{x}) + \bigcup_{\lambda \geq 0} \sum_{i=1}^m \lambda_i \partial g_i(\bar{x})$$

$$\supset \sum_{k=1}^p \partial_{\eta_k} f_k(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \partial \lambda_i g_i(\bar{x})$$

従って仮定の包含関係が満足されると $\partial_{\eta} \delta_G(\bar{x}) \subset \partial_{\eta} (\sum_{k=1}^p f_k(\cdot) + \delta_K(\cdot))(\bar{x})$ が成立するので、命題が証明された。□

References

- [1] J.-B. Hiriart Urruty, From convex optimization to nonconvex optimization, Nonsmooth optimization and related topics, F.H. Clarke et al. eds., Plenum (1989), 219-239.
- [2] P. Loridan, ε - Solutions in vector minimization problems, J.O.T.A., Vol.43(1984), 256-276.
- [3] D.D. Strodiot, V.H. Nguyen and N. Heukemes, ε -Optimal solutions in nondifferentiable programming and related questions, Mathematical Programming, Vol. 25(1983), 307-328.
- [4] T. Tanaka, A new approach to approximation of solutions in vector optimization problems, APORS '94(Fukuoka)(1994)
- [5] D.J. White, Epsilon efficiency, J.O.T.A., Vol.49(1986), 319-337.
- [6] K. Yokoyama, ε -Optimality criteria for vector minimization problems via exact penalty functions, J.M.A.A. Vol.187(1994), 296-305.