

函数体の有理性の問題

東京大学 理 飯高 茂

§1. 序

有限生成の体拡大 K/k が与えられたとき、次の定義をしよう。

定義: K/k : 有理的 (又は K は k 上の有理函数体) $\Leftrightarrow$
 K は k 上純粹超越拡大.

さて自然に我々は次の素朴な問題に導かれる。

問題 I. 有理的拡大の有効な判定法を与えよ。

ここで有効とは、種々の例に対して決定的な効力を発揮するもの、と理解しておこう。例えば次のような例である。

例 1. k : 代数閉体, $K_{n,d} = k(x_1, \dots, x_{n+1})$, この変数は唯一つの関係式 $x_1^d + x_2^d + \dots + x_{n+1}^d = 1$, (k の標数は d をわらない) をもつ。さて,

$$K_{n,d}/k \text{ 有理的} \Rightarrow n+2 > d$$

であることは容易にわかるが、 $n \geq 3$ のとき、逆は成立するかどうか、とくに $d \geq 3$ なら、実際に有理数であることが確かめられているものは一つとしてない。とくに $n=3, d=4$ は、非有理的（単有理とさえない）と想像されるが、極めて困難の問題にみえた。（[14] p79 をみよ。）

例2. K/k : 有理的 のとき、 K/L : 分離的 なる K/k の中間体 L をとると、 L/k は有理的であるか? このような拡大を 単有理的 (uni-rational) . 又 L は k 上単有理函数体とよぶ. $\dim_k L = 1, 2$ なら、たしかに有理的になるが一般には反例すら一つも知られていない。いわゆる Lang の問題で極めて難しいとされている。やさしい例をあげる。

$K = k(x_1, \dots, x_m)/k$ を有理函数体とすると、 $\{x_1, \dots, x_m\}$ の置換として、対称群 G が作用する。基本対称式を $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$ とおくと、 $K^G = \{G\text{-不変の } K \text{ の元全体}\} = k(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$ でこの時は且出度 K^G/k : 有理的。又、 $H = \{\sigma^k, (0 \leq k \leq m-1; \sigma x_i = x_{i+1} (i=1, 2, \dots, m; x_{m+1} = x_1))\}$ とおき、 K^H を考えよ。 k の標数が m をわらぬとする。 1 の原始 m 乗根 ζ をとり、Lagrange の分解式 $y_i = x_i + \zeta^i x_2 + \zeta^{2i} x_3 + \dots + \zeta^{(m-1)i} x_m$ ($1 \leq i \leq m$) をつくと、 $\sigma y_i = \zeta^i y_i$ 。又 $k(x_1, \dots, x_m) = k(y_1, \dots, y_m)$ 。 $\zeta = z_1$; $z_1 = y_1^m$, $z_2 = y_2/y_1^2, \dots, z_{m-1} = y_{m-1}/y_1^{m-1}$, $z_m = y_m$ をつくと、皆 K^H の元。 $K \xrightarrow{H} K^H = k(z_1, \dots, z_m)$

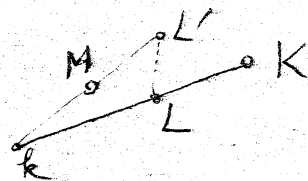
$m = [K : K^H] = [K : \mathbb{R}(z_1, \dots, z_m)]$ により, $K^H = \mathbb{R}(z_1, \dots, z_m)$.
かくてこの時も有理的となる. しかし, $A \in G$ の偶置換
よりなる交代群とすると, $K^A/\mathbb{R}$: 有理的か? は現在手
のつけようもない難問であるらしい. δ を $x_1, \dots, x_m$ を根とし
た方程式の判別式とすると, $K^A = \mathbb{R}(\sigma_1, \dots, \sigma_m, \sqrt{\delta})$ ではあ
る. ($m=1, 2, 3$ など明示)

例3. 永田先生は, [13] に於て 次の定義をした.

定理: $K/\mathbb{R}$: 擬有理的 $\Leftrightarrow \mathbb{R}$ と異なり中間 L には必ず有限

代数拡大 L'/L が存在し, L' は

$L'/\mathbb{R}$ の中間 M 上一変数有理函数
体となる ($L' = M(t)$)



永田先生の基本定理によると, 単有理的なら擬有理的であ
る. この逆の反例は一つも知られていない. たが, $\dim_{\mathbb{R}} K =$
 $1, 2$ なら, 擬有理 $\Rightarrow$ 有理, となる. これは後にみるであ
ろう.

このように問題への解答は3次元以上, 場合全く知られてい
ないといってよく, また純粹に代数の問題にみえても現状で
は幾何的, とくに代数幾何学的に考察しなければ手のつけ
ようもない. いや, 代数幾何の発祥の地はこのような問題を
解決する努力の中にもあったのである.

§2. 代数幾何的取扱ひ.

以後基礎の体 k を代数的閉体として固定して考察する.

k 上の非特異射影多様体 V/k が体 K/k のモデルであるとは, K の有理函数をつくる体 $k(V)$ が K と k 上同型のことをさす. すると, モデルは双有理同値を除いて唯一つ定まる.* $\Omega^n = \Omega^n_V$ を V 上の, 正則 n 型式の芽をつくる層とするとき, すべては 0 でない非負整数 $k_1, \dots, k_n$ ($n = \dim V$) に対して, 多重種数 $P_{k_1, k_2, \dots, k_n}$ を

$$P_{k_1, k_2, \dots, k_n} = \dim H^0(V, (\Omega^1)^{\otimes k_1} \otimes (\Omega^2)^{\otimes k_2} \otimes \dots \otimes (\Omega^n)^{\otimes k_n})$$

で定義する. すると次の基本性質が容易にわかる.

i) $V \rightarrow V'$ に, 有限分離的有理写像があれば,

$$P_{\text{---}}(V) \geq P_{\text{---}}(V'). \quad (k_1, \dots, k_n \text{ を --- で表わした.})$$

この系として

ii) $P_{\text{---}}(V)$ は, 双有理不変量である.

それ

故体のみを記して $P_{\text{---}}(K)$ ともかく.

iii) $P_{k_1, \dots, k_{n+1}}(K(t)) = 0$, もし $k_{n+1} > 0$,

$$P_{k_1, \dots, k_n, 0}(K(t)) = P_{k_1, \dots, k_n}(K).$$

ここで t は K 上の超越元, $n = \dim K$.

この系として,

iv) K/k : 有理的なら $P_{\text{---}}(K) = 0$.**

** もし, とも i) によれば, K/k : 単有理的なら, $P_{\text{---}}(K) = 0$ にはあるが, 4

* $k \neq 0$ のときは証明されていないと注意がある.

又例1の $K_{n,d}/k$ は, $n+2 > d \Leftrightarrow P_{-}(K_{n,d}) = 0$ である. それ故
 IV) の逆が成たつかどうかは基本的課題でもしい之れは; 問題
 I はほぼ完全にとかれたといふことよ. 勿論 $n=1, 2$ ^(の時) はとけ
 ている.

$n=1$ のとき, $g=P_1$ とおき K の種数とよぶ.

$$g=0 \Leftrightarrow K/k : \text{有理的.}$$

$n=2$ のとき, $P_2=P_{0,2}$ とおき K の 2 種数 (genus), $g=P_{1,0}$

とおき K の不正則数, とやれられよ. すると, Castelnuovo
 による判定法は,

$$P_2=g=0 \Leftrightarrow \underbrace{K/k}_{(n=1,2 \text{ のとき})} : \text{有理的. [16]}$$

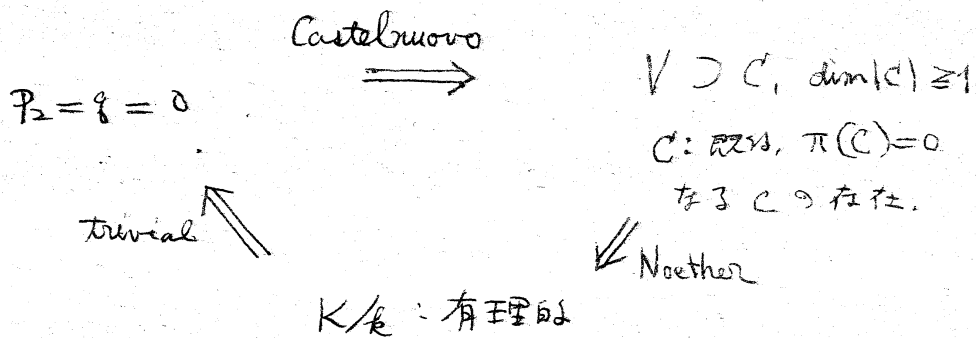
さてこれらを用いて, ^(分離的) 例2を解いてみよう. k 上の函数体 K ,
 L があり, $K \supset L$, $\dim K = n+m$, $\dim L = n$ とすると,
 $P_{k_1, \dots, k_n}(L) \leq P_{k_1, \dots, k_n, 0, \dots, 0}(L)$ となる. これは, L に超越
 元 $t_1, \dots, t_n$ をとり, $K/L(t_1, \dots, t_n)$ を有限分離拡大となるよ
 うにして i), iii) を用いられはよいのである. さて K/k : 単有
 理な $P_{-}(K) = 0$, よって $P_{-}(L) = 0$, それ故上記の
 判定法により $n=1, 2$ の時は L/k : 有理的 かわかる.

また例3を解くこともできる. 例3の記号のままに, $L=K$
 とおくと, その有限代数拡大 $L'=M(t)$ があるから, $k_n > 0$ と
 して $P_{k_1, \dots, k_n}(K) \leq P_{k_1, \dots, k_n}(M(t)) = 0$, $\therefore n=1$ な
 る, K/k : 有理的 かわかる. また, K/k : 擬有理的 な s

明らかにその中間体 L/k も擬有理的であることを注意する。

よして $n=2$ のとき, $P_{0,2}(K)=0$, したがって $g(K)=P_{1,0}(K) > 0$ なら K の非特異射影モデル V をつくり, Albanese map $\alpha: V \rightarrow \Delta$ をつくる. Δ の種数は g , α : 全射, よって $K=k(V) \supset k(\Delta) \supset k$, さて $k(\Delta)/k$ は擬有理的だから, 有理函数体, $g=0$ となる. よって $g(K)=0$. Castelnuovo の判定法によれば, K/k : 有理的.

さて Castelnuovo の判定法は古典代数曲面での最初、最大の成果といえ、とてもよく、証明は本質的に難しい。その証明の構造は次のようになっている。



$P_2 = g = 0$ のような判定法を Numerical criterion, 曲線 C の存在のような判定法を Geometric criterion とよぶことにしよう。M. Noether は Geometric criterion の十分条件を示し, Castel-

nuovo は Numerical criterion から Geometric criterion を示し、
合せてこれらの criterion が必要十分条件であることを示し
たのである。^{*} ここで奇妙なことは、Geometric criterion の必要
性が、Numerical criterion を理由していることで、これによら
ない直接的証明が得難いことは、問題の複雑さ——一見は簡
単明瞭であつても——を示すものかもしれない。

さて我々の主たる関心は、Noether's part —— Geometric
criterion の十分条件 —— を拡張することにある。例文は、次
の定理が成立する。

定理: V に一次系 $|Z|$ が存在し、その一般元 Z は、
射影空間 P^{n-1} ($n = \dim V$) と同型、 $\dim |Z| \geq 1$ 、かつ、
 $|Z|$ に底点があれば、 $k(V)/k$ は有理函数体である。

曲線の場合は、有理曲線は（非退化なら）唯一であるし、
それは P^1 である。従つて高次元への拡張としては、無数に、
双正則で異なる有理多様体がある以上、 P^{n-1} として一般化す
ることは余りにも強いし、事實、必要条件を与えるものでは
金くない。しかし、 $|Z|$ から有理字像をつくり、 $|Z|$ に底点
のないことから、それが正則で、その逆像が Z となる

^{*} もっともこれらの古典的証明は、現代的観点からは不可解
なものが多いという。短い証明は [9] を見よ。

だから、次のように素朴な問題を設定しよう。

問題 II, X, Y を、代数的多様体, $f: X \rightarrow Y$, 固有的
 なる閉点 $y \in Y$ 2: $Z = f^{-1}(y)$ が、非特異有理多様体とすると
 $k(X)/k(Y)$: 有理的か?
 (定理のように)

さて、応用上は、一次系を考へるから、 Y はとくに代数曲
 線としてよい。すると、 $K = k(Y)$ は、いわゆる C_1 -体とな
 る。いいかえると、 $K[X_0, X_1, \dots, X_n]$ の有次多項式 f は、
 f の次数が n 以下ならつねに、全部 0 ではない K の元 $x_0, x_1,$
 $\dots, x_n$ があつて $f(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$ となるのである。便宜
 上例をあげよう。

例 4. $z^2 - xy(1+x+y)(1+ax+by) = 0$, $a, b \in k$
 は有理曲面を定める; この式は勿論特異点と決山もつから
 非特異射影モデルをつくらせて $\mathbb{P}^2$ に置かなくてはならぬと思ふと大変
 であるが、双有理変換 $(x, y, z) \rightarrow (x, Y, Z)$; $Z = z/x$,
 $Y = y/x$ を行つと、

$$Z^2 = Y(1+x+XY)(1+ax+bXY)$$

となる。 $K = k(Y)$ 上 Z, x の二次曲線とみなせ、かつ
 これは C_1 -体の性質から K 有理点をもつから、 $L = k(x, Y, Z)$
 は K 上有理的。

例 5. $K: C_1$ -体とするとき、 S を K 上の有理曲面、即
 ち K の閉包 $\bar{K}$ まであげると $S_{\bar{K}}$ は $\bar{K}$ 上の有理多様体とな
 3

る、なすは、

Манин の予想 : S は K 有理点をもつ。 [12]

たとえば、 $p_K^{(1)} = S$ を K 上で極小モデルに与えられたとき、 C^2+1 、と S/K の linear genus を定義するとき、

- ① $ch(K)=0$, $p_K^{(1)}(S) \neq 1$ なす S は K 有理点をもつ。
- ② S は K 上ある曲線の上に K 正則写像をもつ。このとき S は K 有理点をもつ。 [12]

また、 V/K : 有理的なす $H^0(V, \Omega^i) = 0$ ($i \geq 1$)、なす $H^i(V, \mathcal{O}_V) = 0$ ($i \geq 1$) も大丈夫らしい。そこで

Serre の予想 : V/K , $K: C_1$ -体なす、 $H^i(V, \mathcal{O}_V) = 0$ ($i \geq 1$) なす V は K 有理点をもつ。 [4] 5 Exp III Formule de Lefschetz Verdier p29.
 とくに K : 有限体なす C_1 -体で、この時は、Lefschetz の公式をスキーム論の立場で拡張した Lefschetz Verdier の公式より直ちに示される。また、 V が、 $\mathbb{P}^{n+r}$ 内の次数 $d_1, \dots, d_n$ 次の完全交差形なす、 $H^n(V, \mathcal{O}_V) = 0 \iff n+r+1 - \sum d_i > 0$ で、この後者の条件は、丁度 C_1 -体が、零定をもつ条件なのであった。

例 6. $K: C_1$ -体なす、 $H^i(K, G_m) = 0$ ($i \geq 1$)、をもとも一般の体で $H^i(K, GL(n)) = 0$ であった。このコホモロジーは、 K の分離閉包 K' のガロアコホモロジーである。 [5]

§ 3. 定理 I, 定理 II.

問題 II は否定的であるうか、次のような時はともとし
ない。

予想. X, Y : 非特異の代数多様体, $\dim Y$ は曲線,
 $f: X \rightarrow Y$ は固有的, ある閉点 $y \in Y$ で $Z = X_y$ は有
理的かつ, $H^1(Z, \underline{\mathcal{H}}_Z) = 0$, この時 $k(X)/k(Y)$: 有理的.
こゝに $\underline{\mathcal{H}}_Z = \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_Z}(\mathcal{O}_Z, \Omega_Z^1)$.

さて予想は次の時に成立する。

定理 I i) $Z = \mathbb{P}^{n-1}, Q^{n-1}$ (quadrics), $\mathbb{P}^{n-1} \times \dots$ の時予想
が成立する。

ii) $n = \dim X = 3$ の時, $(c^2(Z) = 4, \text{ch } k = 5 \text{ を除外}$
すると) 予想は成立する。

も、とも予想の条件はよいものではない。なぜならこの定
理が成立するから。

定理 II. Z が $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^{n-2}$ -bundle でも $k(X)/k(Y)$
有理的となる。

(しかし, $\dim H^1(Z, \underline{\mathcal{H}})$ は随分大きなものである。)

$n=3$ の時, Z : 有理曲面の時, よくわかっている曲面

論がつかえるが、一般に元では、formal schemeの理論に由
るねばならない。必要なのは EGA III §4, 5 の完備局所環上
の usual scheme と formal scheme の比較定理、及び SGA1
の ex 3. の obstruction theory である。予想の条件下で考
えていく。

$\hat{\mathcal{O}} = \hat{\mathcal{O}}_{Y, y}$, $\hat{\mathcal{O}}$ の極大イデアルによる完備化を $\hat{\mathcal{O}}$ とかく。

$X_{\hat{\mathcal{O}}} = X \times_Y \text{Spec } \hat{\mathcal{O}}$, $Z \otimes_{\mathbb{R}} \hat{\mathcal{O}}$ を $\text{Spec } \hat{\mathcal{O}}$ 上で考える

に、 $H^1(Z, \underline{\mathcal{O}}) = 0$ により、 $\hat{\mathcal{O}}/\underline{m}_{\hat{\mathcal{O}}}$ 上一致しているから
formal scheme $X_{\hat{\mathcal{O}}}$, $(Z \otimes_{\mathbb{R}} \hat{\mathcal{O}})^{\wedge}$ は同型。すると、比較定理
により、

$$X_{\hat{\mathcal{O}}} \xrightarrow[\hat{\mathcal{O}}]{\sim} Z \otimes_{\mathbb{R}} \hat{\mathcal{O}}.$$

$\hat{\mathcal{O}}$ の分断体を K とする。 X_K は K の代数的標体。それ
より、 K のある分断体を K' 上で

$$A) \quad X_{K'} \xrightarrow[K']{\sim} Z \otimes_{\mathbb{R}} K'.$$

を示し、次に、何とか X_K まで下げてしまいたい。たとえ
ば、Weil の Descente によると、 $G = \text{Aut}(Z \otimes_{\mathbb{R}} K')$ とお
くと

$$H^1(K, G) = 0$$

$$\text{なら } B) \quad X_K \xrightarrow[K]{\sim} Z \otimes_{\mathbb{R}} K.$$

がでて、有理数拡大であることが示されるのである。そこで

の二つの操作は、現状では事例毎にあたる他ない。

A) の例. X が K 上の代数多様体で, K の拡大体 L にまよあけると X_L が $\mathbb{P}_L^{n+1}$ 内の超曲面と L 上双正則とする. そのとき, K の分離閉包 K' にまよあけると $X_{K'}$ が $\mathbb{P}_{K'}^{n+1}$ 内の超曲面と K' 上双正則同型. ($n \geq 2$).

証明には, EGA II に予告された定理により, X は K 上, 射影的であるから, Chow 多様体の理論が使える. X_L の $\mathbb{P}_L^{n+1}$ の超平面切断による因子 E を考えるとこれは L 上定義される. $c(E)$ の特殊化をとると, 既約かつ, K' 上に定義された因子 E' がとれる. E' によつて, $X_{K'}$ をうめこんでやればよい.

B) の例.

$$i) Z = \mathbb{P}_K^{n-1} \quad \text{Aut } Z = \text{GP}(n-1), \quad K = \mathbb{C}$$

$$\{t\} \rightarrow G_n \rightarrow GL(n) \rightarrow \text{GP}(n-1) \rightarrow \{t\}$$

これによつて,

$$H^1(K, GL(n)) \rightarrow H^1(K, \text{GP}(n-1)) \rightarrow H^2(K, G_m)$$

$K: \mathbb{C}$ -体だから, $H^1(K, \text{GP}(n-1)) = 0$. これを, 定理から $\mathbb{P}^{n-1}$ のとき示された. $\square$

ii) $Z = \mathbb{Q}^{n-1}$ 次の Lemma に注意する.

Lemma. 完全交差の多様体 V の自己同型は, $\dim V \geq 2$ のとき, ambient space $\mathbb{P}^N$ の自己同型より導かれる. (K の曲面を除く)

$\Rightarrow \dim V = n$, $V \subset \mathbb{P}^N$ が各次数 $d_1, \dots, d_{n-1}$ の齊次多項式

から定まるとしているとする。この標準因子を K , 超平面切断因子を H とおくと,

$$K \sim (N+1 - \sum d_i) H \quad (\text{線形同値の意味})$$

自己同型 α により, 線型同値を除いて K は不変.

$$K \sim \alpha^* K \sim (N+1 - \sum d_i) \alpha^* H \sim (N+1 - \sum d_i) H$$

さて, $\dim V \geq 2$ なら $h^{0,1} = h^{1,0} = 0$, かつ torsion free によ

り, $NH \neq \sum d_i$ なら, $\alpha^* H \sim H$. 一方 $\dim \geq 2$ なら Lefschetz, Groth.

の定理により, (*) $Pic(V) \cong \mathbb{Z}$. したがって $H^{(n)} = \Pi d_i$ なる H は mod.

線型同値で唯一つ. よって除外されるのは, $\dim V = 2$, $NH = \sum d_i$

これは $K3$ 曲面である.

さて, Q を $\mathbb{P}^n$ で定義する方程式を f , $CO(f) = \{ \alpha \in GL(n+1), f(\alpha x) = c_\alpha f(x) \}$ とおくと,

$$\{1\} \rightarrow G_m \rightarrow CO(f) \rightarrow Aut(Q_f) \rightarrow \{1\}.$$

これによると, $K: C_1$ -体により

$$\begin{aligned} & \rightarrow H^1(K, G_m) \rightarrow H^1(K, CO(f)) \rightarrow H(K, Aut(Q_f)) \\ & \rightarrow H^2(K, G_m) \end{aligned}$$

$$\therefore H^1(K, CO(f)) \cong H^1(K, Aut(Q_f)).$$

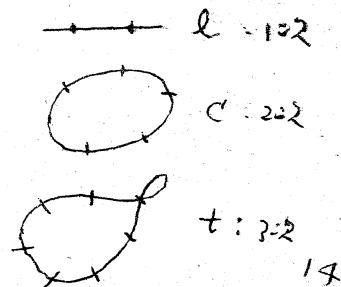
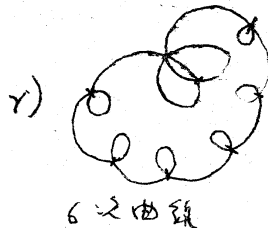
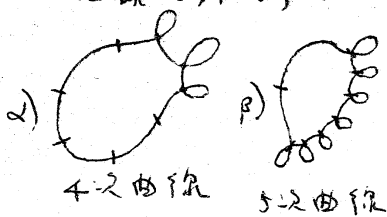
一方 $H^1(K, CO(f)) \cong \left\{ \begin{array}{l} \varphi: K \text{ に係数をもつ二次形式} \end{array} \right\} / K\text{-同値}$
は容易に $H^1(K, GL(n)) = 0$ として示されるから,

結論として,

X_K は K 上の超二次曲面 かつ結論より, 結局 $k(X)/K$: 有理的

次に定理 I ii) を示す. このとき $H^1(\mathbb{Z}, \mathbb{Q}) = 0$ なる有理曲面は実は数えあげることかできる. 実際, $\mathbb{P}_k^2$ より, n 個の一般の位置にある点 $p_1, p_2, \dots, p_n$ を flow up してできた曲面を考えた. "一般の位置にある"を正しくすると,

- 1) p_1 はどこでもよい,
- 2) p_2 は p_1 以外ならよい,
- 3) p_3 は p_1, p_2 を結ぶ直線 $l(p_1, p_2)$ 以外ならよい.
- 4) p_4 は $l(p_1, p_2) \cup l(p_1, p_3) \cup l(p_2, p_3)$ 以外ならよい.
- 5) p_5 は $\bigcup l(p_i, p_j) \ (1 \leq i < j \leq 4)$ 以外ならよい.
- 6) p_6 は $\bigcup l(p_i, p_j) \ (1 \leq i < j \leq 5)$ かつ, $p_1, p_2, \dots, p_5$ を通る二次曲線 $C(p_1, p_2, \dots, p_5)$ 以外ならよい.
- 7) p_7 は, $\bigcup l(p_i, p_j) \ (1 \leq i < j \leq 6)$, $\bigcup C(p_1, \dots, p_i, p_6) \ (1 \leq i \leq 6)$ 以外ならよい.
- 8) p_8 は, $\bigcup l(p_i, p_j) \ (1 \leq i < j \leq 7)$, $\bigcup C(p_1, \dots, p_i, p_7, p_8) \ (1 \leq i \leq 7)$ 更に p_8 が二重点をもつ他の点を通る二次曲線 $t(p_1, p_2, \dots, p_8) \ (1 \leq i \leq 7)$ 以外ならよい.
- 9) p_9 は, 同様に l, C, t 以外に, 次の三つの型 (α, β, γ) の曲線以外ならよい.



これから先は、除外点の集合が、Zariski閉集合にならないうえ、既集合であるから、ともかく、次の表をかくことのできる。

P^2 より一般の位置にある n 個の点を blow up (2次元曲面 Z の表

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	*
$\dim \Gamma(Z, \mathcal{O})$	8	6	4	2	0	0	0	0	0	0	6
$\dim H^1(Z, \mathcal{O})$	0	0	0	0	0	2	4	6	8	10	0
例外曲線の数	0	1	3	6	10	16	27	56	240	∞	0
$\text{Aut}(Z)$	C					F				D	C
体	有理的					単有理的	擬有理的			有理的	

$\text{Aut}(Z)$: C とは、連続群の成分をもつこと、 F とは有限群、 D とは離散 (無限!) 群を意味する。又 $n=*$ は、 $P^1 \times P^1$ の曲面であり、 P^2 から blow up してできるわけではない。大事なことは、 $\dim H^1(Z, \mathcal{O}) = 0$ なる有理曲面は上記の表でつづいていることである。これをみるには、次の三つのことに注意すればよい。

i) 有理曲面の極小モデルは $P^2 \times P^1$ 内に実現される。有次元座標を (x, y) とかくと、 $\lambda_0 x + \lambda_1 y = 0$ 又は、 $\lambda_0 = 0$ (このとき P^2)

であり、容易に、 $\dim H^1(Z, \mathcal{O}) = \begin{cases} e-1 & (e \geq 1) \\ 0 & (e=0) \end{cases}, = 0 (P^2)$

ii) Z を blow up (2次元曲面) $Z' = \mathcal{Q}_P(Z)$ は、

$\dim H^0(Z, \mathcal{O}) - \dim H^0(Z', \mathcal{O}) = 2, 1, 0$ のいずれか。

iii) Z 有理曲面なす。

$$\dim H^1(Z, \mathcal{O}) = \dim H^0(Z, \mathcal{O}) + 10 - 2c_1^2.$$

さて、A) の段階は、 X_K 上に例外曲線があり、それらを 5
つめると、 $\mathbb{P}_K^3$ になるから、結局 A) がたしかめられ、直接
Mathieu の結果を用いると、例外例以外は X_K が K 有理と
なると、かつ $k(X)/K$: 有理的が確かめられる。

そして $n=5, 6$ に応じた単有理拡大は、このモデルを各々、
 $\mathbb{P}^4$ 内の (2,2) 型の 4 次曲面、 $\mathbb{P}^3$ 内の 3 次曲面にとれることから
又、この超平面切斷が丁度標準因子の符号をかえたもの
なることよりわかるのであった [1]。なお、問題 II で、 Z
が有理曲面なら、 $k(X)/k(Y)$: 擬有理的が一般にわかる。

次に定理 II の証明をする。まず $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^n$ -bundle の特徴は
を与える。

命題. V : 非特異代数多様体とするとき、

$$V : \mathbb{P}^1 \text{ 上 } \mathbb{P}^n\text{-bundle} \iff \begin{matrix} \text{1) } h^{0,1}(V) = 0, & \text{2) } p(V) = 2, & \text{3) } \\ \text{よ } \text{うな因子 } E \text{ が存在する. } & \text{i) } E \simeq \mathbb{P}^n & \\ & \text{ii) } E^{(n+1)} = 0. & \end{matrix}$$

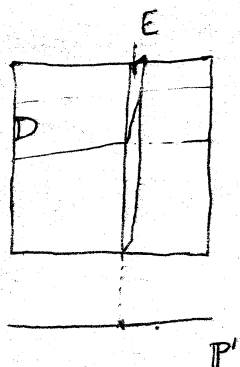
ただし $p(V) = V$ の Picard 数。

∴ $\Rightarrow$, さて、 $\mathbb{P}^1$ 上の局所自由加群層 $\mathcal{E}$ により $V \simeq \mathbb{P}(\mathcal{E})$ と

表されるから、 $\text{Pic}(V) \simeq \text{Pic}(\mathbb{P}^1) \times \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 、これは、

$$*) \quad p(V) = \text{rank}_{\mathbb{Z}}(G(V)/G_a(V)) : (G(V) : \text{divisor group, } G_a : \text{alg. of } 0 \text{ の divisor group})$$

Picard number である。



$p(V) = 2$ とともにその標準的生成元 D, E を与える. E は P' の一次より等かれた, ファイバーの因子であり, D は, $\mathbb{P}^n(E)$ の基本層にないた層である.

$$[D]|_E \simeq \mathbb{P}^n \text{ の超平面の因子}, [E]|_E \simeq 0.$$

また EGA III §2 より $H^i(V, \mathcal{O}_V) \simeq H^i(P, \mathcal{O}_P)$

$$= 0 \quad (i \geq 1).$$

⇐ の方を示す.

$[E]|_E$ は $\mathbb{P}^n$ の因子だから, これが 0 でないと, 必ず $E^{(n)} \neq 0$, よって $[E]|_E = 0$. すると,

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_V \rightarrow \mathcal{O}_V(E) \rightarrow \mathcal{O}_E \rightarrow 0.$$

$H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$ によつて, $\dim H^0(V, \mathcal{O}_V(E)) = 2$. それでまた定理より V は, 有理多様体となることがわかった.

$|E|$ の元はつねに既約である.

∴ $E \sim E_1 + E_2$, とわかれたとす.* とにかく $|E|$ より導かれた正則写像により V は射影的, その超平面切断を X とすると, $pV = 2$ により一次の relation

$$aE_1 + bE_2 + cX \sim 0$$

が成立する. $E^{(n-1)} \cdot E_1 = E^{(n-1)} \cdot E_2 = 0$, $E^{(n-1)} \cdot X \neq 0$ により $c = 0$.

$$aE_1 + bE_2 \sim 0. \quad \text{よって}$$

$$aE_1^{(n+1)} + bE_1^{(n)}E_2 = 0, \quad E_1^{(n+1)} + E_1^{(n)}E_2 = 0.$$

*) E_1 : 既約, E_2 は E_1 を成分に持たぬ正因子.

E_1 : 既約, E_2 が E_1 を成分に持たず, その台が共通分をもつから, $E_1^{(n)} E_2 = 0$. よって $b = a$. E : 正因子だから $aE \sim a(E_1 + E_2) \sim 0$ に矛盾する.

これで [1] 定理, [17] により, V は $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^n$ -bundle となる.

さて, 定理 II の証明に入る. また $X_{\hat{\mathbb{Q}}} \rightarrow \text{Spec } \hat{\mathbb{Q}}$ で, 抽 $\hat{\mathbb{Q}}$ の変形の安定性を用いるのである. E の V 内での法ベクトルは 0 で, $H^1(V, \mathcal{O}_V) = 0$ だから, 安定性の条件をみたす.* さて $\mathbb{P}^1$ 上の $\mathbb{P}^{n-2}$ -bundle であるから, 命題により, E がある. それを安定性で伸ばし $\tilde{E}$ とする. $\tilde{E}_g = E \simeq \mathbb{P}^{n-2}$ により $E_K \simeq \mathbb{P}_K^{n-2}$, $E_K^{(n-1)} = E^{(n-1)} = 0$. 一方 $h^{0,1}$ の上半連続性より $h^{0,1}(X_K) = 0$, $p(X_K) = 2$. よって X_K では $\mathbb{P}_K^1$ 上の $\mathbb{P}^{n-2}$ -bundle. A) の段階は, 又 Chow 多様体の理論による. 所で次のことがいえる.

命題 2. $V_K: \mathbb{P}_K^1$ 上の $\mathbb{P}_K^n$ -bundle なら, $H^1(K, \text{Aut}(V_K)) = 0$.

$\mathbb{P}^1$ 上のベクトルバンドルは Grothendieck の定理によると, 線バンドルに分解する. そこで, 標準基底の決り方により, ことかできる. $\mathbb{P}^1 = A^1 \cup A^1$ と二つのアフィンにわけ,

$$A^1 \times \mathbb{P}^n \cup A^1 \times \mathbb{P}^n$$

$$(\Sigma, \zeta_0: \dots: \zeta_n) = (\Sigma', \zeta'_0: \dots: \zeta'_n)$$

*). 非特異多様体の formal deformation: $X \xrightarrow{\varphi} \text{Spec } \mathbb{C}$,
 φ : complete, φ : smooth, proper, flat. $0: \text{Spec } \mathbb{C}$ の内点, $V = \varphi^{-1}(0)$.
 (X, φ) は formal deformation of V , とする. V の submanifold W の normal bundle $N_{V/W}$, $H^1(W, N_{V/W}) = 0$ なら, $Y \subset X / \text{Spec } \mathbb{C}$, $(Y, \varphi|_Y) \neq 1$ かつ $Y \cap W = \emptyset$ なる Y は存在しない.

$$\Leftrightarrow z' = 1/z, \quad \zeta'_0 : \dots : \zeta'_n = \zeta_0 : z^{d_1} \zeta_1 : \dots : z^{d_n} \zeta_n.$$

さて, $n \geq 2$ のとき P^1 上の P^n -バンドル V の自己同型 ^{α} は,
 π を保つ. ($n=1$ のときは $P^1 \times P^1 \rightarrow P^1$ を例外とする
 のだが.) これは, $n=1$ なら交点数の計算によれるし,
 $n \geq 2$ なら, 射影を π とするとき, $p \in P^1$ に対して, $\pi^{-1}(p) \cong P^n$
 $\pi : P^n \rightarrow P^1$ による $\pi^* \pi^* : P^1 \rightarrow P^1$ によると定数!

$\gamma : z \mapsto z$ と仮定できる.

$$(z, \zeta_0 : \zeta_1 : \dots : \zeta_n) \xrightarrow{\alpha} (z, \sum_{j=0}^n a_{0j}(z) \zeta_j : \sum_{j=0}^n a_{1j}(z) \zeta_j : \dots : \sum_{j=0}^n a_{nj}(z) \zeta_j)$$

$\Delta = \det(a_{ij}(z))$ は A^1 で定数とみなせる定数.

$$(z', \zeta'_0 : \zeta'_1 : \dots : \zeta'_n) \longrightarrow (z', \xi'_0 : \xi'_1 : \dots : \xi'_n) \text{ とおく.}$$

$$\xi'_0 = a_{00}(1/z') \zeta'_0 + a_{01}(1/z') \zeta'_1 + \dots + a_{0n}(1/z') z'^{d_n} \zeta'_n$$

$$\xi'_1 = a_{10}(1/z') z'^{-d_1} \zeta'_0 + a_{11}(1/z') \zeta'_1 + \dots + a_{1n}(1/z') z'^{d_n-d_1} \zeta'_n$$

$$\dots$$

$$\xi'_n = a_{n0}(1/z') z'^{-d_n} \zeta'_0 + a_{n1}(1/z') z'^{d_1-d_n} \zeta'_1 + \dots + a_{nn}(1/z') \zeta'_n,$$

$$\gamma : z \mapsto z \quad \Delta'(z) = \det(a_{ij}(1/z)) = \Delta$$

が直ちにわかる.

$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ と仮定する. $a_{ij}(z)$ は, 高々
 $d_j - d_i$ 次の多項式 ($\emptyset$ は 0 とおく) と仮定してよい.

変換行列は

$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & & \\ & & * & \\ & 0 & & \\ & & & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

よ、こゝで完全列ができた。($G = V_K$ の自己同型群)

$$\{1\} \rightarrow G_1 \rightarrow G \rightarrow GP(1) \rightarrow \{1\}$$

$$\{1\} \rightarrow G_m \rightarrow G_2 \rightarrow G_1 \rightarrow \{1\}$$

$$\{1\} \rightarrow G_a^{N-n-1} \rightarrow G_2 \rightarrow G_m^{n+1} \rightarrow \{1\}$$

$$n > 1, \quad N = \sum_{i,j} (d_j - d_i + 1) \quad n > 1 \text{ () 内通の時は } 0 \text{ とお$$

く。

$$n > 1 \text{ かつ } 2 \quad H^1(K, G) = 0.$$

§4. 代数的変形

ここでも問題を素朴にのべてれば、

問題Ⅲ. 有理多様体の代数的変形は有理的であるか？

もう少しきちんと定式化すると、 k : 代数的閉体、そして、

$X, Y, \dots$ を k -代数的概形として、 $f: X \rightarrow Y$ 、上への

単射、 $0 \in Y$ を閉点、 $X_0 = f^{-1}(0)$: 非特異多様体、又、 $1 \in Y$

を他の任意の閉点とする。問題は、

X_0 が有理的なら X_1 は常に有理的か?

さて $n = \dim X_0 = 1, 2$ なら正しい. $n = 2$ の時の複素解析
 的の場合の証明は []. 代数的の場合も類似に証明できる.

1. p_g, g は代数的変形の不変量である. *

∴ $12(p_g - g + 1) = c_1^2 + c_2$, 是不変, c_1^2 も不変, 又 (Igusa?)

Betti 数 $b_2 = c_2 + 4g - 2$ も不変 よって, p_g, g は不変量.

2. $c_1^2 \geq 0$ として証明.

$\Sigma = \{y \mid X_y : \text{有理的}\}$, とおくと, Castelnuovo (Zariski) の
 定理により Σ : 閉集合. 次に $Y - \Sigma$: 開集合をえらう. $1 \in Y - \Sigma$
 も閉点とする. K_1 を X_1 の canonical divisor とする. $P_2(X_1)$
 $= \dim H^0(X_1, \mathcal{O}(2K_1)) (= \ell(2K_1), \dots \text{と略記しよう}) > 0$
 にあるから, $\ell(-2K_1) = 1$ or 0 . 1) $\ell(-2K_1) = 1$ なら
 $2K_1 \sim 0$ (線型同値). さて, $\mathcal{L} = (\Omega_{X/Y}^2)^{\otimes 2}$ とおくと
 $\mathcal{L}_1 \simeq (\mathcal{O}_X)_1$ を意味するから, [3] Ⅲ §4 によると, $g = \dim H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_1}) = 0$ に注意すると, 1 の近傍 U がある. $\mathcal{L}_U \simeq (\mathcal{O}_X)|_U$
 U の y に対して $P_2(X_y) = 1$ 即ち $U \subset Y - \Sigma$.

2) $\ell(-2K_1) = 0$, 半連続性の定理より, 1 の近傍 U がある,
 2 $y \in U$ に対して $\ell(-2K_y) = 0$, したがって, K_y は X_y の cano-
 nical divisor. Riemann-Roch の不等式により,

$$P_2(X_y) \geq -\ell(-2K_y) + 3K_y^2 + 1 = 3c_1^2 + 1 \geq 1.$$

* たしか GB3 にあるように確か!

即ち $U \subset Y - \Sigma$

3. $C^2 < 0$ のとき. Enriques Mumford の定理によると, $\rho = 0$ の極小モデルの C^2 は 非負. $\gamma = (2, 2, 0)$ 以下の議論を修正する. $\sigma = \sigma_{\gamma, 1}$, $\text{Spec } \hat{\mathcal{O}}$ 上に $X_{\hat{\mathcal{O}}} = X \times_{\gamma, \text{Spec } (\hat{\mathcal{O}})}$ をつくと, X_1 にある例外曲線は γ に σ の $\hat{\mathcal{O}}$ 上で blow down できる. それをくりかえして, $\rho(X_1) \geq 0$. さて, Y の生成素 $*$ に対する X_* の不変量は, 体をあけても変わらない. よって $\rho_2(X_*) = \rho_2(X_{(\hat{\mathcal{O}})}) = \rho_2(X_1) > 0$ ($\hat{\mathcal{O}}$ は $\hat{\mathcal{O}}$ の分数体) よって $* \in Y - \Sigma$ これは, Σ : 開集合に矛盾.

9.3 の時は小さい変形の時すら全くわかんない. しかし, 問題 II — Geometric Criterion が容易に示され, かつ, ある種の安定性の定理を仮定するなら, 以下のような議論が可能である.

$\varphi: X \rightarrow Y$, $X_0 = \varphi^{-1}(a)$: 有理的とする.

X_0 は $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^1$ と双有理同値だから, そのアウフをとり, 特異点を除去すると, 次のようになる. X_0 に, 非特異中心のモノイダル変換をくりかえすと, $\mathbb{P}^1$ 上の一般のファイバーが, $\mathbb{P}^{n-1}$ を非特異中心のモノイダル変換した, ファイバー空間になる. $\gamma = (2, 2)$. X_0 は, 有理的だから, 偶数次元のサイクルは皆代数的 部分, 全次元 ≥ 2 の非特異部分の次元は ≥ 2 である.

う。それらを中心にモノイダル変換を繰返して、

$\varphi': X' \rightarrow Y, \quad X'_0 = \varphi'^{-1}(0)$ は X_0 に非特異中心のモノイダル変換してびきた前述のもの, $\mathbb{P}^1$ への onto 写像があり、この一般ファイバー F' は有理的。

さて, F' の定める線バンドル $[F']$ を F' に制限すると, 0 .
又 F' は有理的より, $H^1(F', \mathcal{O}_{F'}) = 0$ (安定性の定理によ
り), F' は近傍に延長できる. $F'_1 \subset X'_1$ としよう. さて, 低次元の "有理性は変形により不変" を用いると, F'_1 も有理的.
又近傍だから, $\dim H^1(X'_1, \mathcal{O}_{X'_1}) \leq \dim H^1(X'_0, \mathcal{O}_{X'_0}) = 0$. 又
 $[F']|_{F'_1} = 0$. よって

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{X'_1} \rightarrow \mathcal{O}_{X'_1}(F'_1) \rightarrow \mathcal{O}_{F'_1} \rightarrow 0,$$

により, $\dim H^0(X'_1, \mathcal{O}_{X'_1}(F'_1)) = 2$.

ゆえに, $X'_1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ かつ一般ファイバーは F'_1 有理的になる. そこで, Geometric Criterion によると, X'_1 は有理的. よって X_1 も有理的!

文献表

- [1] 現代代幾何 (数学論文集) 東京 1968
- [2] R. Goren, ^{Gravitation and} Algebraic deformation of a projective space
Journ. of Kyoto Univ. 3.1 (1968) 21~47.
- [3] A. Grothendieck, E.G.A.
- [4] ———, S.G.A.
- [5] ———, T.D.T.E
- [6] ———, GB (Groupes de Brauer)
- [7] S. Iitaka, Deformation of compact complex surfaces
- [8] K. Kodaira, Stability
- [9] ———, On the structure I. II. III. IV
- [10] D. Mumford, Appendix to the Zariski paper Ann. Math
- [11] ———, Introduction to Alg. Geo. (mimeographed)
- [12] Yu. Manin, Rational surfaces over a perfect field. I.H.E.S
- [13] M. Nagata, ——— Valuation ——— Nagoya J. (Nashino volume)
- [14] L. Roth, Algebraic Three folds
- [15] J. P. Serre, Cohomologie galoisienne
- [16] B. Zariski, Criterion of rationality. ——— Amer. J.
- [17] H. Hironaka, Smoothing ——— Amer. J. Math 1968.

東大は封鎖中の文献を調へたこともできなくなり、証明も粗いおぼろけに完全なものをあつて定めたから御容赦願う。