

推移力学系に対応する C^* 環上の状態

東北大教養 武元英夫 (Hideo Takemoto)

序論. 推移力学系に対応する C^* 環については多くの人達によって研究されてきた. これらの C^* 環は可換な C^* 環上の自己同型写像による接合積で表わすことが出来ることより, 本講では, この可換な C^* 環上の pure state の拡大について考えていく. しかも, この拡大の一貫性と, 力学系との関係で, minimality, さらに, 可換な C^* 環を接合積にうめこんだ場合での, maximality 等の関係について調べていく.

完全正規直交系 $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ をもつヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ と本講では固定した概念として用いていく. ここで, $\mathbb{Z}$ はすべての整数の集合を表わしている.

コンパクト・ハウスドルフ空間 Ω から Ω 上への同型(位相的)写像 σ と, $\mathbb{Z}$ から Ω への写像 φ で, $\varphi(\mathbb{Z})$ が Ω で稠密である場合, 系 $\Sigma = (\Omega, \sigma, \varphi)$ が推移力学系と呼ばれるのは, $\sigma(\varphi(n)) = \varphi(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$ が成立している場合である.

推移力学系 $\Sigma = (\Omega, \sigma, \varphi)$ に対応して、我々は $\mathbb{H}$ 上の有界線形作用素からなる C^* 環 $C^*(\Sigma)$ を次のように定義する。

S と $S e_n = e_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}$ によって定まる $\mathbb{H}$ 上のユニタリ作用素であるが、本講では S を推移作用素と呼ぶことにする。 Ω 上の複素数値連続関数全体からなる可換な C^* 環を $C(\Omega)$ と書いていく。 $f \in C(\Omega)$ に対し、 $\mathbb{H}$ 上の作用素 $\pi(f)$ と $\pi(f) e_n = f(\varphi(n)) e_n$, $n \in \mathbb{Z}$ によって定義する。そのとき、 $\pi(f)$ を f に対応することによって、 $\pi(C(\Omega)) = \{ \pi(f) ; f \in C(\Omega) \}$ と $C(\Omega)$ は $*$ 同型になる。さらに、 $S \pi(C(\Omega)) S^* = \pi(C(\Omega))$, $S \pi(f) S^* = \pi(\sigma^{-1} f)$ が成立している。但し、 $(\sigma^{-1} f)(\omega) = f(\sigma^{-1} \omega)$, $\omega \in \Omega$ を表わしている。そこで、 $\{ \pi(C(\Omega)), S \}$ によって生成される C^* 環を $C^*(\Sigma)$ と表わし、推移力学系 $\Sigma = (\Omega, \sigma, \varphi)$ に対応する C^* 環と呼んでいく。すると、 $\alpha(\pi(f)) = S \pi(f) S^*$, $f \in C(\Omega)$, によって定まる $\pi(C(\Omega))$ 上の $*$ 同型写像 α による接合積 (C^* 環としての) $\pi(C(\Omega)) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ と $C^*(\Sigma)$ が同型であることが知られている (O'Donovan [], 河村一武元 []). さらに、我々は $C^*(\Sigma)$ に対し、次の性質を持つ、 P_n を $\mathbb{H}$ から 1 次元部分空間 $[e_n]$ への射影写像とする。 $a = (a_n) \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ に対し、 $\pi(a) e_n = a_n e_n$, $n \in \mathbb{Z}$ によって $\mathbb{H}$ 上の作用素 $\pi(a)$ が定義される。すると、 $\pi(f)$, $f \in C(\Omega)$, は数列 $(f(\varphi(n)))$ によって $\pi(\ell^\infty(\mathbb{Z}))$ の元とみられる。すなわち、 $\pi(C(\Omega))$ は $\pi(\ell^\infty(\mathbb{Z}))$ の C^* 部分環と考えられる。

逆に, $\mathcal{A}$ を $S\mathcal{A}S^* = \mathcal{A}$ となる $\pi(\ell^\infty(\mathbb{Z}))$ の C^* 部分環とすると,
 $\mathcal{A}$ に対応して推移力学系 $\Sigma = (\Omega, \sigma, \varphi)$ が次のように得られる.
 α を $\alpha(T) = STS^*$, $T \in \mathcal{A}$, によって得られる $\mathcal{A}$ の $*$ 同型とする.
 Ω を $\mathcal{A}$ の spectrum space とすると, α に対し, $\alpha(\pi(a))^\wedge(\omega) =$
 $\pi(a)^\wedge(\sigma^{-1}\omega)$, $\omega \in \Omega$, となる Ω から Ω 上への位相同型写像 σ が
得られる. さらに, $\pi(a) = \pi((a_n)) \in \mathcal{A}$ に対し, $\varphi(n)(\pi(a)) = a_n$ と
おくと, $\varphi(n)$ は $\mathcal{A}$ から $\mathbb{C}$ への準同型写像となる. これから,
 $\varphi(n)$ は Ω の元となり, $\sigma(\varphi(n)) = \varphi(n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, も示される. これ
によって我々は推移力学系 $\Sigma = (\Omega, \sigma, \varphi)$ を得る.

推移力学系 $\Sigma = (\Omega, \sigma, \varphi)$ に対し, $C^*(\Sigma)$ から $\pi(C(\Omega))$ 上へのノ
ルム 1 の射影 E_Σ が次のように得られる. $T \in B(\mathcal{H})$ に対し, P_n
が 1 次元射影という事を考えると, $E(T) = \sum P_n T P_n$ によって
定義される作用素 E は $B(\mathcal{H})$ から $\pi(\ell^\infty(\mathbb{Z}))$ へのノルム 1 の射影
となる. この $C^*(\Sigma)$ への制限を E_Σ とおくと求めるものが得ら
れる. 特に, $\{f_k\}_{k=-m}^m \subset C(\Omega)$ に対し, $E_\Sigma\left(\sum_{k=-m}^m \pi(f_k) S^k\right) =$
 $\pi(f_0)$ となっている.

$\pi(C(\Omega))$ 上のどんな pure state も Ω の元 ω によって $\varphi_\omega(\pi(f)) =$
 $f(\omega)$, $f \in C(\Omega)$, とする pure state φ_ω によって完全に決定
されている. 本講では, φ_ω の $C^*(\Sigma)$ への拡大について考える.
この拡大の一意性と推移力学系 $(\Omega, \sigma, \varphi)$ の minimality との
関係, さらに, $C^*(\Sigma)$ の可換 C^* 環となっている $\pi(C(\Omega))$ の

maximality との関係について調べる。 $\varphi_\omega \circ E_\Sigma$ が φ_ω の $C^*(\Sigma)$ への
 1 つの state としての拡大になっている事を考えると, φ_ω の
 $C^*(\Sigma)$ への state の拡大が一意的であるかという事は, state の拡大
 が $\varphi_\omega \circ E_\Sigma$ だけであることを調べることに同じである。

結果. 推移力学系 $\Sigma = (\Omega, \sigma, \varphi)$ に対応する C^* 環 $C^*(\Sigma)$ に
 対し, $\text{Irr}_n(C^*(\Sigma))$ を $C^*(\Sigma)$ の n 次元ヒルベルト空間上への既約
 表現の集合とする. $\Omega_n = \{ \omega \in \Omega; \sigma^n \omega = \omega, \sigma^k \omega \neq \omega, 1 \leq k$
 $\leq n-1 \}$ とおく. その時, 河村-富山-棉谷[] は $\text{Irr}_n(C^*(\Sigma))$
 と $\Omega_n \times \mathbb{T} / \sim$ ($\sim$ はある意味での同値類, [] を見よ) 位相同
 値であることを示している. 本講では, この考えの下で, ω
 の periodicity に対して次の事をもち.

命題 1. 推移力学系 $\Sigma = (\Omega, \varphi, \sigma)$ と点 $\omega \in \Omega$ を与える. ω
 $\in \Omega_n$ であるならば, $C^*(\Sigma)$ 上の state ψ で, $\psi \neq \varphi_\omega \circ E_\Sigma$,
 $\psi|_{\pi(C(\Omega))} = \varphi_\omega$ かつ, ψ によって導入される表現空間 $(\pi_\psi, \mathcal{H}_\psi)$
 は n 次元空間上への既約表現となっている.

逆に, ρ を $C^*(\Sigma)$ の n 次元ヒルベルト空間への既約表現とす
 ると, $\Omega_n \ni \omega$ と, φ_ω の state 拡大 ψ が存在し, ρ と π_ψ は
 ユニタリ同値となる.

命題 1 によつて, $\omega \in \Omega$ が periodic point であるときは, φ_ω の state 拡大は一意的でないことが示された. それでは, $\omega \in \Omega$ が periodic point でないときはどうであることを調べる. それに対して, 我々は次の性質を知ることによつて, そのような点 ω に対し, φ_ω の state 拡大は $\varphi_\omega \circ E_\Sigma$ だけであることを示すことができる.

補題 2. $\mathcal{A}$ を単位元をもつ C^* 環とする. ψ を $\mathcal{A}$ 上の state として, 今, $\mathcal{A}$ の元 A が $|\psi(A)| = \|A\|$ となつているとすれば, すべての $B \in \mathcal{A}$ に対し, $\psi(AB) = \psi(A)\psi(B) = \psi(BA)$ が成立する.

以上より, 次の定理が得られる.

定理 3. 推移力学系 $\Sigma = (\Omega, \sigma, \varphi)$ に対し, Ω は無限集合であるとする. $\omega \in \Omega$ に対し, $\varphi_\omega \circ E_\Sigma$ が φ_ω の一意な state 拡大である必要十分条件は ω が periodic point でないことである.

推移力学系 $\Sigma = (\Omega, \sigma, \varphi)$ が minimal であるとは, $\sigma F \subseteq F$ となる Ω の閉集合 F は $\emptyset$ または Ω だけである. これから, Σ が

minimal であるときは, Ω が有限集合か, または, Ω は periodic point をもたない. これから, $\Sigma = (\Omega, \sigma, \varphi)$ が minimal な推移力学系であって, Ω が無限集合であるとき, Ω のどんな点 ω に対して, φ_ω は一意な state 拡大をもつことになる. しかし, この逆が一般に成立しないことが, 次の例からわかる.

例 4. $\mathbb{Z}$ の Stone-Čech コンパクト化 $\beta\mathbb{Z}$ に対し, 推移力学系 $\Sigma = (\beta\mathbb{Z}, \sigma, \varphi)$ を次のように定義する. 整数からなる net $\omega = \{n_\alpha\} \in \beta\mathbb{Z}$ に対し, $\sigma(\{n_\alpha\}) = \{n_\alpha + 1\}$ によって $\beta\mathbb{Z}$ から $\beta\mathbb{Z}$ 上への位相同型写像 σ を定める. φ を $\mathbb{Z}$ の $\beta\mathbb{Z}$ への自然な埋め込みとする. すると, $\Sigma = (\beta\mathbb{Z}, \sigma, \varphi)$ は推移力学系となっている. その時, Σ は minimal ではない力学系であることは明らかであり, さらに, Stone-Čech のコンパクト化の定義よりこの力学系が periodic point を持たないことが示される.

推移力学系 $\Sigma = (\Omega, \sigma, \varphi)$ に対し, $\pi(C(\Omega))$ 上の state φ_ω の $C^*(\Sigma)$ への state としての拡大が一意であるかどうかは, ω が σ に関して periodic point であるかどうかという事で完全に決定された. さらに, 各点 $\omega \in \Omega$ に対する state φ_ω が $C^*(\Sigma)$ への state としての拡大の一意性と力学系 $\Sigma = (\Omega, \sigma, \varphi)$

の minimality についての関係についても調べた。次に可換な C^* 環 $\pi(C(\Omega))$ の $C^*(\Sigma)$ での maximality と各点 $\omega \in \Omega$ に対応する state φ_ω の $C^*(\Sigma)$ への state としての拡大の一意性との関係について調べよう。すべての点 $\omega \in \Omega$ に対して、 φ_ω の拡大が一意であるならば、 $\pi(C(\Omega))$ が $C^*(\Sigma)$ での maximal な可換 C^* 環であることは Stone-Weierstrass の定理によって明らかである。ここで、以下で示すことより、逆がかならずしも成立しないという事を示そう。

命題5. 推移力学系 $\Sigma = (\Omega, \sigma, \varphi)$ において、 Ω が無限集合であるとする。その時、 $\pi(C(\Omega))$ は $C^*(\Sigma)$ での maximal な可換 C^* 環である。

証明. Ω が無限集合であるので、河村-武元 [] Proposition 1.2] によって φ は injective である。さらに、序論で述べた注意によって、 $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ の C^* 部分環 $\mathcal{A}$ が存在し、 $\pi(\mathcal{A}) = \pi(C(\Omega))$ となっている。しかも、このとき、 $\phi(n)(\pi(a)) = a_n$, $a = (a_n) \in \mathcal{A}$ が成立している。そしてすべての $a = (a_n) \in \mathcal{A}$ に対し、 $T\pi(a) = \pi(a)T$ となる $C^*(\Sigma)$ の元とする。この T に対し、各 $n \in \mathbb{Z}$ に関し、 $Te_n = \sum \lambda_2^{(n)} e_l$ とおく。すると、各 $a = (a_n) \in \mathcal{A}$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対して次の式が成立する。

$$T\pi(a)e_n = a_n \sum \lambda_l^{(n)} e_l, \quad \pi(a)Te_n = \sum a_l \lambda_l^{(n)} e_l.$$

これから、すべての $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して、 $a_n \lambda_m^{(n)} = a_m \lambda_m^{(n)}$ が成立している。今、 φ が injective であるから、相異なる n は2つの整数 m, n をもってきて、 $a_m \neq a_n$ とする $\mathcal{A}$ の元 $a = (a_n)$ が存在する。このように、 m, n と a を考えると、 $\lambda_m^{(n)} = 0$ とする。従って、 $m \neq n$ ならば、 $\lambda_m^{(n)} = 0$ が成立する。そこで、 $\lambda_n = \lambda_n^{(n)}$ とおくと、 $Te_n = \lambda_n e_n, n \in \mathbb{Z}$ とする。従って、 $TP_n = \lambda_n P_n, n \in \mathbb{Z}$ である。 $\mathbf{b} = (\lambda_n) \in \ell^\infty(\mathbb{Z})$ とおくと、 $T \in C^*(\Sigma)$ であることと、 $E_\Sigma(T) = \pi(\mathbf{b}) \in \pi(C(\Omega)) = \pi(\mathcal{A})$ であることから、 $\pi(\mathbf{b}) = T \in \pi(C(\Omega))$ となり、従って、 $\pi(C(\Omega))$ は $C^*(\Sigma)$ で maximal な可換 C^* 環となっている。

すべての点 $\omega \in \Omega$ に対し、state φ_ω の $C^*(\Sigma)$ 上の state としての拡大が一意的であるとき、前にも述べたように、 $\pi(C(\Omega))$ が $C^*(\Sigma)$ において maximal な可換 C^* 環となっている。しかし、この逆が成立しないことは、上の命題5を考えると、次の例によって示される。

例6. ω_1 を負の整数全体の集合の集積点、 ω_2 を自然数

全体の集合の集積点とする。 $\Omega = \{\omega_1\} \cup \mathbb{Z} \cup \{\omega_2\}$ とする。
 σ は次のように定義される Ω から Ω への位相同型写像と
 する。 $\sigma\omega_1 = \omega_1$, $\sigma\omega_2 = \omega_2$, $\sigma(n) = n+1$ ($n \in \mathbb{Z}$)。さら
 に $\varphi(n) = n$, $n \in \mathbb{Z}$ によって $\mathbb{Z}$ から Ω への写像と定義する。
 このとき, $\Sigma = (\Omega, \sigma, \varphi)$ が推移力学系になっていることは
 明らかである。今, Ω が無限集合であることより, 命題5に
 よって, $\pi(C(\Omega))$ は $C^*(\Sigma)$ において maximal な可換 C^* 環で
 ある。しかし, ω_1, ω_2 が σ に関し, 不動点であることより
 states $\varphi_{\omega_1}, \varphi_{\omega_2}$ は更に, $C^*(\Sigma)$ への state の拡大としてけ
 一意には拡大されない。

参考文献

- [1] J. Bunce and J.A. Deddens, A family of simple C^* -algebras related to weighted shift operators, J. Functional Analysis, 19(1975), 13 - 24.
- [2] D.P. O'Donovan, Weighted shifts and covariance algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 208(1975), 1 - 25.
- [3] P. Ghatage and W.J. Phillips, C^* -algebras generated by weighted shift II, Indiana Univ. Math. J., 30(1981), 539 - 546.
- [4] P. Green, C^* -algebras of transformation groups with smooth orbit space, Pacific J. Math., 72(1977), 71 - 97.
- [5] S. Kawamura and H. Takemoto, C^* -algebras associated with shift dynamical systems, J. Math. Soc. Japan, 36(1984), 279 - 293.
- [6] S. Kawamura, J. Tomiyama and Y. Watatani, Finite-dimensional irreducible representations of C^* -algebras associated

with topological dynamical systems, to appear in Math. Scand.

- [7] S.C. Power, Simplicity of C^* -algebras of minimal dynamic systems, J. London Math. Soc., 18(1978), 534 - 538.
- [8] N. Riedel, Classification of the C^* -algebras associated with minimal rotations, Pacific J. Math., 101(1982), 153 - 162.