

3・4次元射影空間内の曲面に関する特異射影の数え上げ

北海道大学大学院理学院数学専攻 笹島 啓久

Takahisa SASAJIMA

Department of Mathematics,

Hokkaido University

1 序文

本稿では [14, 15] の概要について述べる. 主に複素正則写像芽の $\mathcal{A}$ -分類に付随する特性類理論を論じる. 安定特異点型に対する Thom 多項式はすでに十分に研究されているが, 安定ではない特異点型に対する Thom 多項式はほとんど研究されていなかった. そこで本稿では, $\mathcal{A}$ -分類における余次元の比較的小さい特異点型 (表 1, 2, 3) に対する Thom 多項式を紹介する. 結果 (表 4, 5, 6) はいずれも新しいものである.

本稿で紹介した内容の他にも, 同種の古典的公式の再証明や一般化を議論した. これらの結果は 19 世紀の古典的代数幾何における Salmon, Cayley, Baker らの諸結果の一般化に相当する.

2 $\mathcal{A}$ -分類における Thom 多項式

定義 2.1 二つの写像芽 f, g がソースとターゲットの適切な座標変換 (双正則写像芽) によって移り変わるとき, f と g は $\mathcal{A}$ -同値であるといい, $f \sim_{\mathcal{A}} g$ などとかく.

定義 2.2 同じ底空間 X 上にファイバーが $\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^l$ である二つのファイバー束 E, F があり, E の零切断 Z_E を F の零切断 Z_F へ写しファイバーを保つような正則写像の Z_E のまわりでの芽

$$\begin{array}{ccc} (E, Z_E) & \xrightarrow{\varphi} & (F, Z_F) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & X & \end{array}$$

を正則写像芽族と呼ぶ.

これは, X の点 x を一点定めるごとに, 局所的に写像芽 $\varphi_x: \mathbb{C}^k, 0 \rightarrow \mathbb{C}^l, 0$ を定める (X をパラメータ空間とした) 族と見なされる.

定理 2.3 (Thom ('56), Haefliger-Kosinski ('57), Ohmoto ('12)) φ を $E \rightarrow F$ への正則写像芽族, それぞれのファイバーの階数を k, l とする. このとき, $\mathcal{A}$ -特異点 η に対し, $\eta(\varphi) := \{x \in X \mid \varphi_x \sim_{\mathcal{A}} \eta\}$ とおくと,

$$Tp_{\mathcal{A}}(\eta) \in \mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots, c_k, c'_1, c'_2, \dots, c'_l]$$

となる多項式がただ一つ存在し,

$$\text{Dual}[\overline{\eta(\varphi)}] = Tp_{\mathcal{A}}(\eta)(c(E), c(F)) \in H^*(X)$$

を満たす.

写像の $\mathcal{A}$ -特異点型 (写像芽の $\mathcal{A}$ -同値類) に応じて特性類が唯一に定まり, これは Thom 多項式と呼ばれる. ここで, $c_i = c_i(E)$, $c'_j = c_j(F)$ は E, F の Chern 類であり, 以下においても同様の記法を用いる. Thom 多項式を実際に計算する手段として, R. Rimányi による Restriction method ([13]) を用い, 数式処理ソフトウェア *Mathematica*® を援用した.

例 2.4 $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ の安定特異点型である $S_0: (x, y^2, xy)$ (クロスキャップ) の Thom 多項式は次で与えられる:

$$Tp_{\mathcal{A}}(S_0) = c_1^2 - c_2 - c_1 c'_1 + c'_2.$$

この特性類は写像 $f: X \rightarrow Y$ が有するクロスキャップの個数を数え上げる一すなわち, f が局所安定写像であるとき, Chern 類 $c_i = c_i(TX)$, $c'_j = f^* c_j(TY)$ を $Tp_{\mathcal{A}}(S_0)$ に代入することで, S_0 型特異点集合のホモロジー類が計算できる.

定理 2.5 (Porteous ('60), Damon ('72), Ronga ('72), etc) $f: X \rightarrow Y$ を安定写像とする. このとき $\mathcal{K}$ -特異点 η に対し, $Tp_{\mathcal{K}}(\eta) \in \mathbb{Z}[\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots]$ となる多項式がただ一つ存在し,

$$\text{Dual}[\overline{\eta(f)}] = Tp_{\mathcal{K}}(\eta)(c(f)) \in H^*(X)$$

を満たす. ただし, $\bar{c}_i$ は, 商チャーン類 $\bar{c}_i(f) = c_i(f^*TY - TX)$ を表す:

$$c(f^*TY - TX) = \frac{1 + f^*c_1(TY) + f^*c_2(TY) + \dots}{1 + c_1(TX) + c_2(TX) + \dots} = 1 + \bar{c}_1(f) + \bar{c}_2(f) + \dots.$$

特異点型	$\mathcal{A}$ -余次元	標準形
Regular	0	(x, y)
Fold	1	(x, y^2)
Cusp	2	$(x, xy + y^3)$
Lips/Beaks	3	$(x, y^3 + x^2y)$
Swallowtail	3	$(x, xy + y^4)$
Goose	4	$(x, y^3 + x^3y)$
Butterfly	4	$(x, xy + y^5 + y^7)$
Gulls	4	$(x, xy^2 + y^4 + y^5)$
Sharksfin	4	$(x^2 + y^3, x^3 + y^2)$

表 1: $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ における $\mathcal{A}$ -余次元 4 以下の写像芽 (Rieger ('87)).

特異点型	$\mathcal{A}$ -余次元	標準形
Immersion	2	$(x, y, 0)$
S_0	2	(x, y^2, xy)
S_k	$k+2$	$(x, y^2, y^3 + x^{k+1}y), \quad k = 1, 2, 3$
B_k	$k+2$	$(x, y^2, x^2y + y^{2k+1}), \quad k = 2, 3$
C_3	5	$(x, y^2, xy^3 + x^3y)$
H_k	$k+2$	$(x, y^3, xy + y^{3k-1}), \quad k = 2, 3$
$P_3(c)$	5	$(x, xy + y^3, xy^2 + cy^4), \quad c \neq 0, 1/2, 1, 3/2$

表 2: $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ における $\mathcal{A}$ -余次元 5 以下の写像芽 (Mond ('85)).

特異点型	$\mathcal{A}$ -余次元	標準形
A_0	0	(x, y, z)
A_1	1	(x, y, z^2)
A_2	2	$(x, y, yz + z^3)$
A_3	3	$(x, y, yz + xz^2 + z^4)$
A_4	4	$(x, y, yz + xz^2 + z^5)$
C	4	$(x, y, z^3 + (y^2 + x^2)z)$
D	4	$(x, y, yz + z^4 + x^2z^2)$
$I_{2,2}$	4	$(x, yz, y^2 + z^2 + xy)$

表 3: $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ における $\mathcal{A}$ -余次元 4 以下の写像芽 (Marar-Tari ('90) [5, 8]).

特異点型	$\mathcal{A}$ -余次元	Thom 多項式
Fold ($=A_1$)	1	$\bar{c}_1$
Cusp ($=A_2$)	2	$\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2$
Swallowtail ($=A_3$)	3	$\bar{c}_1^3 + 3\bar{c}_1\bar{c}_2 + 2\bar{c}_3$
Lips/Beaks	3	$-2c_1^3 + 5c_1^2c'_1 - 4c_1c_1'^2 - c_1c_2 + c_2c'_1 + c_1'^3$
Goose	4	$2c_1^4 + 5c_1^2c_2 + 4c_2^2 - 7c_1^3c'_1 - 10c_1c_2c'_1 + 9c_1^2c_1'^2 + 5c_2c_1'^2 - 5c_1c_1'^3 + c_1'^4 - 2c_1^2c'_2 - 6c_2c'_2 + 4c_1c'_1c'_2 - 2c_1'^2c'_2 + 2c_2'^2$
Gulls	4	$6c_1^4 - c_1^2c_2 - 4c_2^2 - 17c_1^3c'_1 + 4c_1c_2c'_1 + 17c_1^2c_1'^2 - 3c_2c_1'^2 - 7c_1c_1'^3 + c_1'^4 + 2c_1^2c'_2 + 6c_2c'_2 - 4c_1c'_1c'_2 + 2c_1'^2c'_2 - 2c_2'^2$
Butterfly ($=A_4$)	4	$\bar{c}_1^4 + 6\bar{c}_1^2\bar{c}_2 + 2\bar{c}_2^2 + 9\bar{c}_1\bar{c}_3 + 6\bar{c}_4$
Sharksfin ($=I_{2,2}$)	4	$\bar{c}_2^2 - \bar{c}_1\bar{c}_3$

表 4: $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ の写像芽に対する Thom 多項式.

写像芽

$$\mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^2, 0, \quad \mathbb{C}^2, 0 \rightarrow \mathbb{C}^3, 0, \quad \mathbb{C}^3, 0 \rightarrow \mathbb{C}^3, 0$$

に関して, 比較的余次元の小さい範囲において表 1, 2, 3 にあるような $\mathcal{A}$ -分類の結果が知られている.

本講演の主結果は, 以下のものである.

定理 2.6 ([14, 15]) 上記の写像芽の $\mathcal{A}$ -分類に対する Thom 多項式は, 表 4, 5, 6 で与えられる.

注意 2.7 写像芽 η の $\mathcal{A}$ -軌道の閉包が $\mathcal{K}$ -軌道に一致しているならば, $Tp_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}.\eta) = Tp_{\mathcal{K}}(\mathcal{K}.\eta)$ となる. すなわち, この Thom 多項式は商チャーン類の多項式となる. 下表 4, 5, 6 にはこのようなケースも含めてある. なお, 表 6 において, 表以外の安定特異点型 $A_\mu, I_{2,2}$ については表 4 で述べた ($\mathcal{K}$ -特異点型の) Thom 多項式と全く同じ形であるので省略している.

特異点型	$\mathcal{A}$ -余次元	Thom 多項式
$S_0 (=A_1)$	2	$\bar{c}_2$
S_1	3	$-3c_1^3 + 4c_1c_2 + 4c_1^2c'_1 - 2c_2c'_1 - c_1c_1'^2 - 3c_1c'_2 + c'_1c'_2 + c'_3$
S_2	4	$13c_1^4 - 22c_1^2c_2 + 3c_2^2 - 21c_1^3c'_1 + 19c_1c_2c'_1$ $+ 9c_1^2c_1'^2 - 3c_2c_1'^2 - c_1c_1'^3 + 14c_1^2c'_2 - 4c_2c'_2$ $- 9c_1c'_1c'_2 + c_1'^2c'_2 + c_2'^2 - 6c_1c'_3 + 2c'_1c'_3$
B_2	4	$11c_1^4 - 22c_1^2c_2 + c_2^2 - 17c_1^3c'_1 + 21c_1c_2c'_1$ $+ 7c_1^2c_1'^2 - 5c_2c_1'^2 - c_1c_1'^3 + 10c_1^2c'_2$ $- 5c_1c'_1c'_2 + c_1'^2c'_2 - c_2'^2 - 10c_1c'_3 + 4c'_1c'_3$
$H_2 (=A_2)$	4	$\bar{c}_2^2 + \bar{c}_1\bar{c}_3 + 2\bar{c}_4$
S_3	5	$-71c_1^5 + 149c_1^3c_2 - 48c_1c_2^2 + 132c_1^4c'_1 - 174c_1^2c_2c'_1$ $+ 20c_2^2c'_1 - 76c_1^3c_1'^2 + 53c_1c_2c_1'^2 + 16c_1^2c_1'^3$ $- 4c_2c_1'^3 - c_1c_1'^4 - 82c_1^3c'_2 + 53c_1c_2c'_2 + 75c_1^2c'_1c'_2$ $- 17c_2c'_1c'_2 - 18c_1c_1'^2c'_2 + c_1'^3c'_2 - 11c_1c_2'^2 + 3c'_1c_2'^2$ $+ 39c_1^2c'_3 - 9c_2c'_3 - 24c_1c'_1c'_3 + 3c_1'^2c'_3 + 3c'_2c'_3$
B_3	5	$-110c_1^5 + 286c_1^3c_2 - 76c_1c_2^2 + 192c_1^4c'_1 - 356c_1^2c_2c'_1$ $+ 32c_2^2c'_1 - 104c_1^3c_1'^2 + 134c_1c_2c_1'^2 + 24c_1^2c_1'^3 - 16c_2c_1'^3$ $- 2c_1c_1'^4 - 100c_1^3c'_2 + 54c_1c_2c'_2 + 70c_1^2c'_1c'_2 - 18c_2c'_1c'_2$ $- 20c_1c_1'^2c'_2 + 2c_1'^3c'_2 + 10c_1c_2'^2 - 2c'_1c_2'^2 + 106c_1^2c'_3$ $- 6c_2c'_3 - 72c_1c'_1c'_3 + 14c_1'^2c'_3 - 6c'_2c'_3$
C_3	5	$-33c_1^5 + 66c_1^3c_2 - 3c_1c_2^2 + 62c_1^4c'_1 - 85c_1^2c_2c'_1$ $+ c_2^2c'_1 - 38c_1^3c_1'^2 + 36c_1c_2c_1'^2 + 10c_1^2c_1'^3 - 5c_2c_1'^3$ $- c_1c_1'^4 - 30c_1^3c'_2 + 25c_1^2c'_1c'_2 - 8c_1c_1'^2c'_2$ $+ c_1'^3c'_2 + 3c_1c_2'^2 - c'_1c_2'^2 + 30c_1^2c'_3 - 22c_1c'_1c'_3 + 4c_1'^2c'_3$
H_3	5	$-48c_1^5 + 156c_1^3c_2 - 90c_1c_2^2 + 80c_1^4c'_1 - 182c_1^2c_2c'_1$ $+ 42c_2^2c'_1 - 36c_1^3c_1'^2 + 48c_1c_2c_1'^2 + 4c_1^2c_1'^3$ $- 2c_2c_1'^3 - 60c_1^3c'_2 + 84c_1c_2c'_2 + 46c_1^2c'_1c'_2 - 26c_2c'_1c'_2$ $- 6c_1c_1'^2c'_2 - 12c_1c_2'^2 + 2c'_1c_2'^2 + 45c_1^2c'_3 - 27c_2c'_3$ $- 27c_1c'_1c'_3 + 2c_1'^2c'_3 + 9c'_2c'_3$
$P_3(c)$	5	$-16c_1^5 + 48c_1^3c_2 - 24c_1c_2^2 + 28c_1^4c'_1 - 58c_1^2c_2c'_1$ $+ 11c_2^2c'_1 - 14c_1^3c_1'^2 + 17c_1c_2c_1'^2$ $+ 2c_1^2c_1'^3 - c_2c_1'^3 - 20c_1^3c'_2 + 24c_1c_2c'_2 + 17c_1^2c'_1c'_2$ $- 8c_2c'_1c'_2 - 3c_1c_1'^2c'_2 - 4c_1c_2'^2 + c'_1c_2'^2 + 14c_1^2c'_3$ $- 6c_2c'_3 - 9c_1c'_1c'_3 + c_1'^2c'_3 + 2c'_2c'_3$

表 5: $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$ の写像芽に対する Thom 多項式.

特異点型	$\mathcal{A}$ -余次元	Thom 多項式
C	4	$2c_1^4 + c_1^2 c_2 - 2c_2^2 + 3c_1 c_3 - 7c_1^3 c'_1 - 3c_3 c'_1$ $+ 9c_1^2 c'_1{}^2 - c_2 c'_1{}^2 - 5c_1 c'_1{}^3 + c'_1{}^4 - 2c_1^2 c'_2$ $+ 4c_2 c'_2 + 2c_1 c'_1 c'_2 - 2c'_2{}^2 - 2c_1 c'_3 + 2c'_1 c'_3$
D	4	$18c_1^4 - 21c_1^2 c_2 - 2c_2^2 + 8c_1 c_3 - 45c_1^3 c'_1 + 31c_1 c_2 c'_1$ $- 6c_3 c'_1 + 40c_1^2 c'_1{}^2 - 12c_2 c'_1{}^2 - 15c_1 c'_1{}^3 + 2c'_1{}^4 + 13c_1^2 c'_2$ $+ 4c_2 c'_2 - 17c_1 c'_1 c'_2 + 6c'_1{}^2 c'_2 - 2c'_2{}^2 - 8c_1 c'_3 + 6c'_1 c'_3$

表 6: $\mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ の写像芽に対する Thom 多項式.

3 Thom 多項式の応用

3.1 3次元射影空間に定義された通常特異点を持つ曲面の射影

X を 3 次元射影空間 $\mathbb{P}^3$ の中で通常特異点 (クロスキャップ, 二重点, 三重点) を持つ次数 d の射影曲面とする. クロスキャップ, 三重点それぞれの個数を, C , T , 二重点のなす曲線 (二重曲線と呼ぶ) の次数を e_0 とおく. また, M をなめらかな曲面, $f: M \rightarrow \mathbb{P}^3$ を安定写像, $f(M) = X$ とする. 後で利用する記号として, 以下の量を導入する:

$$f_*(1) = da, \quad f_* c_1(TM) = \xi_1 a^2, \\ f_* c_1^2(TM) = \xi_2 a^3, \quad f_* c_2(TM) = \xi_{01} a^3.$$

ここで, $f_*: H_*(M) \rightarrow H_*(N)$ は誘導準同型, $a \in H^2(\mathbb{P}^3)$ は $\mathbb{P}^3$ の超平面類である. $d, \xi_1, \xi_2, \xi_{01}$ は写像 f の複素コボルディズム不変量である.

曲面 X 上にない一点 q を取れば, 自然な射影 (視点 q からの中心射影) $\pi_q: \mathbb{P}^3 - q \rightarrow \mathbb{P}^2$ が定まる.

定理 3.1 (cf. Mather ('73), Bruce-Kirk ('00)) ほとんどすべての点 q において, 写像 $\varphi_q := \pi_q \circ f: M \rightarrow \mathbb{P}^2$ は安定写像となる.

合成写像 φ_q が M 上のある点 p で局所不安定になるとき, この写像芽を特異射影と呼び, q と $x = f(p)$ を結び直線の特異射影を与える特異視線と呼ぶ. 特異射影を与えるような視点 q 全体は, $\mathbb{P}^3$ 上の曲面をなす. 実際, この曲面は特異視線全体からなる線織面である. 特異射影は Arnold-Platonova により以下のように分類されている ([1, 12] 参照). なお, 一般的な位置にあるクロスキャップの射影については [16] で調べられている.

特異点型	M 上の余次元	$\mathcal{A}$ -余次元	標準形	X 上での点の軌跡
Fold	0	1	(x, y^2)	
Cusp	0	2	$(x, xy + y^3)$	
Lips/Beaks	1	3	$(x, y^3 + x^2y)$	parabolic
Swallowtail	1	3	$(x, xy + y^4)$	Flecnodal
Goose	1	4	$(x, y^3 + x^3y)$	parabolic
Butterfly	2	4	$(x, xy + y^5 + y^7)$	Flecnodal
Gulls	2	4	$(x, xy^2 + y^4 + y^5)$	Cusp of Gauss
Sharksfin	2	4	$(x^2 + y^3, x^3 + y^2)$	crosscap

表 7: 中心射影の特異点分類 (特異射影の分類)。

定理 3.2 (Arnold-Platonova ('83), Bruce ('84), Yoshida-Kabata-Ohmoto ('14)) 通常特異点のみ持つ一般の位置にある曲面 X に対して, 任意の視点 q による中心射影による特異点は表 7 にあるように分類される。

X 上のほとんどすべての点 x では, 漸近線 (3 次で接する直線) は二つある。それらの直線が一つに重なるような点の軌跡は放物曲線と呼ばれる。放物曲線上では, その漸近線に沿って射影すると, Lips/Beaks 型の特異点を観察することができる。また, 漸近線の一つが曲面と 4 次以上の接触をしている直線に沿って射影すると Swallowtail 型の特異点を観察することができる。これらの点の軌跡は Flecnodal 曲線と呼ばれる。この曲線上の点で漸近線が Flecnodal 曲線に接する場合, その射影には Butterfly 型の特異点が観察できる。

M 上の点 p に対して, $x = f(p) \in X$ とし, x を通る直線 $l \in G(2, 4)$ を取る: $x \in l \subset \mathbb{P}^3$ 。この組 (p, l) に対して正則写像芽

$$\varphi_{p,l}: M, p \rightarrow \mathbb{P}^2$$

を定義することができる。ここで $\mathbb{P}^2$ は直線 l の点 p における補空間を意味する。より正確に述べれば, $(\mathbb{C}^4$ に適当な内積を入れて) 点 x に対する l 上の無限遠点 $q_{x,l}$ を取り, $q_{x,l}$ からの中心射影 $\mathbb{P}^3 - \{q_{x,l}\} \rightarrow \mathbb{P}^2$ と写像芽 $f: M, p \rightarrow \mathbb{P}^3, x$ の合成が上記の $\varphi_{p,l}$ である。

これにより, すべての組 (p, l) ($p \in M, f(p) \in l$) からなる旗多様体上に正則写像芽族 $\varphi: (p, l) \mapsto \varphi_{p,l}$ が定義される。この正則写像芽族に対して, $\mathcal{A}$ -分類の Thom 多項式を応用することで次の定理を得る。

特異点型	次数
Lips/Beaks	$8d - 4\xi_1$
Swallowtail	$20d - 11\xi_1$
Goose	$22d - \xi_{01} - 24\xi_1 + 7\xi_2$
Butterfly	$5(30d - 5\xi_{01} + 12(-3\xi_1 + \xi_2))$
Gulls	$62d + 3\xi_{01} - 72\xi_1 + 19\xi_2$
Sharksfin	$6d - \xi_{01} - 4\xi_1 + \xi_2$

表 8: $\mathbb{P}^3$ 内の X における特異点型に対する軌跡の次数.

定理 3.3 通常特異点を持つ $\mathbb{P}^3$ 内に定義された一般の位置にある次数 d の曲面 X に対して, $f: M \rightarrow \mathbb{P}^3$ を安定写像, $X = f(M)$ とする. このとき, 特異射影による特異点型の軌跡の次数は, 表 8 にあるように $d, \xi_1, \xi_2, \xi_{01}$ により表される.

例えば, 放物曲線の次数は Lips/Beaks 型の軌跡の次数から与えられる. また, cusp of Gauss の個数は, Gulls 型の軌跡の次数により与えられる.

注意 3.4 (Goose 型について) 注意しなければならないのは, 写像芽 $\varphi_{p,l}: M, p \rightarrow \mathbb{P}^2$ は平行射影としてみなされるということである. これはアファイン幾何学における概念であるが, ここにおける平行射影とは, 点 $x \in X$ と直線 $l \in \mathbb{P}^3$ の組 (x, l) により定まる無限遠点 $q_{x,l}$ からの射影という意味である. 任意の放物曲線上の点 x においては, その点における漸近線上のある特別な視点からの中心射影により Goose 型 (またはそれよりも複雑な) 特異点を観察できることが知られている. 定理 3.3 において, X 上の 'Goose の軌跡' とは, 無限遠点 $q_{x,l}$ がちょうどこの特別な視点に一致しているような放物曲線上の点 $x \in X$ 全体 (有限集合) のことを意味している.

注意 3.5 Enriques Formula として古典的に次の等式が知られている. これは (多重芽の) $\mathcal{X}$ -分類の Thom 多項式からすぐに導くことができる.

$$\xi_1 = d(4 - d) + 2\epsilon_0,$$

$$\xi_2 = d(d - 4)^2 + (16 - 3d)\epsilon_0 + 3T - C,$$

$$\xi_{01} = d(d^2 - 4d + 6) + (8 - 3d)\epsilon_0 + 3T - 2C.$$

これらを定理 3.3 により得られた次数 (表 8) に代入すると, クロスカップの個数 C , 三重点の個数 T , 二重曲線の次数 ϵ_0 により書き換えることができる (表 9).

特異点型	次数
Lips/Beaks	$4d(d-2) - 8\epsilon_0$
Swallowtail	$d(11d-24) - 22\epsilon_0$
Butterfly	$5d(d-4)(7d-12) - 10C + 105T + 5\epsilon_0(80-21d)$
Gulls	$2d(d-2)(11d-24) - 25C + 66T + \epsilon_0(184-66d)$
Goose	$2d(d-2)(3d-8) - 5C + 18T + \epsilon_0(56-18d)$
Sharksfin	C

表 9: d, T, C そして ϵ_0 により表す. $C = T = \epsilon_0 = 0$ の場合, Salmon, Cayley あるいは Kulikov の結果を与える.

特に, $C = T = \epsilon_0 = 0$ とすることで, Salmon, Cayley そして Kulikov らによる滑らかな曲面に対する古典的な結果を再発見することができる. クロスカップにおける微分写像の像は 1 次元であって, その直線に沿った射影に Sharksfin 型の特異点が観察される. したがって, Sharksfin 型の特異点が観察される射影の個数はクロスカップの個数 C そのものである.

3.2 4次元射影空間内に定義された曲面の射影

$\mathbb{P}^4$ 内に定義される一般の位置にある二重交叉点を許すような曲面 X , 滑らかな曲面 M , はめ込み写像 $f: M \rightarrow \mathbb{P}^4$, $f(M) = X$ を考える. この場合においても同様に議論を展開することができる. 本稿では, その主結果 (表 10, 11) と一例を紹介する. そこで, §3.1 において定義した複素コボルディズム不変量の記号を再び用いる:

$$\begin{aligned} f_*(1) &= da^2, & f_*c_1(TM) &= \xi_1 a^3, \\ f_*c_1^2(TM) &= \xi_2 a^4, & f_*c_2(TM) &= \xi_{01} a^4. \end{aligned}$$

定理 3.6 $\mathbb{P}^4$ 内に定義される一般の位置にある二重交叉点を許すような曲面 X , 滑らかな曲面 M , はめ込み写像 $f: M \rightarrow \mathbb{P}^4$, $f(M) = X$ を考える. このとき, 特異射影による特異点型の軌跡の次数は複素コボルディズム不変量 $d, \xi_1, \xi_2, \xi_{01}$ により表される (表 10).

特異点型	次数
S_1	$2d$
S_2	$25d - 16\xi_1$
B_2	$25d - 16\xi_1$
H_2	$10d - 6\xi_1$
S_3	$5(57d - 6\xi_{01} - 74\xi_1 + 26\xi_2)$
B_3	$10(37d - 4\xi_{01} - 54\xi_1 + 20\xi_2)$
C_3	$5(28d - \xi_{01} - 38\xi_1 + 13\xi_2)$
H_3	$5(42d - 11\xi_{01} - 51\xi_1 + 19\xi_2)$
$P_3(c)$	$80d - 15\xi_{01} - 95\xi_1 + 33\xi_2$

表 10: $\mathbb{P}^4$ 内の X における特異点型に対する軌跡の次数.

系 3.7 $M = X$ が $\mathbb{P}^4$ 内の次数 d_1 と d_2 の超曲面の滑らかな完全交叉曲面として定義されるとき, 特異点の軌跡の次数は次のように表される (表 11).

例 3.8 ほとんどの点 $x \in X$ に対して, x における X の漸近線 (3 次で接する直線) は 2 つあり, その直線 l に沿った局所射影 $\varphi_{p,l}: M, p \rightarrow \mathbb{P}^3$ は S_1 特異点型に対応する. 局所射影 $\varphi_{p,l}$ が退化して S_2 特異点型になるような点 $x \in X$ の軌跡 S_2 は X 上の曲線となり, S_3 特異点型となる点の軌跡 S_3 は有限集合である. この軌跡 S_2 の次数と S_3 の個数は, 表 5 の $Tp(S_k)$ の代入計算から得られる.

3.3 4次元射影空間に定義された 3-fold の射影

同様の議論を, $\mathbb{P}^4$ 内に定義された次数 d の超曲面 X に対しても進めることができる. [14, 15] においても, X が滑らかな場合のみ扱っている. $f: X \rightarrow \mathbb{P}^4$ を包含写像とする.

定理 3.9 $\mathbb{P}^4$ 内に定義された次数 d の超曲面 X に対して, 特異点型 A_3, A_4, C, D の特異射影による軌跡の次数は, 表 12 の通りである.

特異点型	次数
S_1	$2d_1d_2$
S_2	$d_1d_2(16d_1 + 16d_2 - 55)$
B_2	$d_1d_2(16d_1 + 16d_2 - 55)$
H_2	$d_1d_2(6d_1 + 6d_2 - 20)$
S_3	$5d_1d_2(20d_1^2 + 20d_2^2 + 46d_1d_2 - 156d_1 - 156d_2 + 277)$
B_3	$10d_1d_2(16d_1^2 + 16d_2^2 + 36d_1d_2 - 126d_1 - 126d_2 + 227)$
C_3	$5d_1d_2(12d_1^2 + 12d_2^2 + 25d_1d_2 - 87d_1 - 87d_2 + 153)$
H_3	$5d_1d_2(8d_1^2 + 8d_2^2 + 27d_1d_2 - 84d_1 - 84d_2 + 152)$
$P_3(c)$	$d_1d_2(18d_1^2 + 18d_2^2 + 51d_1d_2 - 160d_1 - 160d_2 + 280)$

表 11: $\mathbb{P}^4$ 内の d_1, d_2 の完全交叉曲面のとき.

特異点型	次数
A_3	$6d$
A_4	$10d(5d - 12)$
C	$5d(d - 2)$
D	$10d(4d - 9)$
$I_{2,2}$	0

表 12: $\mathbb{P}^4$ 内の次数 d の超曲面 X における特異点型の軌跡の次数.

参考文献

- [1] V. I. Arnold, V. V. Goryunov, O. V. Lyashko, V. A. Vasil'ev, *Singularity Theory II, Classification and Applications*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. 39, Dynamical System VIII (V. I. Arnold (ed.)), (translation from Russian version), Springer-Verlag (1993).
- [2] H. F. Baker. *Principles of Geometry: Volume VI: Introduction to the Theory of Algebraic Surfaces and Higher Loci*. University Press, 1933.
- [3] L. Fehér and R. Rimányi. *Calculation of Thom polynomials and other cohomological obstructions for group actions*. Real and Complex Singularities (Sao Carlos, 2002), Contemp. Math. 354, A.M.S. (2004), 69–93.

- [4] L. Fehér and R. Rimányi. *Thom series of contact singularities*. Annals of Mathematics 176 (2012), 1381–1426.
- [5] W. Hawes. *Multi-dimensional motions of the plane and space*. PhD thesis, University of Liverpool, 1994.
- [6] M. E. Kazarian. *Multisingularities, cobordisms, and enumerative geometry*. Russian Mathematical Surveys, 58(4):665, 2003.
- [7] V. S. Kulikov. *Calculation of singularities of an imbedding of a generic algebraic surface in projective space $\mathbb{P}^3$* . Functional Analysis and Its Applications, 17(3):176–186, 1983.
- [8] W. L. Marar and F. Tari. *On the geometry of simple germs of co-rank 1 maps from $\mathbb{R}^3$ to $\mathbb{R}^3$* . In Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, volume 119, pages 469–481. Cambridge Univ Press, 1996.
- [9] J. J. Nunõ-Ballesteros and F. Tari. *Surfaces in $\mathbb{R}^4$ and their projections to 3-places*. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 137A:1313–1328, 2007.
- [10] T. Ohmoto. *Singularities of maps and characteristic classes*. arXiv preprint arXiv:1309.0661, 2013.
- [11] R. Piene. *Some formulas for a surface in $\mathbb{P}^3$* . In Algebraic geometry, pages 196–235. Springer, 1978.
- [12] O. A. Platonova, *Singularities of the mutual disposition of a surface and a line*, Uspekhi Mat. Nauk, 36:1 (1981), 221–222.
- [13] R. Rimányi. *Thom polynomials, symmetries and incidences of singularities*. Inventiones mathematicae, 143(3):499–521, 2001.
- [14] T. Sasajima, *Counting singular projections of 3 and 4-spaces*, Master thesis, Hokkaido University, 2015.
- [15] T. Sasajima and T. Ohmoto, *Thom polynomials in $\mathcal{A}$ -classification: counting singular projections of surface*, preprint, 2015.

- [16] T. Yoshida, Y. Kabata and T. Ohmoto, Bifurcations of plane-to-plane map-germs of corank 2, *Quarterly J. Math.* (2014) doi:10.1093/qmath/hau013.