

函数方程式の適切性について

京都府立医大 桑 垣 煥 (Akira Kuwagaki)

1 研究分野

この研究集会の「函数方程式」の範囲は，一応微分方程式・積分方程式等を除いた，日本数学会函数方程式分科会のすべての分野を意味し，前に福原先生のおすすめで書かせていただいた本^[1]の内容および J. Aczél 氏の本^[2]の内容を含みます。これらを大きく分けるとつぎのようになるかと思えます。

A. Cauchy型 函数方程式

加法定理型，d'Alembert 型 等

B. 平均型 函数方程式

C. 差分方程式

D. Iteration 型・合成型 函数方程式

函数論関係を含む

E. 函数微分・積分方程式

delay 型，確率統計，情報論 等

F. Fractional integration (differentiation)

一般の階数の微分・積分

G. その他

2 適切性

適当な語がないので仮りにこのようによぶ。一言でいうと
 函数方程式が定数でない解をもつとき「適切」とを提案しよ
 うと考えましたが，この研究集会の諸講演を参考にして考え
 直すと，より適当な用語がありそうです。

つぎに適切性の意味を例を用いて述べますが，適切でない
 函数方程式を不適切とよぶのは不適当のようなのでやめます。

例 A. Cauchy型の場合

$$f(x \circ y) = f(x) * f(y) \quad (\text{例えば } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$$

$\circ$ と $*$ は binary operation であるから 2 変数函数と同じでつぎの
 ように書いてもよい。

$$f\{\phi(x, y)\} = \psi\{f(x), f(y)\} \quad (\phi, \psi: \text{既知函数})$$

f は $\circ$ と $*$ について同型写像であるから， $\circ$ と $*$ について
 の演算法則(公式)がもしあれば一致することが必要である。

- | | |
|--------------|---------------------|
| 例えば， a) 対称性 | a') 加法の 0，乗法の 1 の存在 |
| b) 交代性 | b') 逆の存在 (上の意味で) |
| c) 結合性 | c') べき等元・べき零元の存在 |
| d) べき等性・べき零性 | d') |
| | |

これらのいくつかを同時にみたすものの例としては，種々の代数系がある．すなわち

半群，群，アーベル群，環，束，……

上の $\circ$ と $*$ について a), b), …… の 1 つでも一致しないと函数解がなくなる（適切でなくなる）場合が多い．

例えば，Cauchyの函数方程式でどこかを一寸変えると適切でなくなる．

$$f(x+y) = 2f(x) + f(y), \quad f(2x+y) = f(x) + f(y)$$

$$f(x+y) = f(x)^2 + f(y), \quad f(x-y) = f(x) + f(y) \quad (\text{以上適切でない})$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + 1, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

$$* f(2x+y) = 2f(x) + f(y), \quad f(2x+y) = f(x)^2 f(y) \quad (\text{以上適切})$$

※ についてはつぎのように適切であることが示される．

$$f(2x) = 2f(x) + f(0) = 2f(x) \quad (x=y=0 \text{ とおくと } f(0) = 0) \quad \text{によって}$$

$$f(2x+y) = f(2x) + f(y) \quad \text{ここで } x' = 2x \text{ とおくと Cauchyの方程式.}$$

実は連続な binary operation が上の a) と c) をみたすと，変数変換で $x+y$ になることが証明されているから，函数方程式は Cauchy型に帰着する．

例 B. 平均型の場合

例として重心型の方程式を考える．

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) = k f(\bar{x}, \bar{y}), \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

これは $x_1 = \dots = x_n = \bar{x}$, $y_1 = \dots = y_n = \bar{y}$ とおくと「 $k = n$ のとき適切で， $k \neq n$ のとき適切でない」ことがわかる。

例 D. Iteration 型の場合

$$f\{\phi(x)\} = \psi\{f(x)\} \quad (\phi, \psi: \text{既知函数})$$

については，この方程式をくり返し用いると

$$f[\phi\{\phi(x)\}] = \psi[f\{\phi(x)\}] = \psi[\psi\{f(x)\}], \dots$$

例えば，函数方程式：

$$f(-x) = k f(x) \quad (k: \text{定数})$$

は直ちに， $f(x) = f\{-(-x)\} = k f(-x) = k^2 f(x)$

適切なら $k^2 = 1$ したがって $k = \pm 1$ (これらが固有値のよ
うなもの) となり， f は偶函数か奇函数となる。

3 発展の方向

α 自然現象・社会現象等を表わす函数方程式および数学の
他の分野で現われる函数方程式

1) 射影幾何学の最初の部分 2) 誤差論

3) 情報理論 4) 相対論の速度合成

etc.

β 基本的なものから順に進む

曲線を例にとると

直線 — 2 次曲線 — 3 次曲線 — 代数曲線 — ..

|
平面 — 2 次曲面 — 3 次曲面 — ..

|
超平面 — 2 次超曲面 — ..

.....

このように考えると，三重大大学の学会で述べたように

1) 変数と函数

数 (スカラー) — vector — matrix — ...

2) 演算

+, ×, 整函数, 有理函数, 代数函数, ...;

-, ÷, 交代積, ...

3) 未知函数の個数 (Pexider 型)

$$f(x+y) = g(x) + h(y) \quad (f, g, h : \text{未知函数}) \quad \text{等}$$

4) 変数の個数 (解き易くなる)

$$f(x+y+z) = f(x) + f(y) + f(z) \quad \text{等}$$

γ 未知函数の正則性を弱くする

$$C^n \subset C \subset \text{連続} \subset \text{可測} \subset \dots$$

δ 階数を高くする

d'Alembert の函数方程式等

文 献

[1] 桑垣 煥 : 函数方程式概論, 朝倉書店, 東京, 昭和 42 年

[2] J. Aczél : Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen,
Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart, 1961.

[3] A. Kuwagaki : Sur l'équation fonctionnelle pour des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$:

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)], \text{ Studia Humana et Naturalia No.16, 1982, pp.1-6.}$$