

局所凸空間における半群の生成について

東京都立大学 理学部

大内 忠

局所凸空間における半群の生成を, T. Komura [2] とは異なり, 本方法で, より簡単な形で与える.

X を locally convex Hausdorff space とする. $L(X)$ を X から X への sequentially complete continuous linear map の全体とする.

定義 $\{T_t; t \geq 0\} \subset L(X)$ が, 次の (i) ~ (iii) を満たす時半群と呼ばれる.

$$(i) \quad T_{t+s} = T_t T_s \quad (t, s \geq 0)$$

$$(ii) \quad T_0 = I$$

$$(iii) \quad \lim_{t \rightarrow s} T_t x = T_s x \quad \text{for } \forall x \in X$$

T_t の生成作用素 $A \in$

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{T_h - I}{h} x \quad \text{が存在する } x \text{ に対して, その極}$$

限をもって Ax と定義する.

半群 T_t が *equicontinuous* といふ 任意の連続セミノルム p に対して ある連続セミノルム $\tilde{p}$ がある。

$$\sup_{0 \leq t < \infty} p(T_t x) \leq \tilde{p}(x) \text{ が成り立つことである。}$$

また半群 T_t が *locally equicontinuous* といふ

$$\sup_{0 \leq t \leq s} p(T_t x) \leq \tilde{p}(x) \text{ が成り立つこと、すなわち}$$

compact interval 上で 同等連続のことである。

Equicontinuous semi-groups に対しては L. Schwartz [3], H. Komatsu [1], K. Yosida [4] の結果があり、生成作用素 A の *resolvent* をもちいて半群を描成しており、本質的には Banach space と同様の技法が用いられている。

locally equicontinuous semi-groups に対しては Banach space の時の技法が A の *resolvent* が存在しないため用いられず、T. Komura [2] において、この難点を *generalized resolvent* を用いて切り抜けている。

しかし、彼女の手法はまた簡単とは思えないし、*generalized resolvent* なる概念は複雑であるように思われる。ここにおいては、別の概念 (*asymptotic resolvent*) を導入することにより、より簡易化しよう。

定義 $\{R(\lambda) ; \lambda > \omega\} \subset L(X)$ が次の条件 (i)~(iii) を満たす時 A の漸近的レスolvントといわれる

(i) $\forall x \in X \quad R(\lambda)x$ は C^∞ function

(ii) $R(\lambda)X \subset D(A) \quad R(\lambda)R(\mu) = R(\mu)R(\lambda)$
 $R(\lambda)A = AR(\lambda)$

(iii) $R(\lambda)(A-A) = (\lambda-A)R(\lambda) = I + S(\lambda)$

ここで $S(\lambda) \in L(X)$ でかつ, 任意の連続 semi norm

p に対し, ある連続 semi norm q があり, ある $a > 0$ に対し

$$p\left(\frac{d^k}{d\lambda^k} S(\lambda)x\right) \leq a^k e^{-a\lambda} q(x) \text{ を満たす.}$$

さて locally equicontinuous semi groups に対する Hille-Yosida の定理は次の形で述べられる.

定理 A が locally equicontinuous semi group の生成作用素であるための必要十分条件は

(i) A は densely defined closed operator

(ii) A は漸近的レスolvント $R(\lambda) \in \mathcal{L}(X)$

$$\left\{ \frac{\lambda^{n+1}}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda) ; \lambda > \omega, n=0,1,2,\dots \right\} \text{ が}$$

equicontinuous.

Remarks

- (i): T_t が equicontinuous の時は $S(\lambda) \equiv 0$, また locally equicontinuous の時は, 例えは $S(\lambda) = e^{-a\lambda} S(SfL(x))$ ととれる. 他にも $S(\lambda)$ のとり方はいろいろある.
- (ii) A から T_t を構成する時は, 逆 Laplace 変換を用いず, Yosida 近似的方法で作る. 従って, 実軸上に ∞ に発散する点においてのみ漸近的レゾルVENTが存在するよう ^{ことが必要かつ十分である}に formulate できる. (もちろん, 漸近的レゾルVENTの定義を少し変えなければならないか)
- (iii) 漸近的レゾルVENTの概念を用いて, 今迄を群について知られている公式, 例えは exponential formula など, いいかえかできる.
- 詳細は, いずれどこかに発表する予定である.

References

- [1] H. Komatsu. Semi-groups of operators in locally convex spaces. J. Math. Soc. Japan 16 (1964) 230-262.
- [2] T. Komura. Semi-groups of operators in locally convex spaces. J. Functional Analysis 2. (1968) 258-296.

- [3] L. Schwartz, Lectures on Mixed problems in partial differential equations and the representation of semi groups. Tata institute of Fundamental Research 1958
- [4] K. Yosida. Functional Analysis. Springer, Berlin, 1965.