

音の場と流れの場の相互作用

九大 工学部 神部 勉

1. はじめに

渦音 vortex sound の理論によると, 渦度 vorticity の系が非定常の相互作用運動するとき音波を放射する^{1,2)}. また渦輪のつくる流れ(局所的)に音波が入射すると散乱される^{3,4)}. この渦と音波の関係は, ちょうど電荷分布の場と電磁波との関係を思い起させる. 荷電粒子が非定常運動するとき, 電磁場が制動放射され, また荷電粒子に電磁波が入射すると散乱される. このような analogy の観点から, 音の現象における渦の役割を流体力学の方程式に基づいて考察してみたい.

基礎方程式として圧縮性を考慮した連続の式

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_i} \rho v_i = 0, \quad (1)$$

および運動量方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho v_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho v_i v_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + f_i \quad (2)$$

をとる。ここで、 ρ は密度、 p は圧力、 v_i は速度、 f_i は外力密度である。また流体は粘性なしの完全流体と仮定している。完全流体では散逸がないので、流体粒子について entropy s は保存され、エネルギー方程式の代わりに、断熱関係式

$$dp = c^2 ds, \quad c^2 = (\partial p / \partial s)_\rho \quad (3)$$

が使われる。式(1), (2)から ρv_i を消去すると、次の非同次の波動方程式が得られる：

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \rho - c_0^2 \nabla^2 \rho = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho v_i v_j) + \nabla^2 (p - c_0^2 \rho) - \frac{\partial f_i}{\partial x_i}. \quad (4)$$

c_0 は静止流体中の音速を表わす。この形の方程式は Lighthill 方程式と呼ばれ、乱流による発生する aerodynamic sound (空力音) の解析のために最初に応用された。⁵⁾

以下の考察では、空間的に局在した流れの場を対象とする。この場は空力音の発生源であると共に、音波が入射したときの散乱源ともなる。流れの代表的速度を u とすると、Mach 数 M は十分小さいと仮定する：

$$M = u/c_0 \ll 1. \quad (5)$$

また流体の温度は一定と仮定するので、(3) 式で $c^2 = c_0^2$ といった関係がなりたつ、(4) 式の項 $\nabla^2 (p - c_0^2 \rho)$ は消える。

まず空力音、特に渦音、の理論を概説し、次に渦による散

乱について述べることにする。

2. 渦音の理論

2.1 内部領域と外部領域

流れ場の長さスケール (例えば渦輪半径) を l とすると、流れの変動の時間スケールは $\tau = l/u$ の程度であろう。この変動によって音波が放射されるとすると、そのスケール入 (波長) は、 $\lambda = c_0 \tau = c_0 l/u$ となろう。従って

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{u}{c_0} = M \ll 1 \quad (6)$$

となつて、放射音のスケール入は流れのスケール l に比べてずっと大きい。それゆゑ全領域を、スケール l の流れを含む内部領域と、それを囲む外部領域とに分けて考えることができる。外の領域ではスケール $\lambda = l M^{-1}$ の音波が伝播する。

内部領域は $O(M^2)$ の項を省略すると、非圧縮流の方程式に帰着される。それを (4) 式の形に合わせて書くと、

$$-\nabla^2 p = \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u_i u_j - \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \quad (7)$$

となる。 ρ_0 は一様密度で、 u_i は非圧縮流の速度を表わす。これは Euler の方程式で、 $p = p_0$ として div をとって得られる。(7) と (4) とを比べると、左辺で ρ_{tt} の項が落ちてゐる

が、それは p_{tt} が他の項と比べて $O(M^2)$ となるからである。

他方、外部領域では、長さスケールが大きくなることの結果として、 p_{tt} と $c_0^2 \nabla^2 p$ が同程度となる。流れの方はこの領域では十分減衰して小さくなる。というのは渦輪などの局在した場では、 $|x|$ が大きくなると、 u は $O(|x|^{-3})$ で減少するからである。従って $O(M^2)$ 以上を省略する近似で、(4)式は

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} p - c_0^2 \nabla^2 p = 0 \quad (dp = c_0^2 ds \text{ なの}) \quad (8)$$

となり、音波の方程式に帰着される。

2.2 渦系からの音の放射

内部領域の非圧縮の流れは、いまの場合、空間的に局限された渦度の分布 $\omega(x, t)$ をもつ流れであると考えことにする。 ω が与えられると、速度場は

$$u(x, t) = \nabla \times B, \quad B(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega(y, t)}{|x - y|} dy \quad (9)$$

で表わされる。この場は、 $\operatorname{div} u = 0$, $\operatorname{rot} u = \omega$ をみたすことは直ちに示される。

このような流れ場が音源となつて音波が発生し、外部領域に音波が伝播する。入射波はないとすると、外部解は一般に次の多重極展開で表わせる：

$$p = \frac{A_0(t_r)}{|x|} + \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{A_i(t_r)}{|x|} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \frac{A_{ij}(t_r)}{|x|} + \dots, \quad (10)$$

ここで, $t_r = t - |x|/c_0$ は遅延時間 retarded time, $A_0, A_i, A_{ij}, \dots$ は多重極の強さを表わしてあり, その値は内部解との接続 matching によって決定される.

この接続は中間領域で行なわれる. 若干の計算の結果, 外部領域で, しかも十分に離れた遠距離場は

$$p = \frac{\rho_0}{4\pi c_0} \frac{n_i}{r} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P_i(t_r) + \frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{n_i n_j}{r} \frac{\partial^3}{\partial t^3} P_{ij}(t_r) + \dots \quad (11)$$

で表わされることを示される.¹⁾ ここで $n_i = x_i/r$ は放射方向の単位ベクトルで,

$$P_i(t) = \frac{1}{2} \int (y \times \omega)_i dy, \quad (12)$$

$$P_{ij}(t) = Q_{ij} + \delta_{ij} \frac{1}{12\pi} \int (u_k^2 + f_k y_k) dy, \quad (13)$$

$$Q_{ij}(t) = \frac{1}{12\pi} \int y_i (y \times \omega)_j dy, \quad (14)$$

である. 量 P_i は運動の impulse と称される量で, $\dot{S} \cdot P_i(t) = \int f_i dy$ である. すなわち, 外力 f_i の作用で系の impulse P_i が変化するとき, それに応じて (11) の第 1 項の放射音が発生する. これは 2 重極音の性質を示す. 第 2 項は 4 重極音を表わし, ω の 2 次モーメント Q_{ij} , 全運動エネルギー $\int \frac{1}{2} u_k^2 dy$, および f_i の 1 次モーメントの変動がこの放射を与える.

2.3 渦音と制動放射

外力 $f_i = 0$ のとき, (11) の第1項は消える. また非粘性流体の全運動エネルギーはほぼ保存される (音の放射で失われるエネルギーは非常に少ない) ので, P_{ij} の式 (13) の第2項も微分されれば消えてしまう. 結局, (11) は主項だけ残して,

$$p = \frac{\rho_0}{c_0^2} \frac{n_i n_j}{r} \frac{\partial^3}{\partial t^3} Q_{ij} \left(t - \frac{r}{c_0} \right), \quad r = |\mathbf{x}| \quad (15)$$

となる. この公式は, Q_{ij} の定義 (14) からわかるように, ω の2次モーメントの変動, 別の言い方をすると, 渦の非定常の自己相互作用によって, 4重極音が放射されることを述べている. 音源が vorticity にあるのである. 渦度の分布だけで音圧が知られるのが, 式 (15) の著しい特徴である.

この式はただちに共軸渦輪の相互作用系に適用できる. N の渦輪が軸を同じくして相互作用しているとしよう. i 番目の渦輪の軸上の位置を Z_i , 半径を R_i , 強さを Γ_i とすると, この相互作用系から放射される音圧は

$$p(r, \theta, t) = \frac{\rho_0}{4c_0^2} \frac{1}{r} \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right) \ddot{Q} \left(t - \frac{r}{c_0} \right) \quad (16)$$

$$Q(t) = \sum_{i=1}^N \Gamma_i R_i^2 Z_i$$

と与えられる. 渦輪の相互作用を表わす非粘性の運動方程式から $R_i(t)$, $Z_i(t)$ が決定されれば, p の時間因子 $\ddot{Q}(t)$ がわか

る。また角度因子 $(\cos^2 \theta - 1/3)$ より, $\theta, \pi - \theta = \cos^{-1} 1/\sqrt{3} \approx 55^\circ$ で, $\phi = 0$ となり, その前後で符号が反対となることが知られる。 $N=2$ のばあいには, 実験的にもこのような音の放射が確認されている。^{6,7)} 渦輪が1個のときには定常運動となるので, 音の放射はない。

このようにして, 渦輪の非定常(加速度)運動によって放射される音の表式を得たが, これを荷電粒子が加速度運動したときの制動放射(電磁波)と比べてみると面白い。粒子の加速度 $\ddot{r}$, 電荷 e , 光速 c_* とすると, 放射される電磁波の強さ P_r は, 単位立体角当り

$$P_r = \frac{e^2}{4\pi c_*^3} (\ddot{r})^2 \sin^2 \phi \quad (17)$$

で与えられる。⁸⁾ ϕ は放射方向 n と加速度 $\ddot{r}$ との間の角度である。 $\sin^2 \phi$ に比例する放射強度は2重極放射の特徴である。これに対し共軸渦輪系の放射強度 P_v は, 単位立体角当り,

$$P_v = \frac{S_0 J^2}{16\pi^2 c_*^5} \left(\frac{d^3}{dt^3} \bar{z} \right)^2 \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{3} \right)^2 \quad (18)$$

で与えられる。 J は渦系のインパルス $J = \pi \sum_i P_i R_i^2$ であり, $\bar{z}$ は渦の軸上の平均位置(重心)である: $\bar{z} = \pi Q/J$ 。こちらは4重極放射である。形の上からいうと, (11)式の第1項の方が, 荷電粒子の制動放射に似ているが, こちらは外力の

存在が必要で、問題設定がより複雑になるので、渦の自己相互作用の方を取った。

3. 非圧縮流の場合からの音の放射

渦音の理論のいうところは、渦度分布 $\omega(x, t)$ で表現される非圧縮で非定常の流れがあったとすると、そこから音が発するということである。非圧縮の流れがどのようにして、密度変動を伴う縦波を放射するのであろうか。まず第1に言えることは、前節2では、 $M = u/c_0 \ll 1$ のときに、流れが非圧縮とみなせるのは、流れの変動のスケール ℓ の程度の領域についてだということであった。しかしもっと大きなスケール入では音波の方程式が得られ、圧縮性が無視できない。つまり圧縮性が省略できたのは場を局所的に見たからで、大局的には流体を圧縮性として取扱っている。

それでもなお paradoxicalなのは、非圧縮流は横波の性質をもつのに、音波は縦波であることである。横波から縦波が発生するのであろうか？ 答えは yes である。逆もまた真であり、その鍵は場の非線形性にある。

方程式(4)は、 $M \ll 1$, $f_i = 0$ で、温度が一様ときには

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \nabla^2 \rho = \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u_i u_j \quad (19)$$

で近似される。ここで u_i は非圧縮流の場を表わすが, Fourier 成分で表わすと,

$$u_i(x) = \int \hat{u}_i(k) e^{ik \cdot x} dk. \quad (20)$$

非圧縮の条件は

$$\frac{\partial}{\partial x_i} u_i = i \int k \cdot \hat{u}(k) e^{ik \cdot x} dk = 0 \quad \therefore k \cdot \hat{u}(k) = 0$$

となり, $u(k) \perp k$ であることがわかる。これが上で非圧縮流は横波であると言った内容である。方程式(19)の右辺を Fourier 成分で表わすと

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} u_i u_j &= \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \int \hat{u}_i(k_1) e^{ik_1 \cdot x} dk_1 \int \hat{u}_j(k_2) e^{ik_2 \cdot x} dk_2 \\ &= - \iint (k_0 \cdot \hat{u}(k_1)) (k_0 \cdot \hat{u}(k_2)) e^{ik_0 \cdot x} dk_1 dk_2 \end{aligned}$$

となる ($k_0 = k_1 + k_2$)。この最後の式は, 波動方程式(19)の音源項を Fourier 成分で表わしており, 波数 k_0 の波に対し, 横波 $\hat{u}_i(k)$ の中から縦波成分を, 演算 $k_0 \cdot \hat{u}(k_1)$, $k_0 \cdot \hat{u}(k_2)$ によって選び出し, その積を音源スペクトルとすることを述べている。つまり横波の場の中から, 2次の非線形自己相互作用からくる縦波を抽出するのが, (19)式の右辺(音源項)の意味になっている。

4. 音波の散乱

4.1 流れ場による散乱の一般式

流れ場による音の散乱とは、非圧縮の流れ場に音波が入射したとき、両者の相互作用の結果、新たな波が現われることである。一般に速度場 $\mathbf{v}$ は、非圧縮の solenoidal 成分 $\mathbf{v}^T$ と圧縮性の irrotational 成分 $\mathbf{v}^L$ との和として表わせる：

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^T + \mathbf{v}^L \quad (21)$$

$$\text{ここで} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v}^T = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{v}^T = \boldsymbol{\omega}, \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div} \mathbf{v}^L \neq 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{v}^L = 0. \end{cases}$$

(21) の分解を使うと、Reynolds stress は

$$v_i v_j = v_i^T v_j^T + v_i^T v_j^L + v_i^L v_j^T + v_i^L v_j^L \quad (22)$$

と展開できる。右辺で、流れと音の相互作用を表わすのは中の2項であるので、これだけを持に取出してその効果をみることにする。これに対し、第1項は流れの自己相互作用を表わし、§2で扱った音の発生に導く項であり、最後の項は音波の自己相互作用で、波の変形、acoustic streamingに導く項であるので、ここでは省くことにする。音波の振幅が小さければ、後者の効果は特に小さい。

方程式(19)の右辺の $u_i u_j$ に(22)の中の2項を代入すると、次の散乱方程式が得られる：

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} p - \nabla^2 p = 2 \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u_i^T u_j^L \quad (23)$$

ここで断熱関係式 $dp = c^2 d\rho$ を使った。

いま音圧 p を入射波 p_I と散乱波 p_s の和として表わすことにする： $p = p_I + p_s$ 。入射波は波数 k_0 ，振動数 ω_0 で， n_0 (単位ベクトル) 方向に伝播しているものとし，振幅 ε とすると：

$$p_I = \varepsilon e^{i(k_0 \cdot x - \omega_0 t)} \quad (24)$$

また散乱波 p_s は入射波 p_I に比べて十分小さいと仮定する：

$$|p_s| \ll |p_I|. \quad (\text{Born 近似})$$

局在した流れ場を $v^T = u(x, t)$ ($\text{div } u = 0$) とおき，音波による u の変形は省略する。以上の条件のもとに，散乱波は

$$p_s(x, t) = \frac{\varepsilon}{2\pi c_0^3} \frac{(n \cdot n_0)}{|x|} e^{ik_0|x|} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(e^{-i\omega_0 t} \frac{1}{2\pi} \int n \cdot \hat{u}(k_*, \omega) \times e^{-i\omega(t-|x|/c_0)} d\omega \right) \quad (25)$$

と与えられる。^{3,4)} ここで $n = x/|x|$ は散乱方向の単位ベクトル，

$$\hat{u}(k, \omega) = \iint u(x, t) e^{-ik \cdot x + i\omega t} dx dt$$

は4次元の Fourier 成分で，また

$$k_* = (k_0 + \frac{\omega}{c_0}) n - k_0 n_0. \quad (26)$$

(25) の散乱波は直角方向 $n \perp n_0$ ，および $n = -n_0$ で $p_s = 0$ となる性質がある。

いま考えている流れ場は渦度分布 $\omega(x, t)$ で表わされる。

のとする。 ω が与えられると solenoidal な速度場は

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{B}, \quad (27)$$

ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega(\mathbf{y}, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iint \omega(\mathbf{y}, t) \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{k^2} d\mathbf{y} d\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{k^2} \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}. \end{aligned}$$

この最後の関係を使うと, (27) より, Fourier 成分について,

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{i}{k^2} \mathbf{k} \times \hat{\omega}(\mathbf{k}, \omega) \quad (28)$$

が得られる。従って, (26) を考慮すると

$$\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}_*, \omega) = \frac{i}{k_*^2} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{k}_* \times \hat{\omega}(\mathbf{k}_*, \omega)) = \frac{i k_0 \sin \theta}{k_*^2} \mathbf{b} \cdot \hat{\omega}(\mathbf{k}_*, \omega), \quad (29)$$

が得られる。ここで $\theta = \cos^{-1}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_0)$ で,

$$\mathbf{b} = (\mathbf{n}_0 \times \mathbf{n}) / \sin \theta \quad (30)$$

は, 面 $(\mathbf{n}, \mathbf{n}_0)$ に垂直な単位ベクトルである。(29) と (25) に代入してみればわかるように, 渦度分布のスペクトル成分がわかりさえすれば, 散乱波が決定される。これはあたかも渦度が音波を散乱する性質をもつかの如く解釈することと可能にしよう。

散乱の大きさは "散乱断面積" で特徴づけられる。それは次の式で定義される:

$$d\sigma = \sigma(n, n_0) d\Omega = \frac{(\operatorname{Re} p_s)^2 |x|^2 d\Omega}{(\operatorname{Re} p_I)^2} \quad (31)$$

$d\sigma$ は n_0 方向に入射した音波が n 方向の立体角 $d\Omega$ に散乱される '微分断面積' を表わす。

4.2 定常流による音の散乱と電荷による電磁波の散乱

流れの場が時間に依らない定常場するとき, あるいは時間的な変化があったとしても, その代表的な振動数 ω_f が, 音波の振動数 ω_0 と比べてずっと小さいなら ($\omega_f \ll \omega_0$, これは多くの流れでなりたつ), 場は実質的に定常とみなすことができる。このとき Fourier 成分は

$$\hat{\omega}(k, \omega) = \hat{\omega}(k) 2\pi \delta(\omega)$$

と書けば, 定常渦場 $\omega(x)$ の Fourier 成分 $\hat{\omega}(k)$ で表わせる。速度場 $v(x)$ についても同様である。これらを使うと, 散乱波は

$$p_s = \varepsilon f(n, n_0) \frac{1}{|x|} e^{i\omega_0(t - |x|/c_0)} \quad (32)$$

$$\text{ここで} \quad f(n, n_0) = -\frac{\omega_0^2}{2\pi c_0^3} (n \cdot n_0) (n \cdot \hat{v}(k)) \quad (33)$$

$$= -\frac{ik_0}{4\pi c_0} \cos\theta \cot\frac{\theta}{2} (b \cdot \hat{\omega}(k)) \quad (34)$$

は散乱振幅とよばれる。また $k = k_0(n - n_0)$ は散乱ベクトル

14, $k = |k| = 2k_0 \sin \theta/2$ である。(31) で定義される断面
積は, (24) と (32) より

$$d\sigma = |f(n, n_0)|^2 d\Omega \quad (35)$$

で与えられる。(33), (34) を使うと

$$|f(n, n_0)|^2 = \frac{k_0^4}{4\pi c_0^2} \cos^2 \theta |n \cdot \hat{v}(k)|^2 \quad (36)$$

$$= \frac{k_0^2}{16\pi^2 c_0^2} \cos^2 \theta \cot^2 \frac{\theta}{2} |b \cdot \hat{\omega}(k)|^2 \quad (37)$$

が得られる。

この式を固体中の電子密度 $N(k)$ による電磁波の散乱と比
べてみよう。 $N(k)$ の Fourier 成分を $\hat{N}(k)$ で表わすと, 散乱断
面積は

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2 \phi |\hat{N}(k)|^2 d\Omega \quad (38)$$

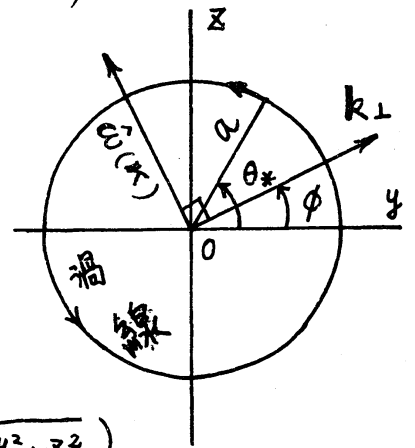
と表わせる。⁹⁾ ここで ϕ は入射波の電場 E の方向と散乱方向 n
とのなす角である。散乱ベクトル k は渦の場合と共通である
上, 式の形もよく似ている。また1個の電子による散乱(ト
ムソン散乱)では, $N(k) = \delta(k)$ とおくことにより,

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2 \phi d\Omega \quad (39)$$

となる。また全断面積 σ は, Ω について積分することにより,
 $\sigma = (8/3)\pi r_e^2$, ここで $r_e = e^2/mc^2 \approx 2.8 \times 10^{-13} \text{ cm}$ は, 電
子の古典半径である。

4.3 渦輪による散乱

電子のトムソン散乱に似ているのが、渦輪による音の散乱である。それを知るためには、渦輪の渦度分布 $\omega(x)$ の Fourier 成分 $\hat{\omega}(k)$ を計算する必要がある。渦輪に固定した座標系 (x, y, z) を送り、 x 軸を渦輪の対称軸の方向にとり、 (y, z) 面とそれに垂直にとる。渦輪の強さは Γ とし、渦度は半径 a の円周上に集中しているとする(右図)：



$$(40) \begin{cases} \omega_x = 0, \\ \omega_y = -\Gamma \sin \theta_* \delta(r-a) \delta(x), \\ \omega_z = \Gamma \cos \theta_* \delta(r-a) \delta(x). \end{cases}$$

(r, θ_*) は (y, z) 面の極座標である ($r = \sqrt{y^2 + z^2}$).

上の渦度分布に対し、その Fourier 成分は

$$(41) \begin{cases} \hat{\omega}_x(k) = 0, \\ \hat{\omega}_y(k) = \int \omega_y(x) e^{-ik \cdot x} dx = -\Gamma \int \sin \theta_* \delta(r-a) \delta(x) e^{-ik \cdot x} r dr d\theta_* dx \\ \quad = -A \sin \phi, \\ \hat{\omega}_z(k) = A \cos \phi, \end{cases}$$

である。ここで $A = -2\pi i \Gamma a J_1(k_\perp a)$ 、 J_1 は 1 次の Bessel 関数、 $k_\perp$ は k の (y, z) 面への射影、 ϕ は $k_\perp$ が y 軸となす角である。この表式から直ちに、 $k \cdot \hat{\omega}(k) = 0$ が知られる。 x 軸方向の単位ベクトルを e とし、5つのベクトル $n_0, n_1,$

b, e, κ の立体幾何学的関係に考慮すると

$$b \cdot \hat{\omega}(\kappa) = \frac{A}{\sin \Theta} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \bar{\Phi} + \sin \frac{\theta}{2} \cos \psi \sin \bar{\Phi} \right) \quad (42)$$

と得られる。ここで

$$\cos \Theta = \frac{(\kappa \cdot e)}{|\kappa|}, \quad \cos \theta = n \cdot n_0, \quad \cos \bar{\Phi} = n_0 \cdot e,$$

また、 ψ は $(n_0 \cdot e)$ 面と (n_0, n) 面とのなす角である。 (42)

を使うと、(34) の散乱振幅は

$$f(n, n_0) = -\frac{(k_0 a)^2 \Gamma}{c_0} \frac{J_1(\xi)}{\xi} G(\theta, \psi, \bar{\Phi}), \quad (43)$$

$$G(\theta, \psi, \bar{\Phi}) = \cos \theta \cos \frac{\theta}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} \cos \bar{\Phi} + \sin \frac{\theta}{2} \sin \psi \cos \bar{\Phi} \right), \quad (44)$$

$$\xi = \kappa_{\perp} a = 2 k_0 a \sin \frac{\theta}{2} \sin \Theta \quad (45)$$

で与えられる。微分断面積は $d\sigma = |f(n, n_0)|^2 d\Omega$ であり、

電子の場合の式 (39) より複雑な角度依存性を示す。

ここに得られた渦輪が 1 コの場合の散乱振幅の表現は、直ちに N コの共軸渦輪の系による散乱振幅の表現に拡張できる。前と同じ座標系で、 i 番目の渦輪の半径を a_i 、軸座標を X_i 、強さを P_i とすると、(40) 式に対応して、 $\omega_x = 0$

$$\left. \begin{aligned} \omega_y &= -\sum_i P_i \sin \theta_* \delta(r - a_i) \delta(x - X_i) \\ \omega_z &= \sum_i P_i \cos \theta_* \delta(r - a_i) \delta(x - X_i) \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

を得る。(41)に対応する式は $A = -2\pi i \sum_j^N a_j P_j \exp(-iK_{\parallel} X_j) \cdot J_1(K_{\perp} a_j)$ とおけばよい ($K_{\parallel} = K \cos \theta$)。このようにして、散乱振幅は

$$f(n, n_0) = - \left[\sum_j^N (k_0 a_j)^2 \frac{P_j}{c_0} \frac{J_1(\xi_j)}{\xi_j} e^{-iK_{\parallel} X_j} \right] G(\theta, \psi, \Phi), \quad (47)$$

$$\xi_j = K_{\perp} a_j = 2 k_0 a_j \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta \quad (4)$$

と得られる。これを結晶によるX線の散乱(回折)の理論と比べると⁹⁾、(47)の[]はちょうど、結晶構造因子に対応している。

参考文献

- 1) T. Kambe & T. Minota: J. Sound Vib. 74 (1981) 61-72.
- 2) W. Möhring: J. Fluid Mech. 85 (1978) 685-691.
- 3) T. Kambe & U MYA OO: J. Phys. Soc. Japan (投稿中).
- 4) 神部 勉: 京大数理解析研講究録 "流体力学における非定常問題" (音と渦の相互作用) (1980).
- 5) M.J. Lighthill: Proc. Roy. Soc. London A 211 (1952) 564-587.
- 6) T. Kambe & T. Murakami: Mechanics of Sound Generation in Flows (Springer-Verlag, 1979) 123-129.
- 7) T. Kambe, T. Minota & S. Suyama: Proc. 1st Asian Congress of Fluid Mech. (1980, Bangalore) A-49.
- 8) L.D. Landau & E.M. Lifshitz: The Classical Theory of Fields, §9-11.
- 9) 加藤 範夫: 回折と散乱 (朝倉書店, 昭和53年版).