

Reidemeister と Singer の定理の一般化と その応用

イリノイ大 永瀬 輝男

1930 年代に Reidemeister と Singer は, 次の様な 3 次元多様体に関する基本定理を得た.

定理: 3 次元閉多様体上の任意の 2 つの Heegaard 分解は, 互いに stably に同値である.

このノートでは, involution という立場から, 上の定理を一般化出来ることを示し, その系として, 3 次元ホモロジー球面上の向きを保存する involution に対し, signature を定義出来ることを示す. その為に, いくつかの定義をする. 以下に於て, $\mathcal{Q}(\cdots)$ とは $(\cdots)$ の閉包を示し, $F(f)$ は, 写像 f の不動点の集合を表わす.

$f: M^m \rightarrow M^m$ を m 次元多様体上の involution とする. N が $(m-1)$ 次元の M の部分多様体で, 次の条件を満たすとき, N は 特性部分多様体 と呼ばれる: M の 2 つの部分多様体 U と V が存在して, $U \cup V = M$, $U \cap V = \partial U = \partial V = N$, かつ $f(U) = V$.

特に, $m=3$ で, U と V が共にハンドルボデーである時, $(M; U, V, f)$ を M の 特性 Heegaard 分解 と呼ぶ.

$f, g: M^3 \rightarrow M^3$ を M 上の involution とし, $(M; U, V, f)$ と $(M; X, Y, g)$ を M の特性 Heegaard 分解とする. $(M; U, V, f)$ と $(M; X, Y, g)$ が 基本 ss 同値 であるとは, 次の 3 種類の操作で, 一方から他方に移行出来ることである.

(1) M から M の上への同相写像 h が存在して, $g = h \circ f \circ h^{-1}$ かつ $h(U) = X$.

(2) $f = g$ であり, U の中に次の様な disk D が存在する:

$\partial U \cap \text{Int } D = \emptyset$, かつ $P = \mathcal{Q}(\partial D - \partial U)$ は U に於て proper な曲線であり, $P \cap f(P) = \emptyset$. さらに, P の U 内の正則近傍 N で, 次の条件を満たすものがある: $N \cap f(N) = \emptyset$, かつ $X = \mathcal{Q}(U - N) \cup f(N)$.

(3) $f = g$ であり, M の中に次の条件を満たす 2 つの disk D_1 と D_2 が存在する: $D_1 \subset V$, $D_2 \subset U$, $D_1 \cap F(f) = \emptyset$, かつ

$\partial D_1 \cap \partial D_2$ は ∂U の上で 2 点 / 1 つの交叉点より成る. さらに

D_1 の正則近傍 N で, 次の条件を満たすものがある:

$N \cap f(N) = \emptyset$, かつ $X = \mathcal{Q}(U - f(N)) \cup N$.

(注) (3) に於ての D_2 の役割は, 変形結果が再び, Heegaard 分解であることの保証の為のもの.

2 つの特性 Heegaard 分解が ss 同値 であるとは, 上の基本

ss 同値の列で、一方から他方に移行出来ることである。すると、次の様な定理を証明出来る。

定理 1: M を向き付けられた 3 次元閉多様体とする。 f と g を M 上の向きを保存する involution とする。 このとき、2 つの特性 Heegaard 分解 $(M; U, V, f)$ と $(M; X, Y, g)$ が ss 同値である為の必要十分条件は次の条件を満たすことである: M 上の同相写像 α が存在して、 $\alpha(\partial U) \cap \partial X$ が $F(g)$ の ∂X 上でのある開近傍を含むことである。特に、 f と g が conjugate な不動点を持たない involution であるならば、 $(M; U, V, f)$ と $(M; X, Y, g)$ は、ss 同値である。

M が連結でない時、 M の Heegaard 分解を、 M の各連結成分上の Heegaard 分解の和とすることにするならば、不動点を持たない involution に対して、定理 1 は次の様に拡張される。

系: M を 3 次元閉多様体とする (連結でないかも知れないし、向き付け不可能かも知れない)。 f と g を M 上の不動点を持たない conjugate な involution とし、 $(M; U, V, f)$ と $(M; X, Y, g)$ を広義の特性 Heegaard 分解とする。すると、2 つの特性 Heegaard 分解は、ss 同値である。

M を 3 次元閉多様体で、 M' を M の copy とし、 $\alpha: M \rightarrow M'$ を同

相写像とする. 写像 $f: M \cup M' \longrightarrow M \cup M'$ を次の様に定義する:

$$f(x) = \begin{cases} h(x) & \text{もし } x \in M \\ h^{-1}(x) & \text{もし } x \in M'. \end{cases}$$

すると, f は $M \cup M'$ 上の不動点を持たない involution である.

$(M; U, V)$ を M の Heegaard 分解とする. すると,

$(M \cup M'; U \cup h(V), V \cup h(U), f)$ は $M \cup M'$ 上の広義の特性 Heegaard 分解である.

上の考察によって, 上の定理は本来の Reidemeister と Singer の定理の一般化になることが次様にして証明出来る. $(M; U, V)$

と $(M; U', V')$ を M の Heegaard 分解とする. すると, 定理の系より, $(M \cup M'; U \cup h(V), V \cup h(U), f)$ と

$(M \cup M'; U' \cup h(V'), V' \cup h(U'), f)$ は ss 同値である.

この ss 同値の変形を M 上に制限すれば, M 上で与えられた二つの Heegaard 分解の stable 同値を与える.

Browder と Livesay は, $\mathbb{Z}$ -ホモロジー球面 M 上の不動点を持たない involution に対して, signature 不変量を特性部分多様体 N を用いて, 次の様に定義した: U を M の部分多様体で, $\partial U = N$ となるものとする. $G = \ker(i_*: H_1(N) \rightarrow H_1(U))$ とする, ここで, $i: N \hookrightarrow U$ は包含写像とする. $\varphi: G \times G \rightarrow \mathbb{Z}$ を次の様に定める: $\varphi(x, y) = x \cdot f'_*(y)$, ここで $\cdot$ は交叉数

を示し, $f' = f|N$ である. すると, φ は, 2 次形式であり, この φ の signature を f の signature と呼ぶ.

しかし, この Browder と Livesay の定義は, 不動点を持つ様な involution に対しては, 成立しない. 即ち, 特性部分多様体の選り方によって, 値が異なる. しかし, 各特性部分多様体に対して, Browder と Livesay による方法で signature を定義することは出来る. 各特性 Heegaard 分解 $(M; U, V, f)$ に対し, ∂U によって決まる f の signature を $\sigma(M; U, V, f)$ で示すことにする.

M を向き付けられた 3 次元閉多様体で, $\theta: M \rightarrow M$ を M 上の向きを保存する involution で, $F(\theta) = \bigcup_{i=1}^n S(i)$ となるものとする, ここで $S(i) \cong S^1$. H と G を M の特性部分多様体で, $F(\theta)$ を含むものとする. このとき, H の G に対する ねじれ を次の様に定義する. $T(i)$ を M における $S(i)$ の正則近傍で, $T(i) \cap H$ と $T(i) \cap G$ が共に proper な円管であるものとする. $L(i, H)$ を $T(i) \cap H$ の 1 つの境界とし, $L(i, G)$ を $T(i) \cap G$ の 1 つの境界とする. $L(i, H)$ と $L(i, G)$ は共に S^1 に同相である. $T(i)$ は M から導びかれた向きを持ち, $\partial T(i)$ は, $T(i)$ より導びかれた向きを持つ. すると, $\partial T(i)$ 上に向き付けられた円 $L(i)$ と, $L(i, H)$ と $L(i, G)$ の向きで, $[L(i)] \cdot [L(i, H)] = [L(i)] \cdot [L(i, G)] = +1$ となるものが存在する. ここで $[(\dots)]$ は向き付けられた $(\dots)$ のホモロ

ジー類を示し, $\cdot$ は $\partial T(z)$ 上での交叉数(intersection number) を示す. $m(z) = [L(z, H)] \cdot [L(z, G)]$ とするとき, n 個の数字の組 $(m(1), \dots, m(n))$ を H の G に対する ねじれ と呼び, $tw(H; G)$ で表わす. $\tau(H; G) = \sum_{i=1}^n m(i)$ とする.

定理 2: M を向き付けられた $\mathbb{Z}$ -ホモロジー 3次元球面とする. f を M 上の向きを保存する involution で, 不動点を持つものとする. すると,

$$\sigma(M; X, Y, f) = \sigma(M; U, V, f) + \tau(2X; 2U).$$

$\mathcal{H}(M, f)$ を M の特性 Heegaard 分解 $(M; U, V, f)$ の中で, $2U - F(f)$ が 2 つの連結成分よりなる様なものの全体とする. すると, M が $\mathbb{Z}$ -ホモロジー 3次元球面の場合は, $\mathcal{H}(M, f)$ は空であり, $\mathcal{H}(M, f)$ の任意の 2 つの元は, 定理 2 より同一の signature を持つ. この値を f の signature と定義出来る.