

Exact Cylindrical Soliton Solutions of The Sine-Gordon Equation,
The Sinh-Gordon Equation and The Periodic Toda Equation

Akira NAKAMURA

Physics Laboratory, Osaka University of Foreign Studies,
Aomadani, Mino City, Osaka 562

Dec. 1988

(Abstract)

It has been known that the Toda lattice equation with periodic boundary condition generates the sinh-Gordon equation and the sine-Gordon equation. We apply this relation to the cylindrical soliton problem. Namely, we investigate the problem of the periodic generalizations of the cylindrical solitons of the Toda equation, which gives us the cylindrical soliton solutions of the sinh-Gordon equation and the sine-Gordon equation.

For the purpose, we first derive the (cylindrical) N -soliton solutions, f_N , of the Toda equation in the Hirota bilinear form. The constructed solutions are related to the Jacobi formula of the matrix algebra, and are different from the Wronskian type bilinear N -soliton solutions which are related to the Plücker relations.

For the Toda cylindrical soliton solutions f_N ($N=1, 2, \dots$), we consider the one-soliton f_1 with the center at the lattice site $n=a$ ($a=\text{constant}$), two-soliton f_2 at $n=a$ and $a+2$, three-soliton f_3 at $n=a, a+2$, and $a+4$; ... ; N -soliton solution f_N at $n=a, a+2, a+4, \dots, a+2N-2$. Then we take large N limit, f_∞ , of the above solution f_N which has centers at every lattice sites with step 2. The solution f_∞ is periodic with period 2 or $f_n=f_{n+2}$ and gives solutions of the cylindrical sinh-Gordon and sine-Gordon equations.

§1. Introduction

つぎの2次元 Toda lattice equation ($\equiv$ eq.) をかんがえる,

$$\Delta u_n - \exp(-u_n + u_{n-1}) + \exp(-u_{n+1} + u_n) = 0. \quad (1.1)$$

ただし $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, $n = \text{lattice site integer}$ である.
 ここで"周期条件 $u_n = u_{n+2}$ (period=2) のとき, $u' = u_0 - u_1$ とおくと sinh-Gordon ($\equiv$ HSG) eq., $\Delta u' + 4 \sinh u' = 0$ をえる.
 さらに $u' = iu''$ とおくと sine-Gordon ($\equiv$ SG) eq., $\Delta u'' + 4 \sin u'' = 0$ をえる. だから periodic Toda eq. をとけば, HSG や SG eq. のこたえが, えられる. これを cylindrical soliton について, すれば, HSG や SG の cylindrical soliton solution がえられる. くわしい内容については, ref. 1) をみてくたさい.

§2. Bilinear N -soliton solution のあたらしい derivation

このセクションのくわしい内容は, ref. 2) をみてくたさい. まず, うえの準備として, bilinear N -soliton solution のあたらしい方法での derivation をかんがえる.

比較のために, 2次元 Toda eq. (1.1) と KP eq.

$$(-4u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 0, \quad (2.1)$$

の両方をパラレルに, 3す. Hirota の bilinear method にしたがって, dependent variable transformation $\exp(-u_n + u_{n-1}) - 1 = \Delta f(n)$ (for Toda eq.) or $u = (2 \log f)_{xx}$ (for KP eq.) により, もとの式を bilinear eq. にすると, それは, 4つの linear operator で"かかれた, つぎ"のかたちとなる.

$$f(L_a L_{a'} - L_b L_{b'})f - (L_a f)(L_{a'} f) + (L_b f)(L_{b'} f) = 0. \quad (2.2)$$

これを "four-operators" bilinear form とよぼう. 227" $L_a, L_{a'}, L_b, L_{b'}$ は具体的には, つぎ"のようになる.

$$\begin{aligned} L_a &= \partial/\partial x + i\partial/\partial y (\equiv L_1), & L_{a'} &= \partial/\partial x - i\partial/\partial y (\equiv L_{-1}), \\ L_b &= \exp(\partial/\partial n) - 1, & L_{b'} &= 1 - \exp(-\partial/\partial n), \text{ for Toda eq.} \end{aligned} \quad (2.3a)$$

$$L_a = 4(\partial^3/\partial x^3 - \partial/\partial t), \quad L_{a'} = 3\partial/\partial x, \quad L_b = 3(\partial^2/\partial x^2 + \partial/\partial z), \\ L_{b'} = 3(\partial^2/\partial x^2 - \partial/\partial z), \quad \text{for KP eq.} \quad (2.3b)$$

N -soliton solution は, $f = \det(h_{ij})_{1 \leq i, j \leq N} \equiv \det H$ である。これ、 $N \times N$ matrix H の element は

$$(H)_{ij} \equiv h_{ij} = c_{ij} + \sum_{m=-\infty}^n \varphi'_{m,i} \varphi_{m,j}, \\ L_{\pm 1} \varphi_{m,i} = \mp \varphi_{m \pm 1, i}, \\ L_{\pm 1} \varphi'_{m,i} = \pm \varphi'_{m \mp 1, i}, \quad \text{for Toda eq.} \quad (2.4a)$$

$$(H)_{ij} \equiv h_{ij} = c_{ij} + \int^x dx' \varphi'_i(x', y, t) \varphi_j(x', y, t), \\ L_a \varphi'_i = 0, \quad L_a \varphi_j = 0, \quad L_b \varphi_j = 0, \quad L_b \varphi'_i = 0, \\ \text{for KP eq.} \quad (2.4b)$$

ここで c_{ij} = arbitrary constant である。このように、あたえられた N -soliton の f について、 $L_a f$, $L_{a'} f$, $L_b f$, $L_{b'} f$, $(L_a L_{a'} - L_b L_{b'}) f \in L^2 \wedge^2$ と、おののおのの量は、すべて、ひとつの matrix として、かけられることが、matrix identity をつかって、しめせる。^{1,2)} しかもこのとき (2.2) は、matrix algebra でしめれてゐる、

Jacobi formula の identity ものものになる。^{1,2)}
 したがって, うえにあげた N -soliton は, たしかに
 solution となる。

§3. Wronskian type N -soliton とのかんけい。

いままで, bilinear method での N -soliton
 solution は, Wronskian であらわされることが, しられ
 ていた。^{3,4)} Wronskian タイプの solution と, §2 の
 タイプの solution は, おなじ N -soliton solution であ
 ても, ことなつた表現方法で, かかれたものであり, それ
 ぞれの方法の便利さには, 一長一短があると, いえる。²⁾
 とにかく Wronskian タイプの N -soliton solution 以外にも,
 いろいろの表現方法による N -soliton solution のかきかた
 が, あるという事実を, われわれは, ここで再認識する。
 たとえば, §2 のタイプ of $N \times N$ matrix でかかれる
 N -soliton で, Wronskian タイプ of $2N \times 2N$ matrix
 でかかれるものに, 対応するものはある。²⁾

§4. $N \rightarrow \infty$ の limit による periodic solution のつくりかた。

§2 の N -soliton solution で, $G_{ij} = \delta_{ij}$

(クロネッカーのデルタ) ととり, $\varphi_j \rightarrow \epsilon \varphi_j$ とおき,
determinant $\epsilon \in \mathbb{C}$ 形式的に展開すると, つぎの
ようになる.

$$f = \det H = 1 + \epsilon \sum_{i=1}^N g(i) + \epsilon^2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i < j)}}^N g(i,j) + \epsilon^3 \sum_{\substack{i,j,k=1 \\ (i < j < k)}}^N g(i,j,k) \\ + \dots,$$

$$g(i_1, i_2, \dots, i_n) \equiv \begin{vmatrix} h^0(i_1, i_1) & \dots & h^0(i_1, i_n) \\ \vdots & & \vdots \\ h^0(i_n, i_1) & \dots & h^0(i_n, i_n) \end{vmatrix},$$

ただし $h^0(i, j)$ は, つぎの, 満たされる,

$$h^0(i, j) \equiv c_i \delta_{ij} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_{m,i}' \varphi_{m,j}, \text{ for Toda eq.}$$

$$h^0(i, j) \equiv \int dx' \varphi_i'(x', y, t) \varphi_j(x', y, t), \text{ for KP eq.}$$

ここで, $N \rightarrow \infty$ なる summation のはんい Σ , かえて,
 $\sum_1^N \rightarrow \sum_{-\infty}^{\infty}$ とすればよい. また periodicity を
 保障するためには, summation Σ , 同一のもの
 (たとえば step 2 による) periodic な translation
 の和とすればよい. (むしろ, ref. 1, 2) をみよ
 う).

§5. Summary.

HSG や JG eq. の cylindrical soliton Σ ,
 よくしりたう, との問題意識から cylindrical
 Toda soliton の periodic 問題を, かんがえた。
 結論は, 「Toda cylindrical soliton Σ 周期的
 に無限にならねば」という, 平凡なイメージに, おちつ
 いた。副産物として, Hirota bilinear method
 の N -soliton solution の, あたらしい, みちびきかたを,
 みつけたことも, ひとつの収穫であったといえよう。

references

- 1) A. NAKAMURA: J. Phys. Soc. Jpn. 57 (1988) 3309.
- 2) " : " 58 (1989) No. 2 to appear.
- 3) N.C. Freeman and J.J.C. Nimmo: Phys. Lett. 95A (1983) 1.
- 4) R. Hirota, Y. Ohta and J. Satsuma: Prog. Theor. Phys. Suppl. No. 94 (1988) 59.