

5.

Maple の Interval Package を用いた 浮動小数グレブナ基底の計算

尾崎 英司 (京大理)

白柳 潔 (NTT CS 研)

Abstract. This report is also about an example of the stabilization techniques developed by Shih-rayanagi and Sweedler.

We previously used bracket coefficients to make an experiment of computing floating point Gröbner bases. A bracket coefficient is like a circular interval from interval analysis which indicates a center and a radius. Another experiment to make would be using rectangular intervals indicating lower and upper bounds, which also play an important role in numerical approximation. We used Maple's package written by Connell and Corless for performing rectangular interval arithmetic in coefficients, in the course of Buchberger's algorithm, where we judge a rectangular interval as zero if it contains zero. We obtained nice convergence, stability and speed as well as the bracket coefficient version.

5.1 Introduction

多項式環における計算において、その基礎体が有理数の場合はしばしば係数膨張のため、多くの計算時間とスペースがかかる。無理数を含むときはなおさら顕著である。よって、実際の計算においてはこれらの困難を解決しなくてはならない。昨年、白柳 ([4]) は Buchberger's algorithm ([2]) に対して、二つの浮動小数を $[A, \alpha]$ のように組み合わせ、 A を中心とする半径 α の中に真の値が含まれるようにして計算を行なう circular interval を用いて近似算法を提案した。今回は **rectangular interval** を用いてそれを実装し、浮動小数点近似 Gröbner basis の計算を行なった。

5.2 Interval Arithmetic

rectangular interval は $[a_1, a_2]$ (a_1, a_2 は浮動小数) で、 $\{x \mid a_1 \leq x \leq a_2\}$ を表すものである。演算は以下の通りである ([1])。

• 加法

$$[a_1, a_2] + [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

• 減法

$$[a_1, a_2] - [b_1, b_2] = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$$

• 乗法

$$[a_1, a_2] \times [b_1, b_2] = [\min(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2), \max(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2)]$$

実際の計算においては Maple V Release 3 ([3]) の Share Library にある区間演算パッケージ intpak (by Connell, A. & Corless, R. M) を用いた。(ただし区間の下限では切捨て、上限では切上げによる浮動小数演算を行なっている。) 多項式の係数間の計算にはこの intpak を使い、多項式の変数とのインターフェイス ($([a_1, a_2]x + [b_1, b_2]y)^2$ など) は尾崎が作成した。

5.3 Zero Judgement & Supportwise Convergence

Buchberger's algorithm において、係数を区間にして計算を行なうときの問題は、どういう区間を“零”とみなすかである。[4] の提案する circular interval に対する判定法は、

$$[A, \alpha] \text{ が “零” } \stackrel{\text{def}}{\iff} |A| \leq \alpha$$

であった。これに対応して rectangular 版は、

$$[a, b] \text{ が “零” } \stackrel{\text{def}}{\iff} 0 \in [a, b]$$

となる。

この判定法を使うことによって、次のように Supportwise Convergence という収束性が得られる。

定理 5.3.1. 精度 μ での区間演算を使い、上の判定法に従った Buchberger's algorithm の出力を G^μ とする。また、exact な計算における出力 (真のグレブナ基底) を G とする。その時 G^μ は G に係数ごとに収束し、かつ、ある有限の精度からはサポートが一致する。

ここに、多項式 $f = \sum_{\alpha} a_{\alpha} x^{\alpha}$ に対し $\{x^{\beta} | a_{\beta} \neq 0\}$ を多項式のサポートという。多項式の集合のサポートは、各元のサポートの集合である。定理の証明は [4] を参照されたい。circular 版における議論と並行な議論が rectangular 版においても成り立つ。

5.4 Results

前述の Maple V Release 3 の intpak を用いて 浮動小数係数の Buchberger's algorithm を実装し、Supportwise Convergence を観測した。計算機は HP9000/735 である。項順序としては、Total Degree Reverse Lexicographic Order と Pure Lexicographic Order を用いた。なお、これらの順序は Maple の内部関数として実装されている。各変数の順序は $x > y > z$ とし、浮動小数点の精度は 1 ～ 10 までの範囲で行なった。出力結果に関しては最後を参照されたい。

サンプルは以下の多項式の集合で生成されるイデアルを用いた。

Sample 1

$$\left[\left(x^2 - \frac{1}{9} \right)^5, \left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} \right)^5 \right]$$

Sample 2

$$\left[y - z + 1, \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - z + \frac{5}{3}, -x + y + z - 2 \right]$$

Sample 3

$$\left[\frac{1}{7}x^2 - \frac{326548390854652}{272974017239}x + \frac{1263781236281}{712638126}y^2 + \frac{26872672361827}{7263188218281}z^2, \right. \\ \left. \frac{3}{8}xy + \frac{12367812638123}{763812368213132}yz - \frac{63812638126}{77263812831}y, \right. \\ \left. \frac{4}{9}x + \frac{327091270979304}{24122375460421}y + \frac{18467031595309203}{318405459032}z - \frac{356318063693141319}{6436561806418109} \right]$$

Sample 4

$$\left[\sqrt{2}ex^3y + \sqrt{3}xy + \frac{\sqrt{7}}{e}, \frac{\sqrt{3}}{e}x^2y^2 - \sqrt{7}xy + \frac{e}{\sqrt{11}} \right]$$

Sample 5

$$\left[\frac{\sqrt{2}e}{\pi}x^3y + (\sqrt{3} + \pi)xy + \frac{\sqrt{7}}{(e - \pi)}, \frac{(1 - e\sqrt{3})}{e}\pi x^2y^2 - (\sqrt{7} - e)xy + \frac{e}{\sqrt{11}} \right]$$

表 1 に計算時間を示す。計算時間は浮動小数点の精度が 5 ～ 10 までを挙げてある。これらは各 20 回ずつ行ない平均をとった。また、サポートを表にすると表 2 のようになる。

5.5 Conclusion

この計算結果から計算時間に関しては、与えられた多項式が簡単な場合には浮動小数点の計算をしているため逆に時間がかかってしまうが、係数が有理数であっても複雑であったり、無理数を含んでいる場合には計算時間を減らすことに成功している。また計算結果について見てみると、これらのサンプルの場合、精度が5を越えるとサポートが一致している。問題は収束する速度であるが、これらのサンプルにおいては、一桁の精度で収束することが確認された。今後の課題は、収束の速度やサポートが正しいかどうかを判定する方法についての理論的な研究である。

追記：講演のときに、サンプルが小さすぎるとの批判を頂いた。しかし、Sample 4 と Sample 5 からわかるように、正確演算では、係数を少し複雑にするだけで係数膨張の度合いが格段に増大する。係数を Sample 5 より更に複雑にしたら、DecAlpha 上の Risa/Asir（富士通）でも、耐えられる時間内に計算できなかった。一見小さく見える Sample 5 でさえ、係数膨張を攻略する「我々の立場」では十分“大きな”例といえると思う。（浮動小数近似という立場からみれば係数の変化はあまり関係ない。実際、Maple でさえ数秒で計算する。）とはいえ、我々のアプローチが真に有効であると主張するためには、更に多くの“大きな”実例で示す必要があることに異論の余地はない。

参考文献

- [1]Alfeld, G. and Herzberger, J., Introduction to Interval Computations *Computer Science and Applied Mathematics* Academic Press (1983)
- [2]Buchberger, B., Gröbner Bases: An Algorithmic Method in Polynomial Ideal Theory *Multi-dimensional Systems Theory* (ed. Bose, N. K.) 184-232 D. Reidel Publishing Company (1985)
- [3]Char, B. W., Geddes, K. O., Gonnet, G. H., Leeong, B. L., Monagan, M. B., Watt, S. M., First Leaves: A Tutorial Introduction to Maple V Springer-Verlag (1992)
- [4]Shirayanagi, K., An Algorithm to Compute Floating Point Gröbner Bases, *Mathematical Computation with Maple V: Ideas and Applications* (ed. T. Lee) 95-106 Birkhäuser (1993)

	Total Degree Order			Pure Lexicographic Order		
	Exact Case	Interval Case		Exact Case	Interval Case	
	(sec)	Digits	(sec)	(sec)	Digits	(sec)
Sample 1	0.368	5	2.689	0.366	5	2.654
		6	2.922		6	2.873
		7	2.794		7	2.728
		8	2.803		8	2.719
		9	2.831		9	2.758
		10	2.799		10	2.741
Sample 2	0.267	5	0.808	0.282	5	0.808
		6	0.812		6	0.802
		7	0.803		7	0.808
		8	0.817		8	0.799
		9	0.813		9	0.807
		10	0.808		10	0.805
Sample 3	22.28	5	4.772	145.1	5	5.344
		6	4.831		6	4.541
		7	5.088		7	4.523
		8	4.800		8	4.580
		9	4.823		9	4.513
		10	4.728		10	4.598
Sample 4	29.80	5	2.706	43.75	5	2.721
		6	2.646		6	2.021
		7	2.576		7	2.305
		8	2.647		8	1.997
		9	2.598		9	2.021
		10	2.596		10	2.359
Sample 5	Cannot compare because of “object too large” error in Exact Cases.					

表 1 計算時間

	Total Degree Order			Pure Lexicographic Order		
	Exact Case	Interval Case		Exact Case	Interval Case	
		Digits			Digits	
Sample 1	$\{x^5, x^4, x^3$ $x^2, x, 1\}$	1	$\{x^2\}$	$\{x^5, x^4, x^3$ $x^2, x, 1\}$	1	$\{x^2\}$
		2	$\{x^6, x^5, x^4, x^3$ $x^2, x, 1\}$		2	$\{x^6, x^5, x^4, x^3$ $x^2, x, 1\}$
		3	$\{1\}$		3	$\{1\}$
		4	$\{x^3, x^2, x, 1\}$		4	$\{x^3, x^2, x, 1\}$
		5	$\{x^2, x, 1\}$		5	$\{1\}$
		6	$\{1\}$		6	$\{x^2, x, 1\}$
		7 -	$\{x^5, x^4, x^3, x^2, x^1, 1\}$		7 -	$\{x^5, x^4, x^3, x^2, x, 1\}$
		Sample 2	$\{z, 1\}, \{y\}$ $\{x, 1\}$		1	$\{x\}, \{z, 1\}, \{y, 1\}$
2	$\{1\}$			2	$\{1\}$	
3 -	$\{z, 1\}, \{y\}, \{x, 1\}$			3 -	$\{z, 1\}, \{y\}, \{x, 1\}$	
Sample 3	$\{x, y, z, 1\}$ $\{y^2, z^2, y, z, 1\}$ $\{z^3, z^2, y, z, 1\}$ $\{yz, z^2, y, z, 1\}$	1	$\{z^3\}, \{y^2, z^2\}$ $\{x, z, 1\}, \{yz\}$	$\{z^3, z^2, y, z, 1\}$ $\{z^4, z^3, z^2, 1\}$ $\{z^3, z^2, x, z, 1\}$	1	$\{z^3\}, \{y^2, z^2\}$ $\{x, z, 1\}, \{yz\}$
		2	$\{z\}, \{y, 1\}, \{x\}$		2	$\{z\}, \{x\}, \{y, 1\}$
		3	$\{x\}, \{y, 1\}, \{z\}$		3	$\{z\}, \{x\}, \{y, 1\}$
		4	$\{x\}, \{y, 1\}, \{z\}$		4	$\{y, z, 1\}, \{x, z\}, \{z^2\}$
		5 -	$\{x, y, z, 1\}$ $\{z^3, z^2, y, z, 1\}$ $\{yz, z^2, y, z, 1\}$ $\{y^2, z^2, y, z, 1\}$		5	$\{y, 1\}, \{x, 1\}, \{z\}$
		6 -	$\{z^4, z^3, z^2, 1\}$ $\{z^3, z^2, y, z, 1\}$ $\{z^3, z^2, x, z, 1\}$		6 -	$\{z^4, z^3, z^2, 1\}$ $\{z^3, z^2, y, z, 1\}$ $\{z^3, z^2, x, z, 1\}$
Sample 4	$\{y^3, y, x\}$ $\{y^2, yx, 1\}$ $\{y^2, x^2, 1\}$	1	$\{x^2, 1\}, \{xy^2, x\}$	$\{y^3, y, x\}$ $\{y^4, y^2, 1\}$	1	$\{1\}$
		2	$\{y^3, x\}, \{x^2, 1\}$ $\{xy, y^2, 1\}$		2	$\{y^3, x\}, \{y^4, y^2, 1\}$
		3	$\{y^3, x, y\}, \{x^2, 1\}$ $\{xy, y^2, 1\}$		3	$\{1\}$
		4	$\{1\}$		4	$\{1\}$
		5 -	$\{y^3, y, x\}, \{y^2, x^2, 1\}$ $\{y^2, yx, 1\}$		5 -	$\{y^3, y, x\}$ $\{y^4, y^2, 1\}$

表 2 サポート

5.7 Appendix: Output

計算出力を以下に挙げる。exact な場合の出力は繁雑となり区間演算と比較しにくいので出力を浮動小数点表示に直してある。フォーマットは左から精度、時間、出力、zero judgement の回数である。Sample 3 の場合は非常に結果が繁雑となるためここには挙げていない。Sample 5 の場合 exact な場合は Object Too Large ERROR により、出力されなかった。また、精度 1 の場合は e 、 π ともに 3 と判断されてしまい、与式の分母が 0 になるため計算できない。

Sample 1		Total Degree Order	
Exact	0.583	$0.2088393471x^5 + 0.3480655785x^4 + 0.2320437190x^3$	
Result		$+0.7734790633 \times 10^{-1}x^2 + 0.1289131772 \times 10^{-1}x + 0.8594211815 \times 10^{-3}$	
1	0.966	$[2., .4 \times 10^{10}]x^2$	27
2	1.934	$[.39 \times 10^6, .73 \times 10^7]x^6 + [.36 \times 10^6, .32 \times 10^7]x^5 + [.12 \times 10^6, .89 \times 10^6]x^4$ $+ [.28 \times 10^5, .17 \times 10^6]x^3 + [.33 \times 10^4, .18 \times 10^5]x^2 + [.28 \times 10^3, .15 \times 10^4]x + [15., .12 \times 10^3]$	10
3	2.650	$[-.651 \times 10^4, -175.]$	9
4	2.633	$[.2624 \times 10^7, .8148 \times 10^8]x^3 + [.9735 \times 10^6, .1027 \times 10^8]x^2$ $+ [.9579 \times 10^5, .1003 \times 10^7]x + [6376., .6698 \times 10^5]$	10
5	2.750	$[.11209 \times 10^6, .15416 \times 10^8]x^2 + [.56613 \times 10^6, .20177 \times 10^7]x + [37735., .13454 \times 10^6]$	11
6	3.100	$[510944., .966320 \times 10^9]$	10
7	2.717	$[.1097599 \times 10^{10}, .3078601 \times 10^{10}]x^5 + [.3144899 \times 10^{10}, .3816031 \times 10^{10}]x^4$ $+ [.2254605 \times 10^{10}, .2386194 \times 10^{10}]x^3 + [.7654196 \times 10^9, .7815290 \times 10^9]x^2$ $+ [.1281486 \times 10^9, .1296768 \times 10^9]x + [8543231., .8645129.]$	9
8	2.900	$[.19924899 \times 10^{11}, .21862101 \times 10^{11}]x^5 + [.34481959 \times 10^{11}, .35138201 \times 10^{11}]x^4$ $+ [.23140747 \times 10^{11}, .23269440 \times 10^{11}]x^3 + [.77270084 \times 10^{10}, .77427644 \times 10^{10}]x^2$ $+ [.12883943 \times 10^{10}, .12898888 \times 10^{10}]x + [85892944., .85992601.]$	9
9	2.750	$[.207881899 \times 10^{12}, .209791201 \times 10^{12}]x^5 + [.347741139 \times 10^{12}, .348388041 \times 10^{12}]x^4$ $+ [.231980093 \times 10^{12}, .232106942 \times 10^{12}]x^3 + [.773401169 \times 10^{11}, .773556452 \times 10^{11}]x^2$ $+ [.128905788 \times 10^{11}, .128920516 \times 10^{11}]x + [859371911., .859470119.]$	9
10	2.883	$[.2087463299 \times 10^{13}, .2089322401 \times 10^{13}]x^5 + [.3480340679 \times 10^{13}, .3480970401 \times 10^{13}]x^4$ $+ [.2320375404 \times 10^{13}, .2320498881 \times 10^{13}]x^3 + [.7734714987 \times 10^{12}, .7734866165 \times 10^{12}]x^2$ $+ [.1289124596 \times 10^{12}, .1289138937 \times 10^{12}]x + [8594163964., .8594259588.]$	9

Sample 1		Pure Lexicographic Order	
<i>Exact</i>	0.400	$0.2088393471x^5 + 0.3480655785x^4 + 0.2320437190x^3$	
<i>Result</i>		$+0.7734790633 \times 10^{-1}x^2 + 0.1289131772 \times 10^{-1}x + 0.8594211815 \times 10^{-3}$	
1	1.033	$[2., .4 \times 10^{10}]x^2$	27
2	1.867	$[.39 \times 10^6, .73 \times 10^7]x^6 + [.36 \times 10^6, .32 \times 10^7]x^5 + [.12 \times 10^6, .89 \times 10^6]x^4$ $+ [.28 \times 10^5, .17 \times 10^6]x^3 + [.33 \times 10^4, .18 \times 10^5]x^2 + [.28 \times 10^3, .15 \times 10^4]x + [.15, .12 \times 10^3]$	10
3	2.383	$[-.651 \times 10^4, -175.]$	9
4	2.667	$[.2624 \times 10^7, .8148 \times 10^8]x^3 + [.9735 \times 10^6, .1027 \times 10^8]x^2$ $+ [.9579 \times 10^5, .1003 \times 10^7]x + [6376., .6698 \times 10^5]$	10
5	2.484	$[.11209 \times 10^6, .15416 \times 10^8]x^2 + [.56613 \times 10^6, .20177 \times 10^7]x + [37735., .13454 \times 10^6]$	11
6	2.866	$[510944., .966320 \times 10^9]$	10
7	2.600	$[.1097599 \times 10^{10}, .3078601 \times 10^{10}]x^5 + [.3144899 \times 10^{10}, .3816031 \times 10^{10}]x^4$ $+ [.2254605 \times 10^{10}, .2386194 \times 10^{10}]x^3 + [.7654196 \times 10^9, .7815290 \times 10^9]x^2$ $+ [.1281486 \times 10^9, .1296768 \times 10^9]x + [8543231., .8645129.]$	9
8	2.767	$[.19924899 \times 10^{11}, .21862101 \times 10^{11}]x^5 + [.34481959 \times 10^{11}, .35138201 \times 10^{11}]x^4$ $+ [.23140747 \times 10^{11}, .23269440 \times 10^{11}]x^3 + [.77270084 \times 10^{10}, .77427644 \times 10^{10}]x^2$ $+ [.12883943 \times 10^{10}, .12898888 \times 10^{10}]x + [85892944., .85992601.]$	9
9	2.800	$[.207881899 \times 10^{12}, .209791201 \times 10^{12}]x^5 + [.347741139 \times 10^{12}, .348388041 \times 10^{12}]x^4$ $+ [.231980093 \times 10^{12}, .232106942 \times 10^{12}]x^3 + [.773401169 \times 10^{11}, .773556452 \times 10^{11}]x^2$ $+ [.128905788 \times 10^{11}, .128920516 \times 10^{11}]x + [859371911., .859470119.]$	9
10	2.666	$[.2087463299 \times 10^{13}, .2089322401 \times 10^{13}]x^5 + [.3480340679 \times 10^{13}, .3480970401 \times 10^{13}]x^4$ $+ [.2320375404 \times 10^{13}, .2320498881 \times 10^{13}]x^3 + [.7734714987 \times 10^{12}, .7734866165 \times 10^{12}]x^2$ $+ [.1289124596 \times 10^{12}, .1289138937 \times 10^{12}]x + [8594163964., .8594259588.]$	9

Sample 2		Total Degree Order	
<i>Exact Result</i>	0.483	$0.666666667x - 0.666666667y, 0.444444444x + 0.444444444$	
1	0.533	$[5., 9.]x, [4., 60.]z + [-30., -2], [3., 70.]y + [2., 80.]$	9
2	0.883	$[-32., -11.]$	4
3	0.750	$[662., 672.]z + [-672., -662], [439., 451.]x + [400., 492], [661., 673.]y$	5
4	0.917	$[4439., 4451.]x + [4399., 4491], [6662., 6672.]z + [-6672., -6662], [6661., 6673.]y$	5
5	0.750	$[66662., 66672.]z + [-66672., -66662], [66661., 66673.]y, [44439., 44451.]x + [44399., 44491.]$	5
6	0.933	$[666661., 666673.]y, [444439., 444451.]x + [444399., 444491],$ $[666662., 666672.]z + [-666672., -666662.]$	5
7	0.750	$[6666662., 6666672.]z + [-6666672., -6666662],$ $[6666661., 6666673.]y, [4444439., 4444451.]x + [4444399., 4444491.]$	5
8	0.934	$[66666661., 66666673.]y, [44444439., 44444451.]x + [44444399., 44444491],$ $[66666662., 66666672.]z + [-66666672., -66666662.]$	5
9	0.750	$[666666662., 666666672.]z + [-666666672., -666666662],$ $[666666661., 666666673.]y, [444444439., 444444451.]x + [444444399., 444444491.]$	5
10	0.950	$[6666666662., 6666666672.]z + [-6666666672., -6666666662],$ $[4444444439., 4444444451.]x + [4444444399., 4444444491], [6666666661., 6666666673.]y$	5

Sample 2		Pure Lexicographic Order	
<i>ExactResult</i>	0.250	$0.666666667z - 0.666666667, 0.666666667y, 0.444444444x + 0.444444444$	
1	0.667	$[5., 9.]x, [3., 7 \times 10^2]y + [2., 8 \times 10^2], [4., 6 \times 10^2]z + [-3 \times 10^2, -2.]$	9
2	0.733	$[-32., -11.]$	4
3	0.700	$[662., 672.]z + [-672., -662.], [661., 673.]y, [439., 451.]x + [400., 492.]$	5
4	0.900	$[6661., 6673.]y, [4439., 4451.]x + [4399., 4491.], [6662., 6672.]z + [-6672., -6662.]$	5
5	0.750	$[66662., 66672.]z + [-66672., -66662.], [66661., 66673.]y, [44439., 44451.]x + [44399., 44491.]$	5
6	0.884	$[666662., 666672.]z + [-666672., -666662.], [666661., 666673.]y,$ $[444439., 444451.]x + [444399., 444491.]$	5
7	0.750	$[6666662., 6666672.]z + [-6666672., -6666662.], [6666661., 6666673.]y,$ $[4444439., 4444451.]x + [4444399., 4444491.]$	5
8	0.933	$[44444439., 44444451.]x + [44444399., 44444491.], [66666661., 66666673.]y,$ $[66666662., 66666672.]z + [-66666672., -66666662.]$	5
9	0.750	$[666666661., 666666673.]y, [444444439., 444444451.]x + [444444399., 444444491.],$ $[666666662., 666666672.]z + [-666666672., -666666662.]$	5
10	0.933	$[4444444439., 4444444451.]x + [4444444399., 4444444491.], [6666666661., 6666666673.]y,$ $[6666666662., 6666666672.]z + [-6666666672., -6666666662.]$	5

Sample 4 (1)		Total Degree Order	
<i>Exact</i>	31.633	$-132552885.6y^3 - 3879281552.y - 1085028164.x,$	
<i>Result</i>		$492680.0347y^2 + 3975253.928yx - 1293658.023,$	
		$8401300.995y^2 + 344376408.2x^2 + 414570126.4$	
1	1.050	$[3., .2 \times 10^7]x^2 + [5., .9 \times 10^6], [1., .7 \times 10^7]xy^2 + [-.2 \times 10^8, -1.]x$	11
2	1.850	$[-.75 \times 10^3, -10.]y^3 + [-.43 \times 10^4, -.11 \times 10^3]x,$ $[-.77 \times 10^3, -91.]xy + [-.32 \times 10^3, -25.]y^2 + [32., .23 \times 10^3],$ $[47., .16 \times 10^3]x^2 + [64., .24 \times 10^3]$	7
3	2.017	$[-950., -580.]y^3 + [-.845 \times 10^4, -.564 \times 10^4]x + [-.343 \times 10^5, -.199 \times 10^5]y,$ $[-.289 \times 10^4, -.225 \times 10^4]xy + [-904., -669.]y^2 + [711., 883.],$ $[806., 917.]x^2 + [.101 \times 10^4, .118 \times 10^4]$	6
4	2.900	$[1615., 3134.]$	9
5	2.517	$[-.69578 \times 10^6, -.68296 \times 10^6]xy + [-85654., -85204.]y^2 + [.22222 \times 10^6, .22644 \times 10^6],$ $[-23263., -22718.]y^3 + [-.19009 \times 10^6, -.18625 \times 10^6]x + [-.68178 \times 10^6, -.66378 \times 10^6]y,$ $[-.60325 \times 10^6, -.59126 \times 10^6]x^2 + [-14805., -14339.]y^2 + [-.72756 \times 10^6, -.71046 \times 10^6]$	9

Sample 4 (2)		Total Degree Order	
6	2.716	$[.688587 \times 10^7, .689755 \times 10^7]xy + [853926, .854338.]y^2 + [-.224467 \times 10^7, -.224083 \times 10^7],$ $[229551., 230050.]y^3 + [.187927 \times 10^7, .188279 \times 10^7]x + [.671709 \times 10^7, .673346 \times 10^7]y,$ $[-.597570 \times 10^7, -.596475 \times 10^7]x^2 + [-.145865., -.145437.]y^2 + [-.719498 \times 10^7, -.717935 \times 10^7]$	9
7	2.667	$[.3974817 \times 10^8, .3975705 \times 10^8]xy + [4926637., 4926977.]y^2 + [-.1294235 \times 10^8, -.1293085 \times 10^8],$ $[.3443363 \times 10^9, .3444185 \times 10^9]x^2 + [8400028., 8402601.]y^2 + [.4145060 \times 10^9, .4146359 \times 10^9],$ $[-.1325687., -.1325376.]y^3 + [-.1085163 \times 10^8, -.1084900 \times 10^8]x$ $+ [-.3880005 \times 10^8, -.3878570 \times 10^8]y$	9
8	2.883	$[.39752096 \times 10^9, .39752997 \times 10^9]xy + [49267839., 49268177.]y^2$ $+ [-.12937160 \times 10^9, -.12936004 \times 10^9],$ $[-.13255449., -.13255133.]y^3 + [-.10850417 \times 10^9, -.10850151 \times 10^9]x$ $+ [-.38793547 \times 10^9, -.38792104 \times 10^9]y,$ $[.34437233 \times 10^{10}, .34438063 \times 10^{10}]x^2 + [84011715., 84014343.]y^2$ $+ [.41456364 \times 10^{10}, .41457677 \times 10^{10}]$	9
9	2.533	$[-.597028651 \times 10^{10}, -.597027560 \times 10^{10}]x^2 + [-.145649358., -.145648931.]y^2$ $+ [-.718720212 \times 10^{10}, -.718718655 \times 10^{10}],$ $[-.689170417 \times 10^{10}, -.689169248 \times 10^{10}]xy + [-.854134858., -.854134452.]y^2$ $+ [.224274809 \times 10^{10}, .224275194 \times 10^{10}],$ $[-.229800540., -.229800042.]y^3 + [-.188106064 \times 10^{10}, -.188105716 \times 10^{10}]x$ $+ [-.672532397 \times 10^{10}, -.672530765 \times 10^{10}]y$	9
10	2.767	$[-.6891698802 \times 10^{11}, -.6891697635 \times 10^{11}]xy + [-.8541346683., -.8541346271.]y^2$ $+ [.2242749792 \times 10^{11}, .2242750176 \times 10^{11}],$ $[-.2298003099., -.2298002601.]y^3 + [-.1881059041 \times 10^{11}, -.1881058692 \times 10^{11}]x$ $+ [-.6725316533 \times 10^{11}, -.6725314897 \times 10^{11}]y,$ $[-.5970281486 \times 10^{11}, -.5970280397 \times 10^{11}]x^2 + [-.1456491605., -.1456491177.]y^2$ $+ [-.7187194981 \times 10^{11}, -.7187193426 \times 10^{11}]$	9

Sample 4		Pure Lexicographic Order	
<i>Exact</i>	44.267	$-0.4410282757 \times 10^{14} y^3 - 0.1290709626 \times 10^{16} y - 0.3610091913 \times 10^{15} x,$	
<i>Result</i>		$0.1011276543 \times 10^{24} y^4 + 0.2856999414 \times 10^{25} y^2 + 0.2693868358 \times 10^{24}$	
1	0.534	$[5., .3 \times 10^7]$	3
2	1.700	$[-.75 \times 10^3, -10.] y^3 + [-.43 \times 10^4, -.11 \times 10^3] x,$ $[-.60 \times 10^5, -.89.] y^4 + [.27 \times 10^3, .15 \times 10^6] y^2 + [-.10 \times 10^6, -.34 \times 10^3]$	5
3	2.133	$[-.835 \times 10^6, -376.]$	5
4	2.467	$[-.4392 \times 10^5, -1004.]$	4
5	2.016	$[-23263., -22718.] y^3 + [-.19009 \times 10^6, -.18625 \times 10^6] x + [-.68178 \times 10^6, -.66378 \times 10^6] y,$ $[-16187., -15514.] y^4 + [-.45853 \times 10^6, -.43703 \times 10^6] y^2 + [-43045., -41387.]$	3
6	1.934	$[-158679., -158065.] y^4 + [-.448399 \times 10^7, -.446442 \times 10^7] y^2 + [-422625., -421114.],$ $[-230050., -229551.] y^3 + [-.188279 \times 10^7, -.187928 \times 10^7] x + [-.673346 \times 10^7, -.671709 \times 10^7] y$	3
7	1.933	$[-1584028., -1583376.] y^4 + [-.4475228 \times 10^8, -.4473146 \times 10^8] y^2 + [-4219520., -4217925.],$ $[-2298258., -2297728.] y^3 + [-.1881239 \times 10^8, -.1880870 \times 10^8] x$ $+ [-.6726167 \times 10^8, -.6724418 \times 10^8] y$	3
8	1.950	$[-22980283., -22979773.] y^3 + [-.18810767 \times 10^9, -.18810410 \times 10^9] x$ $+ [-.67253996 \times 10^9, -.67252324 \times 10^9] y, [-15837455., -15836827.] y^4$ $+ [-.44743167 \times 10^9, -.44741170 \times 10^9] y^2 + [-42188214., -42186674.]$	3
9	1.900	$[-229800540., -229800042.] y^3 + [-.188106064 \times 10^{10}, -.188105716 \times 10^{10}] x$ $+ [-.672532397 \times 10^{10}, -.672530765 \times 10^{10}] y, [-158371735., -158371121.] y^4$ $+ [-.447422678 \times 10^{10}, -.447420724 \times 10^{10}] y^2 + [-421875241., -421873734.]$	3
10	2.550	$[-4410292840., -4410272613.] y^3 + [-.3610098683 \times 10^{11}, -.3610085073 \times 10^{11}] x$ $+ [-.1290712423 \times 10^{12}, -.1290706808 \times 10^{12}] y, [1011272702., 1011280355.] y^4$ $+ [.2856988246 \times 10^{11}, .2857010493 \times 10^{11}] y^2 + [2693859174., 2693877445.]$	4

Sample 5		Total Degree Order	
Exact Result	∞	"object too large" ERROR	
2	1.117	$[-.99 \times 10^3, -68.]$	4
3	1.300	$[119., 156.]$	4
4	2.550	$[5083., .3181 \times 10^5]x, [-.1054 \times 10^8, -.6195 \times 10^6]y^2 + [8000., .5307 \times 10^5]$	8
5	2.517	$[35411., 72537.]$	5
6	2.533	$[.100354 \times 10^7, .101222 \times 10^7]xy + [-.232041 \times 10^8, -.229849 \times 10^8]y^2 + [164882., 164982.],$ $[-.526284 \times 10^9, -.521018 \times 10^9]y^3 + [-989825., -981089.]x + [.303265 \times 10^8, .305671 \times 10^8]y,$ $[978292., 986942.]x^2 + [-.605215 \times 10^9, -.597510 \times 10^9]y^2 + [.862494 \times 10^7, .868001 \times 10^7]$	9
7	2.800	$[.5856678 \times 10^8, .5864622 \times 10^8]xy + [-.1343565 \times 10^{10}, -.1342232 \times 10^{10}]y^2$ $+ [9590008., 9590911.], [.3043468 \times 10^{10}, .3046643 \times 10^{10}]y^3 + [5726607., 5734495.]x$ $+ [-.1771589 \times 10^9, -.1769417 \times 10^9]y, [5710054., 5717895.]x^2$ $+ [-.3499184 \times 10^{10}, -.3494672 \times 10^{10}]y^2 + [.5029218 \times 10^8, .5033668 \times 10^8]$	9
8	2.583	$[-.10079720 \times 10^9, -.10078937 \times 10^9]xy + [.23094439 \times 10^{10}, .23096511 \times 10^{10}]y^2$ $+ [-16494057., -16493966.], [.52366575 \times 10^{11}, .52371550 \times 10^{11}]y^3 + [98550978., 98558841.]x$ $+ [-.30450513 \times 10^{10}, -.30448338 \times 10^{10}]y, [98266007., 98273807.]x^2$ $+ [-.60144082 \times 10^{11}, -.60136736 \times 10^{11}]y^2 + [.86529112 \times 10^9, .86534192 \times 10^9]$	9
9	2.700	$[-.100793747 \times 10^{10}, -.100793026 \times 10^{10}]xy + [.230954099 \times 10^{11}, .230956051 \times 10^{11}]y^2$ $+ [-164940282., -164940196.], [.523689238 \times 10^{12}, .523693923 \times 10^{12}]y^3$ $+ [985546901., 985554138.]x + [-.304495723 \times 10^{11}, -.304493720 \times 10^{11}]y,$ $[982696835., 982704021.]x^2 + [-.601408846 \times 10^{12}, -.601401974 \times 10^{12}]y^2$ $+ [.865315430 \times 10^{10}, .865320113 \times 10^{10}]$	9
10	2.734	$[-.1007934128 \times 10^{11}, -.1007933402 \times 10^{11}]xy + [.2309549569 \times 10^{12}, .2309551541 \times 10^{12}]y^2$ $+ [-1649402297., -1649402210.], [.5236912788 \times 10^{13}, .5236917520 \times 10^{13}]y^3$ $+ [9855500200., 9855507488.]x + [-.3044947773 \times 10^{12}, -.3044945756 \times 10^{12}]y,$ $[9826999319., 9827006554.]x^2 + [-.6014056652 \times 10^{13}, -.6014049750 \times 10^{13}]y^2$ $+ [.8653174116 \times 10^{11}, .8653178807 \times 10^{11}]$	9

Sample 5		Pure Lexicographic Order	
Exact Result	∞	"object too large" ERROR	
2	1.116	$[-.99 \times 10^3, -68.]$	4
3	1.334	$[-152., -122.]$	4
4	1.783	$[1213., 2638 \times 10^6]$	4
5	1.967	$[\text{.49987} \times 10^8, \text{.54720} \times 10^8]v^3 + [\text{94796.}, \text{.10213} \times 10^6]x + [-.31436 \times 10^7, -.29408 \times 10^7]v,$ $[\text{.48530} \times 10^8, \text{.57129} \times 10^8]v^4 + [-.11864 \times 10^7, -.39559 \times 10^6]v^2 + [-16877., -15581.]$	3
6	2.650	$[-832872., -481430.]$	4
7	1.950	$[\text{.5234721} \times 10^{10}, \text{.5239431} \times 10^{10}]v^3 + [\text{9852019.}, \text{9859496.}]x$ $+ [-.3046056 \times 10^9, -.3043989 \times 10^9]v, [\text{.5274389} \times 10^{10}, \text{.5283045} \times 10^{10}]v^4$ $+ [-.7969571 \times 10^8, -.7889379 \times 10^8]v^2 + [-1626297., -1624977.]$	3
8	2.083	$[\text{.52366575} \times 10^{11}, \text{.52371550} \times 10^{11}]v^3 + [\text{98550978.}, \text{98558841.}]x$ $+ [-.30450513 \times 10^{10}, -.30448338 \times 10^{10}]v, [\text{.52779935} \times 10^{11}, \text{.52789062} \times 10^{11}]v^4$ $+ [-.79334751 \times 10^9, -.79250289 \times 10^9]v^2 + [-16256352., -16254964.]$	3
9	2.100	$[\text{.523689238} \times 10^{12}, \text{.523693923} \times 10^{12}]v^3 + [\text{985546901.}, \text{985554138.}]x$ $+ [-.304495723 \times 10^{11}, -.304493720 \times 10^{11}]v, [\text{.527842224} \times 10^{12}, \text{.527850734} \times 10^{12}]v^4$ $+ [-.792965571 \times 10^{10}, -.792887369 \times 10^{10}]v^2 + [-162557578., -162556298.]$	3
10	2.083	$[-.5236917715 \times 10^{13}, -.5236912595 \times 10^{13}]v^3 + [-9855508034., -9855499629.]x$ $+ [\text{.3044945602} \times 10^{12}, \text{.3044947920} \times 10^{12}]v, [\text{.5278458828} \times 10^{13}, \text{.5278468374} \times 10^{13}]v^4$ $+ [-.7929306801 \times 10^{11}, -.7929217479 \times 10^{11}]v^2 + [-1625569765., -1625568281.]$	3