

流れのある場合の核磁気共鳴

東大・理・物理 高木 伸

スピン三重項のクーパー対をもつ超流動体においては、一般に、横磁気共鳴線（振動磁場を静磁場に垂直にかけるときの共鳴線）の位置がラーマー周波数から移動し、縦磁気共鳴（振動磁場を静磁場に平行にかけるときの共鳴）も有限の周波数で起きると考えられる。横（縦）磁気共鳴線の位置を ω_t (ω_ℓ) と書き、ラーマー周波数を ω_L と書くと、レゲットの方程式¹⁾ から次の和則が得られる。

$$\begin{aligned}
 (\omega_t^2 - \omega_L^2) + \omega_\ell^2 &= \Omega_{xx}^2 + \Omega_{yy}^2 + \Omega_{zz}^2 \\
 &= -6 \frac{r^2}{\chi} \langle \mathcal{H}_d \rangle, \quad (1)
 \end{aligned}$$

ここで

$$\Omega_{ij}^2 = -\frac{r^2}{\chi} \langle [S_i [S_j \mathcal{H}_d]] \rangle,$$

χ : スピン帯磁率

r : 磁気回転比

$\vec{S}$: 系の全スピン

$\mathcal{H}_d$: 磁気双極子・双極子相互作用

である。特に $\omega_L^2 \gg \Omega_{ij}^2$ のときには、

$$\begin{aligned}
 \omega_t^2 - \omega_L^2 &= \Omega_{xx}^2 + \Omega_{yy}^2 \\
 \omega_\ell^2 &= \Omega_{zz}^2 \quad (2)
 \end{aligned}$$

（静磁場 $\vec{H}$ は $\hat{Z}$ 方向にけるものとする）となる。一般的に $\omega_t^2 - \omega_L^2$ と ω_ℓ^2 とを別々に求めるには、3 次方程式を解かねばならない。（ $\omega_L \equiv rH = 0$ ならば、「Z 方向」に特別の意味がないので、適当な座標系を選んで Ω_{ij}^2 を対角化すればよい。）

Ω_{ii}^2 は、 i 軸の回りにスピンをよじったときの双極子・双極子相互作用エネルギー（以下、「DE」と略称）の変化に関係づけられる量で、常に $\Omega_{zz}^2 \geq 0$ である。また $\omega_L \rightarrow 0$ の極限では、 $\Omega_{xx}^2 \geq 0$ 、 $\Omega_{yy}^2 \geq 0$ である。これは、平衡状態が、DEを最低にする状態になっているためである。ところが、 ω_L が充分大きいときには、平衡状態で必ずしもDEが最低になっているとは限らない。もちろん、全自由エネルギー F は最低になっている。したがって、スピンをよじったとき、 F は増大するがDEは減少することがある。故に、 $\Omega_{xx}^2, \Omega_{yy}^2 < 0$ になり得る。

このような現象の起こる一つの例として、超流体の流れがある場合の核磁気共鳴を考えよう。充分大きな系を考え、境界（容器の壁など）の影響は無視できるものとする、系の平衡状態は次のように決まるであろう。まず、スピン空間および軌道空間の回転に対して不変な自由エネルギーを F_0 とする。秩序パラメータ $\vec{A}(\hat{k})$ は F_0 を最低にするように決めるが、スピンと軌道の配向は F_0 だけでは決まらず、回転対称性を破る項が必要になる。そのために、磁場、流れ、およびDEを考え、これらを摂動で扱おうと、

$$F - F_0 = -\frac{1}{2} \vec{H} \overleftrightarrow{\chi} \vec{H} + \frac{1}{2} \vec{v} \overleftrightarrow{\rho}_s \vec{v} + \langle \mathcal{H}_d \rangle, \quad (3)$$

となる。ただし

$\overleftrightarrow{\chi}$: 秩序パラメータのスピン量子化軸を固定したときの、スピン帯磁率テンソル

$\overleftrightarrow{\rho}_s$: 秩序パラメータの軌道量子化軸を固定したときの、超流体密度テンソル

である。話を T_c 近傍に限り、秩序パラメータで展開すると

$$\begin{aligned} \chi_{ij}/\chi_n &= \delta_{ij} - \frac{1}{1 + Z_0/4} \frac{7\zeta(3)}{8\pi^2 T_c^2} \langle \hat{A}_i(\hat{k}) \hat{A}_j(\hat{k})^* + \text{c.c.} \rangle, \\ \rho_{sij}/\rho &= \frac{1}{1 + F_1/3} \frac{21\zeta(3)}{4\pi^2 T_c^2} \langle \hat{k}_i \hat{k}_j | \vec{\hat{A}}(\hat{k})|^2 \rangle, \end{aligned} \quad (4)$$

ただし χ_n は正常相でのスピン帯磁率、 Z_0 および F_1 はランダウのフェルミ液体パラメータである。また今後 $\langle \dots \rangle$ はフェルミ面上での角度平均の意味に用いる。したがって、

$$\begin{aligned} F - F_0 &= N(0) \left\{ M \langle |\hat{h} \cdot \vec{\hat{A}}(\hat{k})|^2 \rangle + C \langle (\hat{v} \cdot \hat{k})^2 | \vec{\hat{A}}(\hat{k})|^2 \rangle \right. \\ &\quad \left. + D \langle |\hat{k} \cdot \vec{\hat{A}}(\hat{k})|^2 - \frac{1}{3} | \vec{\hat{A}}(\hat{k})|^2 \rangle \right\}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\hat{h} = \vec{H} / H, \quad \hat{v} = \vec{v} / v,$$

$$M = \frac{7\zeta(3)}{16\pi^2} \frac{1}{(1 + Z_0/4)^2} \left(\frac{\hbar \omega_L}{T_c} \right)^2,$$

$$C = \frac{7\zeta(3)}{4\pi^2} \frac{1}{(1 + F_1/3)^2} \left(\frac{p_F v}{T_c} \right)^2,$$

$$D = 3\pi R^2 \frac{g_d}{g^2}, \quad g_d \equiv r^2 \hbar^2 N(0) / V.$$

ここで、 $N(0)$ はフェルミ面での片方のスピンの状態密度、 p_F はフェルミ運動量、 g は無次元のBCS結合定数、 V は体積、 R^2 は $\langle \mathcal{M}_d \rangle$ の計算で現われるくり込み定数²⁾である。(Dのより精確な評価は核磁気共鳴線の移動の大きさと(1)を組合わせて得られる。) 式(5)を導くにあたり、 $\vec{d}(\hat{k})$ の $\hat{k}$ 依存性が (T_c の近傍では) 一種類の部分波で表わせると仮定した。また、等方的な部分はすべて F_0 に吸収させた(以下同様)。

スピン三種類のクーパー対のうちで最も簡単な、「一次元的な対」を考えよう。すなわち、次のような構造を仮定する。

$$\vec{d}(\hat{k}) = \hat{d} f(\hat{k}) d(T) \quad (6)$$

ここで、 $\hat{d}$ はクーパー対のスピン量子化軸を規定する単位ベクトル、 $f(\hat{k})$ は

$$\langle |f(\hat{k})|^2 \rangle = 1$$

によって規格化された軌道波動函数である。(一般の三重項クーパー対の構造は「三次元的」であり、互いに直交する単位ベクトル $\hat{d}_1, \hat{d}_2, \hat{d}_3$ を用いて

$$\vec{d}(\hat{k}) = \sum_{i=1}^3 \hat{d}_i f_i(\hat{k}; T) \quad (7)$$

の形に書ける。(6)は、(7)において $f_1 = f_2 = 0$ の場合を考え、かつ、 $f_1(\hat{k}; T) = f(\hat{k}) d(T)$ という簡単化(つまり、波動函数の $\hat{k}$ 依存性が温度とともに連続的に変化することはないという仮定)をしたものである。) 更に、 $f(\hat{k})$ はある単位ベクトル $\hat{\ell}$ の回りに軸対称性をもっていると仮定しよう。「 $\hat{\ell}$ の回りで軸対称である」とは、 $\hat{\ell}$ を z' 軸とする座標系 $x' y' z'$ において次の関係がみたされていることである、と定義する。

$$\langle \hat{k}_i' \hat{k}_j' | f(\hat{k}) |^2 \rangle = \delta_{ij} (a - \delta_{iz} b), \quad (8)$$

$$a > 0, \quad b > 0, \quad 3a - b = 1.$$

(P波の場合にアンダーソンとブリンクマン³⁾によって提案された波動関数 $f(\hat{k}) = \sqrt{\frac{3}{2}} (\hat{k}_x + i \hat{k}_y)$ はこの定義に当てはまり, $a = \frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{5}$ となる。) 座標系 $x' y' z'$ において $\hat{\rho}_s$ は対角形になり, 二つの異なる固有値をもつ。その比が $a : a - b$ で与えられる。このようなクーパー対は, それぞれスピンと軌道の特徴づけるベクトル $\hat{d}$ と $\hat{\ell}$ によって記述されることになる。明らかに

$$\langle |\hat{h} \cdot \vec{A}(k)|^2 \rangle = (\hat{h} \cdot \hat{d})^2 A(T)^2$$

である。また, 座標系 $x' y' z'$ と空間に固定した(つまり, $\vec{H} \parallel \hat{z}$ となるような) 座標系 $x y z$ とをつなぐ回転行列を R とすれば,

$$\begin{aligned} \langle (\hat{v} \cdot \hat{k})^2 | \vec{A}(\hat{k}) |^2 \rangle &= \langle (\hat{v} \cdot \hat{k})^2 | f(\hat{k}) |^2 \rangle A(T)^2 \\ &= \langle (\hat{k}' \cdot R \hat{v})^2 | f(\hat{k}') |^2 \rangle A(T)^2 \\ &= \{ a - b (R \hat{v})_z^2 \} A(T)^2 \end{aligned}$$

ところが定義により $R_{zi} = \hat{\ell}_i$ であるから

$$(R \hat{v})_z = \sum_i R_{zi} \hat{v}_i = \hat{\ell} \cdot \hat{v}$$

$$\therefore \langle (\hat{v} \cdot \hat{k})^2 | \vec{A}(\hat{k}) |^2 \rangle = \{ a - b (\hat{\ell} \cdot \hat{v})^2 \} A(T)^2$$

同様に

$$\langle |\hat{k} \cdot \vec{A}(k)|^2 \rangle = \{ a - b (\hat{d} \cdot \hat{\ell})^2 \} A(T)^2$$

したがって

$$\begin{aligned} F - F_0 &= N(0) A(T)^2 \{ M (\hat{h} \cdot \hat{d})^2 - C b (\hat{\ell} \cdot \hat{v})^2 \\ &\quad - D b (\hat{d} \cdot \hat{\ell})^2 \} \end{aligned} \quad (9)$$

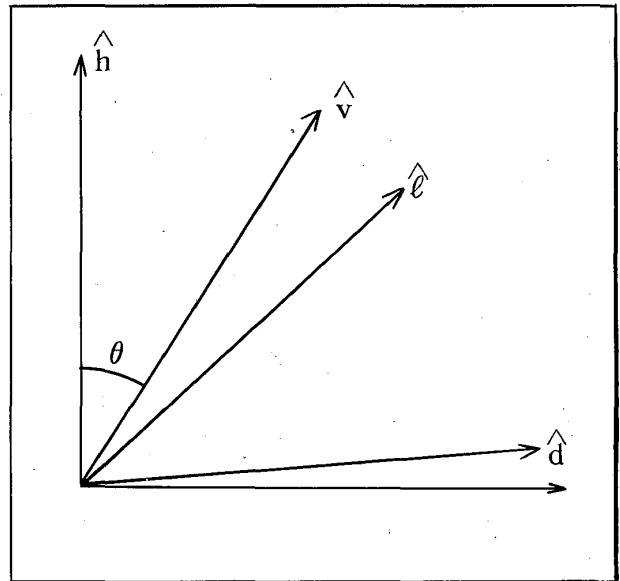
高木 伸

が得られる。 $\hat{h}$ と $\hat{v}$ の間の角度を θ ($0 < \theta < \pi/2$) とおこう。 $\hat{d}$ と $\hat{\ell}$ の、F を最低にする配向は、三つのパラメータ $\xi \equiv C/M$, $\eta \equiv Db/M$, の函数として定まる。 $\hat{d}$ と $\hat{\ell}$ が $\hat{h}$ と $\hat{v}$ を含む平面内にくること、そして四個のベクトル $\hat{h}, \hat{v}, \hat{\ell}, \hat{d}$ の順に並ぶことは明らかであろう (図1)。特に $M=0$ なら $\hat{d} \parallel \hat{\ell} \parallel \hat{v}$, また $C=0$ なら $\hat{h} \perp \hat{d} \parallel \hat{\ell}$ となり、いずれの場合にも DE は最小値をとる。 $M \neq 0$, $C \neq 0$ のときには、F が最低の状態は必ずしも D' を最小にしないことが分かる。

磁気共鳴について調べるために $\mathcal{Q}_{ij}^2$ を計算しよう。特性周波数

$$\mathcal{Q}_0^2 = 12\pi R^2(1+Z_0/4)g_d < |A(k)|^2 >$$

を単位として無次元化すると、



(図1)

$$C_{ij} \equiv \mathcal{Q}_{ij}^2 / \mathcal{Q}_0^2$$

$$\begin{aligned} &= \text{Re} < \hat{k} \times \vec{A}(\hat{k}) >_i (\hat{k} \times \vec{A}(\hat{k})^*)_j \\ &\quad + \frac{1}{2} (\hat{k} \cdot \vec{A}(\hat{k})) (\hat{k}_i A_j(k)^* + \hat{k}_j A_i(k)^*) \\ &\quad - \delta_{ij} | \hat{k} \cdot \vec{A}(\hat{k}) |^2 > / < | \vec{A}(\hat{k}) |^2 > \end{aligned} \quad (10)$$

の形になる。(6), (8) で与えられるクーパー対の場合には、上述の計算と同様にして $\hat{d}$ と $\hat{\ell}$ のみで表現する。

$$\begin{aligned} C_{ij} = b \{ &\delta_{ij} (\hat{d} \cdot \hat{\ell})^2 - \frac{1}{2} (\hat{d} \cdot \hat{\ell}) (\hat{\ell}_i \hat{d}_j + \hat{\ell}_j \hat{d}_i) \\ &- (\hat{\ell} \times \hat{d})_i (\hat{\ell} \times \hat{d})_j \} \end{aligned} \quad (11)$$

以下、三つの極限的な場合について調べよう。($\hat{v}$ を zy 平面内にとる。)

i) $M \gg C, D$ のとき,

$\hat{d} \perp \hat{h}$, すなわち $d \parallel y$, としてよい。

$$C_{xx} = \frac{\eta - \xi \cos 2\theta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta \cos 2\theta}} b,$$

$$C_{zz} = \frac{1}{2} (b + C_{xx}),$$

$$C_{yz} = -\frac{1}{4} \frac{\xi \sin 2\theta}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta \cos 2\theta}} b,$$

他の $C_{ij} = 0$,

ii) $D \gg C, M$ のとき,

$\hat{d} \parallel \hat{\ell}$ としてよい。

$$C_{yy} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\xi \cos 2\theta - 1}{\sqrt{1 + \xi^2 - 2\xi \cos 2\theta}} \right\} b,$$

$$C_{zz} = b - C_{yy},$$

$$C_{yz} = -\frac{1}{2} \frac{\xi \sin 2\theta}{\sqrt{1 + \xi^2 - 2\xi \cos 2\theta}} b,$$

他の $C_{ij} = 0$,

iii) $C \gg M, D$ のとき,

$\hat{\ell} \parallel \hat{v}$ としてよい。

$$C_{xx} = \frac{\eta - \cos 2\theta}{\sqrt{1 + \eta^2 - 2\eta \cos 2\theta}} b$$

$$C_{yy} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\eta - 1}{\sqrt{1 + \eta^2 - 2\eta \cos 2\theta}} \right\} b$$

$$C_{zz} = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{\eta + 1}{\sqrt{1 + \eta^2 - 2\eta \cos 2\theta}} \right\} b$$

$$C_{yz} = -\frac{1}{4} \left\{ 1 + \frac{\eta}{\sqrt{1 + \eta^2 - 2\eta \cos 2\theta}} \right\} b$$

他の $C_{ij} = 0$.

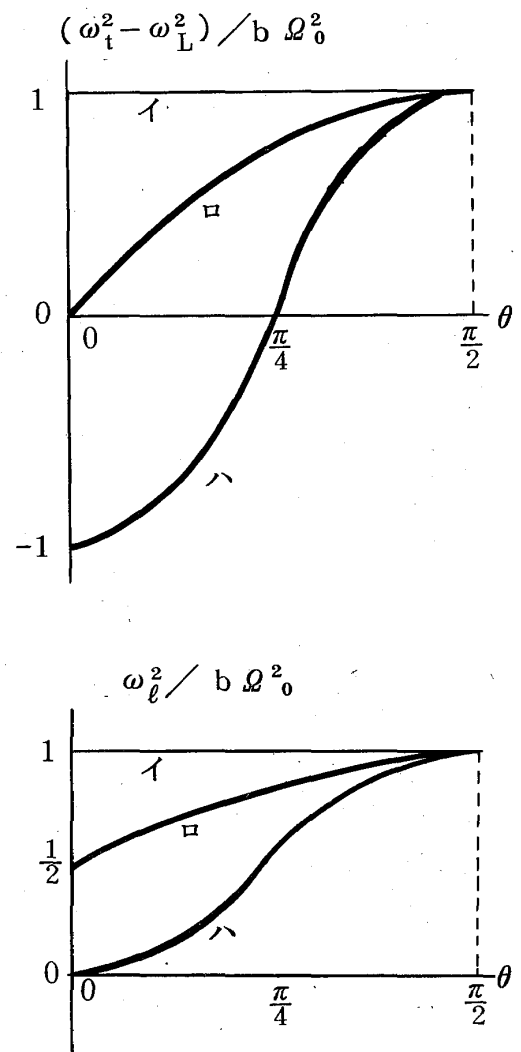
特に i) のとき, $M \gg D$ だから $\omega_L^2 \gg \Omega_{ij}^2$ が成り立ち, (2) が使える。特徴的な場合について図示する (図 2)。つまり, $M, C \gg D$ のとき, $0 < \theta < \pi/4$ で横磁気共鳴線は負の方向にずれる。

液体 ^3He の A 相での核磁気共鳴の実験⁴⁾によると, 流れがないときには,

$$\omega_i^2 - \omega_L^2 = \omega_\ell^2$$

となる。これは図 2 のイと一致するから, A 相ではここで考えた型のクーパー対が出きていると考えられる。 $C = D$ となる流速を見積もると $v \sim 0.1 \text{ cm}/\text{cos}$ となるが, これはグレイターク等⁵⁾の評価した臨界速度 v_c と同程度である。 $v > v_c$ とすることは不可能だから, 実際に A 相で負のずれが観測されるかどうかは疑問である。しかし, 流速が増すにつれて図 2 のイからロへ次第に移行する様は見られるかも知れない。

同様の現象は, 流れに限らず, クーパー対の軌道部分に作用する機構があれば生ずる。たとえば, 系を狭い容器に閉じ込めるときには, 容器の壁がこの役割を担う。上で考えた型のクーパー対の場合には, $\hat{\ell}$ は壁の所で壁に垂直に配向すると期待される。もちろん, 壁から離れた所での $\hat{\ell}$ の空間変化をも考えねばならない。



イ. $D \gg C$, ロ. $D = C$, ハ. $D \ll C$

(図 2)

文 献

- 1) A. J. Leggett, Phys. Rev. Lett. 31 (1973), 352.
- 2) A. J. Leggett, Phys. Rev. Lett. 29 (1972), 1227.
- 3) P. W. Anderson, W. F. Brinkman, Phys. Rev. Lett. 30 (1973), 1108.
- 4) D. D. Osheroff, W. F. Brinkman, preprint.
- 5) T. J. Greytak, R. T. Johnson, D. N. Paulson, J. C. Wheatley, Phys. Rev. Lett. 31 (1973), 452.

液体 H_e^3 に於けるパラマグノンと BCS State

東大物性研 黒 田 義 浩

液体 H_e^3 の極低温に於ける新しい秩序相について、未解決で残されている本質的な問題の一つに、相図を統一的に説明することがある。ここ 2 年足らずの間になされて来た実験的、理論的研究によって、高温相 (A 相) が, Anderson - Brinkman State^① であろうことは、ほぼ確定している。他方、低温相 (B 相) に就いては、結論は未だ流動的である。ここでは、Anderson - Brinkman の仕事を更に発展させて、B 相が、A 相と同じ部分波からなる Balian - Werthamer State^② である可能性があることを指摘したい。

パラマグノンによる有効相互作用は一般的に次で与えられる。

$$\Gamma(P_1, \alpha; P_2, \beta; P_2 + q, \delta; P_1 - q, r) = \sum_{i,j=0}^3 \Gamma_{ij}(q) \cdot \sigma_{\alpha\beta}^{(i)} \cdot \sigma_{\beta\delta}^{(j)},$$

$$\Gamma_{ij} = -\frac{1}{2} I \cdot \delta_{ij} + I \cdot \chi_{ik}^{(0)}(q) \cdot \Gamma_{kj}(q),$$

ここで、 I は、 H_e^3 原子間相互作用の S-wave 部分で、接触型を仮定した。又、 $\sigma^{(0)} \equiv i \mathbb{I}$ ($\mathbb{I}$: unitmatrix), $\sigma^{(1)}$, $\sigma^{(2)}$, $\sigma^{(3)}$ は夫々, Pauli's spin matrices である。 $\chi_{ik}^{(0)}(q)$ は, bare spin susceptibility で