

強磁性不規則スピン系のスピン波Ⅱ^{*}

物性研^{**} 川村 清

(5月6日受理)

§ 1. Introduction

次のような Hamiltonian で記述される boson の系を考える。

$$H = \sum_{\{i\}} W_i b_i^+ b_i + \sum_{\{i \neq j\}} V_{ij} b_i^+ b_j \quad (1)$$

ここで, i, j , 等の suffix は不純物として入っているスピンの番号で, $\sum_{\{i\}}$ は, 不純物 site についての和を意味する。 b, b^+ を “localized magnon” の operator と呼ぶ。また, W, V の間には

$$W_i = \sum_{\{l\}} U_{il}, \quad U_{il} = -V_{il} \quad (2)$$

の関係がある。

筆者は前の論文¹⁾ (今後 Ref. 1 を (I) と略記する) で, この system の Green 関数が Yonezawa — Matsubara²⁾ の graphical method を拡張して記述出来ることを示したが, (2) によって対角要素と非対角要素が独立³⁾でないことから, Matsubara — Kaneyoshi³⁾ のようにスマートには拡張出来ない。

一方, Spin 系には “rotational symmetry” がある。すなわち, 強磁性 Spin 系の基底状態はその磁発磁化の方向に関して縮退していなくてはならない。その事情は, われわれの不純物スピン系でも成立するから, graph を近似的にあつめる時は, 常にこの要請を満すように集めなくてはならない。本稿では, rotational symmetry を考慮しながら, 簡単な graph をあつめ, Green 関数の一般的な形を suggest したい。

* この仕事の一部は, 筆者がアトム型研究員として基研滞在中に行われた。

** 現在, 東大理

川村 清

§ 2. Magnon Green 関数が満足すべき条件

次式で Magnon Green 関数を定義しよう。

$$G_{ij}(z) = \langle 0 | b_i (z-H)^{-1} b_j^+ | 0 \rangle \quad (3)$$

この Fourier 変換

$$G_{pp'}(z) = (1/N) \sum_{\{i,j\}} G_{ij}(z) \exp[i(\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}_i - \mathbf{p}' \cdot \mathbf{R}_j)]$$

は、不純物の位置について平均すると、

$$\overline{G_{pp'}(z)} = G_p(z) \delta_{pp'} \quad (5)$$

という形をしている。

(1) で与えられた Hamiltonian のもとでは、すぐ判るように

$$[\sum_i b_i, H] = 0 \quad (6)$$

が成り立つから (3), (4) から

$$\begin{aligned} G_{p=0, p'}(z) &= (1/N) (1/z) \sum_{\{i,j\}} \langle 0 | b_i b_j^+ | 0 \rangle \exp[-i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{R}_j] \\ &= (1/N) (1/z) \sum_{\{i\}} \exp[-i\mathbf{p}' \cdot \mathbf{R}_j] \end{aligned}$$

あるいは (5) から

$$G_{p=0}(z) = c/z \quad (7)$$

すなわち、 $\mathbf{p}=0$ で $z=0$ に pole を持つ、(6) は (従ってその結果の (7) は) スピン系の rotational symmetry をあらわす。近似計算をする時、(7) が成り立つように計算を進めないと、計算をまちがえてしまう。

§ 3. 余計な factor

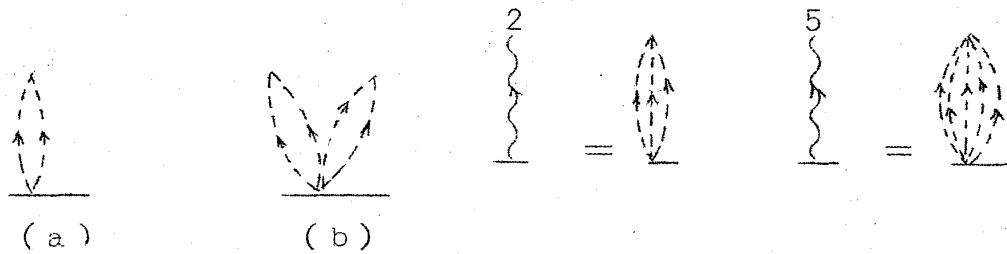
第 1 図 a の graph の点線及びその先端の点からの寄与は、

$$c \sum_R (U(R)/z)^2$$

であるが、第1図 bは、(I) で示したように

$$3c^2 [\Sigma_R (U(R)/z)^2]^2$$

であって、決して第1図 aの自乗ではない。(点線の根の点からの寄与をとり入れるためには、更に c をかけなくてはならない) 上の factor・3 のよ



第 1 図

第 2 図

うなものを今後“余計な factor”と呼ぼう。この節では、実線上の点から出ている点線の集まりからなる graph の与える“余計な factor”を計算しよう。

今後、一つの点から出る l 本の点線が一つの点に入る束を破線の先に“ l ”と書いて示す。(第2図) l 本の点線が $l_1, l_2, \dots, l_j$ 本ずつ束になっている graph は、

$$\Sigma_{k_1 k_2 \dots k_l} \langle \eta_1 \eta_2 \dots \eta_l \rangle \prod_{n=1}^l U(R_{k_n})/z$$

において、 η の moment を cumulant の積和で書いた時

$$\langle \eta^{l_1} \rangle_c \langle \eta^{l_2} \rangle_c \dots \langle \eta^{l_j} \rangle_c \quad (l = l_1 + \dots + l_j)$$

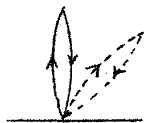
が現われる項を表わす。 l 個の η を上のように組みわけする仕方が“余計な factor”をあたえる。

したがって、 l_1 本の束が α_1 , l_2 本の束が α_2 , $\dots$, l_p 本の束が α_p あり、($l_1, l_2, \dots, l_p \geq 1$) 1本ずつの点線が α_0 本ある graph の余計な factor は

$$E(\{\alpha_j\}, \{l_j\})$$

$$= (\ell!/\alpha_0!) \prod_{j=1}^{\rho} (\alpha_j!)^{-1} (\ell_j!)^{-\alpha_j} \quad (8)$$

で与えられる。以上の議論は、点線の束が出て来る点で実線がまじわっていない時にのみ成り立つ。(I) で示したように第3図の点線の束の寄与は1ではない。

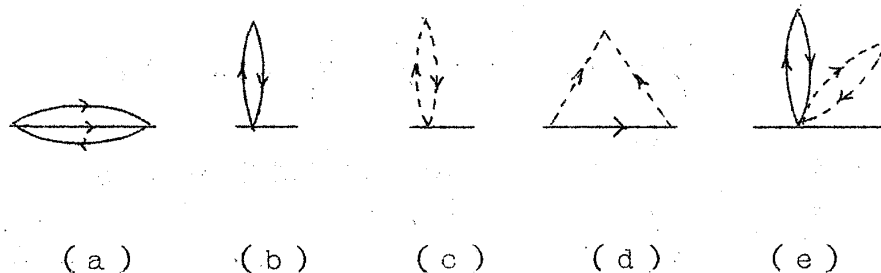


$$= 3 [P_2(c)]^2 P_1(c) \Sigma_{RR'} (U(R)/z)^2 (V(R')/z)^2$$

第 3 図

§ 4. graph の部分 and (I)

不純物伝導の理論にならって^{2~4)} graph の self-energy part をつぎのように定義する: graph の中で一本の点線を切っただけでは graph が二つに分かれない部分を self-energy part と呼ぶ。その例を第4図に示す。第4図の5つの graph のうち、(a), (b) は不純物散乱の問題でも見られる形であるが、(c), (d), (e) は、点線のあらわれるわれわれの問題に特有なものである。



第 4 図

以下で、 i -site をあらわす実線上の点からはじまり、 j -site をあらわす点でおわる self-energy part の寄与を $\alpha_{ij}(z)$ とあらわそう。そうすると

$$\begin{aligned} z \overline{G_{ij}}(z) &= \alpha_{ij}(z) + \sum_{k, \ell} \alpha_{ik}(z) (V_k \ell / z) \alpha_{\ell j}(z) \\ &+ \sum_{k, \ell, m, n} \alpha_{ik}(z) (V_k \ell / z) \alpha_{\ell m}(z) (V_m \ell_n / z) \alpha_{nj}(z) \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (9)$$

ここで $\sum_k$ と書いたものは、結晶中のあらゆる site についての和である。ここで次のような Fourier 変換を定義する。

$$\begin{cases} V_{ij} = (1/N) \sum_p V_p \exp [i \mathbf{p} \cdot (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)] \\ \alpha_{ij}(z) = (1/N) \sum_p \alpha_p(z) \exp [i \mathbf{p} \cdot (\mathbf{R}_i - \mathbf{R}_j)] \end{cases} \quad (10)$$

(9), (10) から

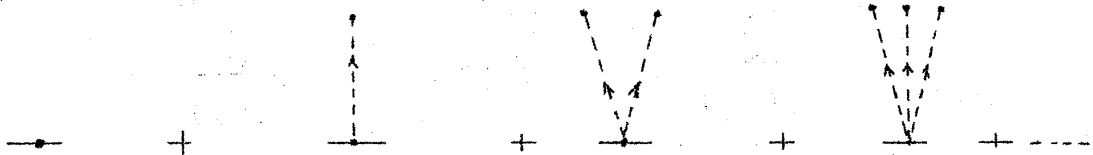
$$z G_p(z) = \alpha_p(z) / [1 - \alpha_p(z) (V_p / z)] \quad (11)$$

が出るが、これは不純物伝導と同じである。

例として第5図のような graph で $\alpha_p(z)$ を近似するとあきらかに

$$\begin{aligned} \alpha_p^{(0)} &= c (1 - c \int d\mathbf{R} (U(\mathbf{R}) / z))^{-1} \\ &= c (1 + c V_0 / z)^{-1} = \text{independent of } \mathbf{p} \end{aligned} \quad (12)$$

ここで (2) 及び (10) を使った。



第 5 図

(12) を (11) に代入すると

$$G_p(z) = c / [z + c(V_0 - V_p)] \quad (13)$$

これは $\mathbf{p} = 0$ で

$$G_0(z) = c / z$$

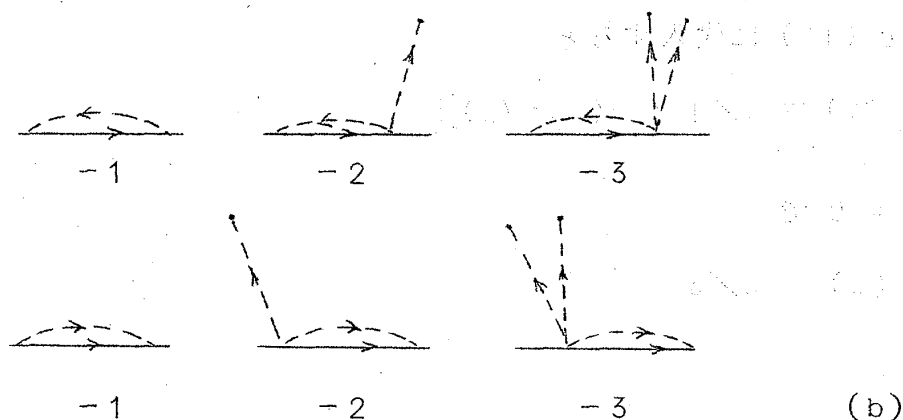
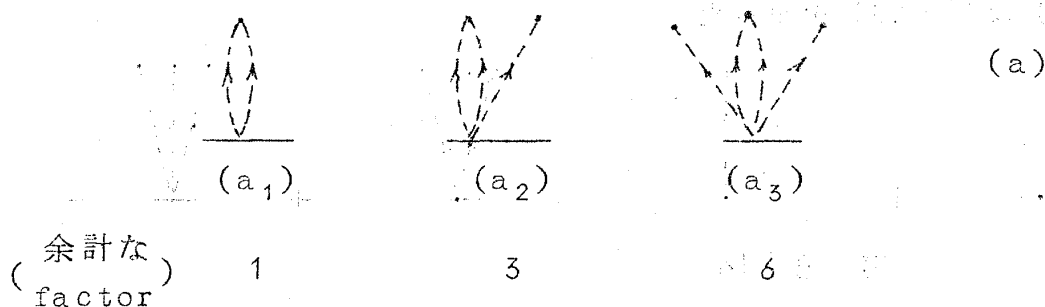
川村 清

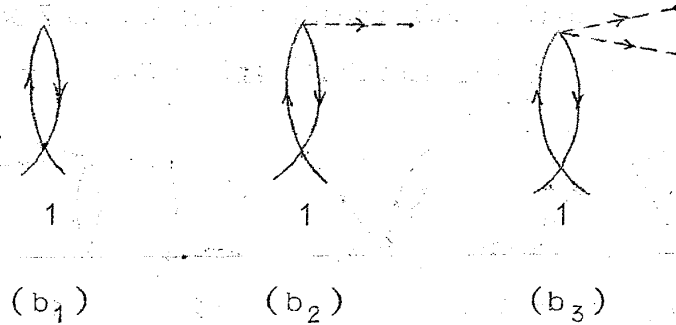
となり rotational symmetry の要請は満足する。ところが (13) は, short range interaction の場合にまずいことがある。よく知られているように ⁵⁾ short range interaction の場合, 不純物スピンがある濃度よりうすくなると強磁性状態が基底状態ではなくなる。したがって, c が小さい時に, magnon の励起に対して不安定になるべきである。ところが (13) は, ($V_p > V_0$ 故) あらゆる濃度で magnon の spectrum は正で, 強磁性状態が安定であることを示している。

このような事情をとり除くためには, 濃度の高次の項を考えなくてはならない。そのために, まず第6図 a の3つの次数のことなる graph を考えよう。 a_1 の寄与は

$$\begin{aligned} & c P_2(c) \int d\mathbf{R} (U(\mathbf{R})/z)^2 \\ &= n c P_2(c) (U/z)^2 \end{aligned} \quad (14a)$$

である。この式及び以下では nearest neighbour interaction を仮定し, coordination number を n とする。実線または点線が2本で $c P_2(c)$ に比例する graph は, あと (b_1) に並べた3つの graph がある。





第 6 図

(t_1) の上の 2 つはそれぞれ

$$\begin{aligned} & c P_2(c) \int dR (U(R)/z) (V(R)/z) \exp [i \mathbf{p} \cdot \mathbf{R}] \\ & = -n c P_2(c) (U/z)^2 (V_p/V_0) \end{aligned} \quad (14b)$$

ここで

$$V_0 = n V = \int dR V(R) = -n U \quad (15)$$

を使った。(b₁) の一番下は、

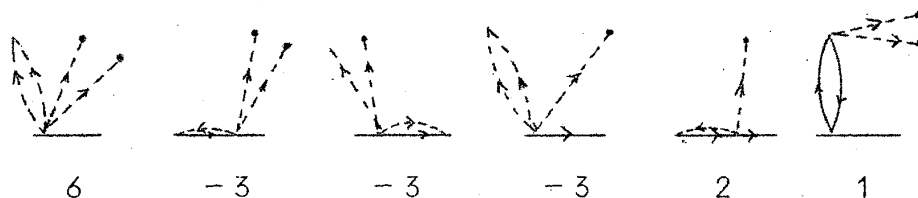
$$c P_2(c) \int dR (V(R)/z)^2 = n c P_2(c) (U/z)^2 \quad (14c)$$

(14a) から (14c) までを比較すると、 $\mathbf{p} = 0$ ですべてが $n c P_2(c) (U/z)^2$ に比例し、異なるのは“余計な factor”だけである。(“余計な factor”には、 $V = -U$ から来る (-1) を含めてある。) 余計な factor の和が消えるということは、(a_1), (b_1) の 4 つの graph の和が $\mathbf{p} = 0$ で消えることを意味する。同様に、(a_2), (b_2) の graph の和は消えることは、“余計な factor”を見れば判る。

ところが (a_3), (b_3) の“余計な factor”の和は消えない。このことは、次節に見るように、以上で採用した self-energy part の定義が悪かったことを示唆する。換言すれば、graph の部分和のとり方を換えなくてはならない。

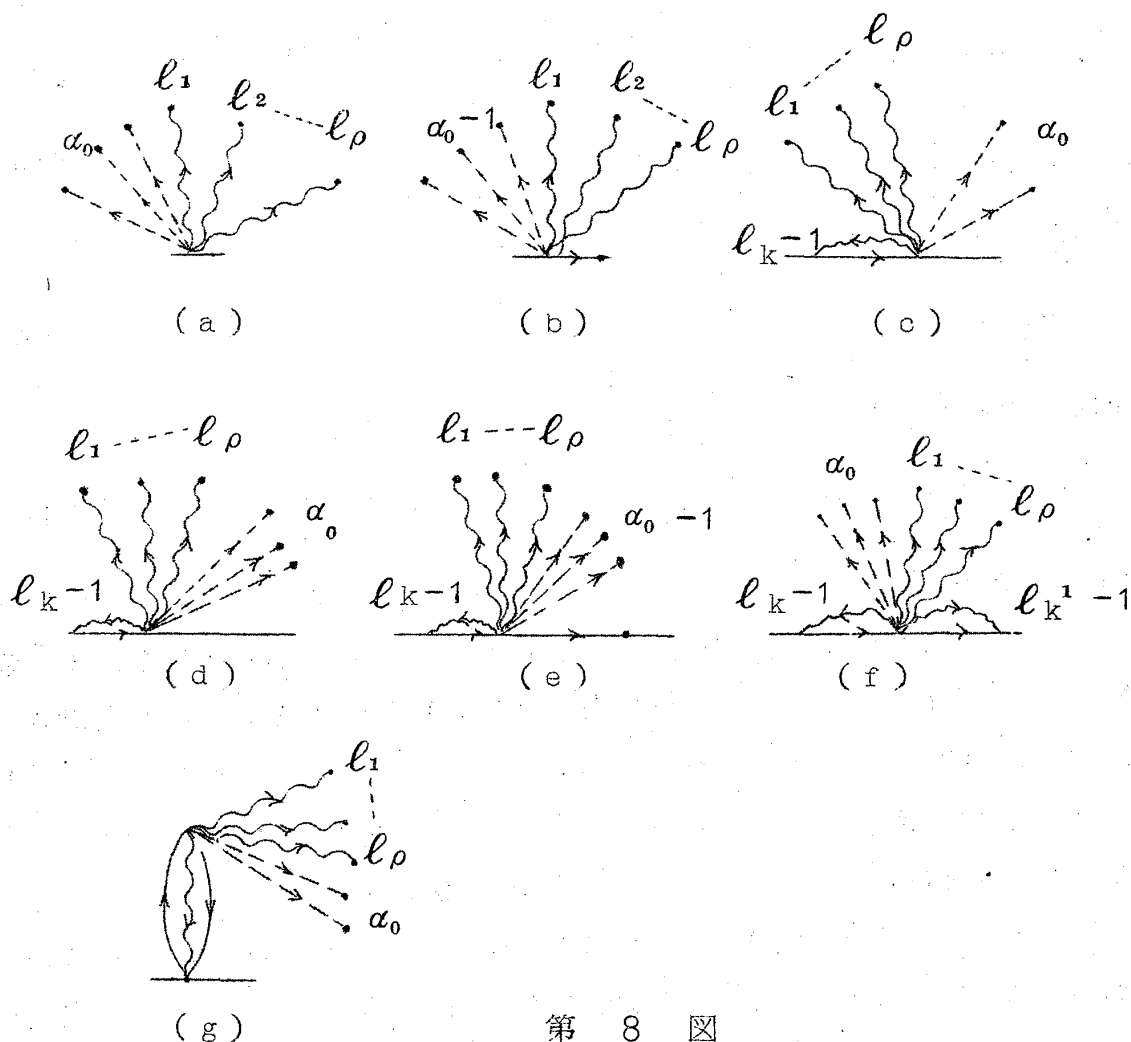
§ 5. graph の部分和 (II)

第6図 (a₃), (b₃) の他に2つの graph を加えて, 第7図の6つの graph を考えてみると, “余計な factor” は消える。



第 7 図

より一般に, 第8図の7つの graph の寄与を考えてみよう。



第 8 図

(第8図の7つの graph のうち, (b) と (e) は, 前の定義には入っていない)

いことに注意しよう。) (a) の graph の寄与は, ($\ell = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\rho} \alpha_k$

$$\ell_k, \alpha = \sum_{k=0}^{\rho} \alpha_k)$$

$$\begin{aligned} & [P_1(c)]^{\alpha_0} [P_{\ell_1}(c)]^{\alpha_1} \dots [P_{\ell_{\rho}}(c)]^{\alpha_{\rho}} \\ & \times n^{\alpha}(U/Z)^{\ell} (\ell!/\alpha_0!) \prod_{k=1}^{\rho} (\alpha_k!)^{-1} (\ell_k!)^{-\alpha_k} \end{aligned}$$

$$\equiv G(\{\alpha_i\}, \{\ell_i\}) \quad (16a)$$

ここで $\{\alpha_i\}, \{\ell_i\}$ は graph で与えられた $\alpha_0 \dots \alpha_{\rho}, \ell_1 \dots \ell_{\rho}$ の set を与える。つぎに第8図(b)の余計な factor は (a) で α_0 を $(\alpha_0 - 1)$ に, ℓ を $(\ell_0 - 1)$ でおきかえたものである。また, 一つの nU を $-nU$ (V_p/V_0) でおきかえる。そこで

$$\text{第8図 } b = -(\alpha_0/\ell)(V_p/V_0) G(\{\alpha_i\}, \{\ell_i\}) \quad (16b)$$

第8図cは, aと比較して, 実線が一本入っているから factor $-(V_p/V_0)$ がかり, また, 余計な factor は

$$\begin{aligned} & \binom{\ell-1}{\ell_k-1} \frac{(\ell-\ell_k)!}{\alpha_0!} \frac{1}{\alpha_1! \dots (\alpha_k-1)! \dots \alpha_{\rho}!} \\ & \times \frac{1}{\{\ell_1!\}^{\alpha_1} \dots \{\ell_k!\}^{\alpha_k-1} \dots \{\ell_{\rho}!\}^{\alpha_{\rho}}} \\ & = (\alpha_k \ell_k / \ell) (\ell!/\alpha_0!) \prod_{j=1}^{\rho} (\alpha_j!)^{-1} (\ell_j!)^{\alpha_j} \end{aligned}$$

そこで,

$$\text{第8図 } c = - \sum_{k=1}^{\rho} (\ell_k \alpha_k / \ell) (V_p/V_0) G(\{\alpha_i\}, \{\ell_i\}) \quad (16c)$$

$$= \text{第8図 } d \quad (16d)$$

同様にして以下

$$\begin{aligned} \text{第8図 de} &= (\alpha_0 / \ell(\ell-1)) (V_p / V_0)^2 \sum_{k=1}^{\rho} (\ell_k \alpha_k) \\ &\quad \times G(\{\alpha_i\}, \{\ell_i\}) \quad (16e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{第8図 f} &= (V_p / V_0)^2 \{ \sum_{k \neq k'} (\alpha_k \ell_k) (\alpha_{k'} \ell_{k'}) \\ &\quad + \sum_k \alpha_k (\alpha_k - 1) \ell_k^2 \} / \ell(\ell-1) G(\{\alpha_i\}, \{\ell_i\}) \\ &= (V_p / V_0)^2 \{ (\sum_k \alpha_k \ell_k)^2 - (\sum_k \alpha_k \ell_k^2) \} / \ell(\ell-1) \\ &\quad \times G(\{\alpha_i\}, \{\ell_i\}) \quad (16f) \end{aligned}$$

$$\text{第8図 g} = (\sum_k \alpha_k \ell_k (\ell_k - 1) / \ell(\ell-1)) G(\{\alpha_i\}, \{\ell_i\}) \quad (16g)$$

そこで第8図の graph の和は,

$$\begin{aligned} &\{ (1 - V_p / V_0)^2 + (V_p / V_0) (1 - V_p / V_0) (\alpha_0 / \ell) \\ &\quad + (1 - (V_p / V_0)^2) (\sum_k \alpha_k \ell_k (\ell_k - 1) / \ell(\ell-1)) \} G(\{\alpha_i\}, \{\ell_i\}) \quad (17) \end{aligned}$$

となり, たしかに $p=0$ で消える。

第8図 (b), (e) が self-energy part にないことから, graph の partial sum の仕方を変更する必要がある。

例として G の graph 中の点線が第5図のような形でのみあらわれる場合を考えよう。そして, まず実線上の各点から必ず点線が出ているものばかりをあつめよう。そうすると,

$$\begin{aligned} z G_p(z) &= \{ c^2 (-V_0 / z) (1 + c V_0 / z)^{-1} \} \\ &\quad \times \{ 1 + c^2 (V_p / z) (-V_0 / z) (1 + c V_0 / z)^{-1} \}^{-1} \quad (18) \end{aligned}$$

そこでつぎに, 途中で実線上の点から点線が出ていないようなものを取り入れよう。それは, 第8図 b の graph を a から得たように (18) で,

$$(-V_0 / z) (1 + c V_0 / z)^{-1} \rightarrow (-V_0 / z) (1 + c V_0 / z)^{-1} (1 - V_p / V_0)$$

とおきかえて、まず一部が入る。更に graph の一番左に実線を入れるために $(1+cV_p/z)$ を分子にかける。それに一つの点だけからなる graph の寄与 (c) を加えて、

$$\begin{aligned} z G_p(z) &= c - \frac{c^2(V_0/z)(1-V_p/V_0)(1+cV_p/z)(1+cV_0/z)^{-1}}{1+c^2(V_0/z)(1-V_p/V_0)(1+cV_0/z)^{-1}} \\ &= c(1+c(V_0-V_p)/z)^{-1} = (13) \end{aligned}$$

上の手続きで $-c^2(V_0/z)(1+cV_0/z)^{-1}$ は第8図の a, c, d, f, g の寄与 ($\ell \neq 0$) に相当し、また $(1-V_p/V_0)$ をかけたものは、更に b, e の寄与を加えたものに相当する。そこで、 $\ell \neq 0$ における第8図の全ての graph の和を $\alpha_p^{(1)}(z)$ とおくと、一般に

$$\begin{aligned} z G_p(z) &= c + \frac{(1+cV_p/z) \alpha_p^{(1)}(z)}{1-(V_p/z) \alpha_p^{(1)}(z)} \\ &= \frac{c + \alpha_p^{(1)}(z)}{1-(V_p/z) \alpha_p^{(1)}(z)} \quad (19) \end{aligned}$$

(17) を使うと、たしかに

$$G_{p=0}(z) = c/z \quad (20)$$

になっている。

§ 6. 結 論

以上われわれは、強磁性不純物スピン系が rotational symmetry を満足すべきであるということから、graph の部分和は、不純物伝導における self-energy part によってなされるべきではなく、第8図 b, e のような graph をあらかじめとり込んで $\alpha_p^{(1)}$ を定義し、それによって (19)

川村 清

のような形で書くべきことを示した。(19)が具体的に何をあたえるかは、実際に $\alpha_p^{(1)}(z)$ がどのような μ -依存性及び z -依存性をもつかを計算してみなくてはならない。また critical concentration があるかどうかはまだわからない。 $\alpha_p^{(1)}(z)$ については現在計算中である。

また、以上の考察を RKKY 相互作用⁶⁾に拡張することも興味深いものがあるだろう。

謝 辞

この問題について中嶋教授が私に興味を向けさせて下さったことにまず感謝しなくてはならない。更に、(I)と同様、この仕事は筆者がアトム型研究員として基研に滞在中に行われたものが元になっている。基研滞在中、松原先生、松田先生、武野先生および米沢さんには、不規則系について、色々と教えて頂いた。それらの“耳学問”なしには、現在進行中のこの仕事について、何ら物理的な見通しがつかなかったと思う。また、2ヶ月間も物性研を留守にするに当って、中嶋教授、鈴木助教授、田中氏、黒田氏にいろいろ御迷惑をおかけしたことを、深くおわびしなくてはならない。

文 献

- 1) 川村 清 : 物性研究 (前号)
- 2) F. Yonezawa and T. Matsubara : Prog. Theor. Phys. 35 (1966), 357
- 3) T. Matsubara and Kaneyoshi : Prog. Theor. Phys. 36 (1966), 695
- 4) T. Matsubara and Y. Toyozawa : Prog. Theor. Phys. 26 (1961), 739
- 5) 例えば, R. Abe : Prog. Theor. Phys. 31 (1964), 412