

$k[x]$ の k -form と additive group

富山大教育 浅沼照雄 (Teruo Asanuma)

k を体とするとき $k^{[n]}$ で n 変数多項式環を表わす。

k -代数 A が $k^{[n]}$ の k -form であるとは有限次代数拡大 K/k が存在して $K \otimes A \cong K^{[n]}$ なることである。 K/k が separable (resp. purely inseparable) にとれるとき separable (resp. purely inseparable) k -form という。 $n=1, 2$ のとき $k^{[n]}$ の sep. k -form は trivial すなわち $A \cong k^{[n]}$ ($n=1, 2$) である。 $n>2$ のときは不明。

さて k の標数を $p>0$ として K を含む normal field を K_1 とすると k と K_1 の中間体 K_2 が存在して K_1/K_2 : sep. ex. K_2/k : purely insep. ex. とできる。

$$K_1 \otimes_{K_2} K_2 \otimes_k A = K_1 \otimes_K K \otimes_k A \cong K_1^{[n]}$$

であるから $K_2 \otimes_k A$ は sep. K_2 -form である。そこでとくに $n=1, 2$ のときは nontrivial k -form A はすべて purely insep. となる。このノートでは purely insep. k -form A の structure を調べたい。とくに $n=1$ のときすなわち $k[x] := k^{[1]}$ の k -form について述べる。

以下 k を標数 $p > 0$ の体, $k^{[n]} = k[x_1, \dots, x_n]$ とする。 $f_1, \dots, f_n \in k^{[n]}$ の Jacobian $\det(\partial f_i / \partial x_j)$ を $J(f_1, \dots, f_n)$ で表わす。

1. 定理. $J(f_1, \dots, f_n) \neq 0$ ならば任意の整数 $e \geq 0$ について

$$k[x_1^{p^e}, \dots, x_n^{p^e}, f_1, \dots, f_n, J(f_1, \dots, f_n)^{-p^e}] \ni x_i$$

for all $i = 1, \dots, n$.

証明のオウトライン. $k[x_1^{p^e}, \dots, x_n^{p^e}] = R$ とおく。すると $k^{[n]}$ は free R -module. k を代数的閉体と仮定できる。いま $a = (a_1, \dots, a_n) \in k^n$ を $D(J(f_1, \dots, f_n)) = k^n - V(J(f_1, \dots, f_n))$ とする。すなわち a は $J(f_1, \dots, f_n)$ の零点ではないとする。

$$y_i = x_i - a_i \text{ とおく。 } f_i(x_1, \dots, x_n) = f_i(y_1 + a_1, \dots, y_n + a_n)$$

の $y_1, \dots, y_n$ についての 1 -次 homogeneous form を

$$c_{i1}y_1 + \dots + c_{in}y_n \quad (c_{ij} \in k) \text{ とすると } f_i(y_1 + a_1, \dots, y_n + a_n)$$

をテーラー展開することにより matrix (c_{ij}) は Jacobian

matrix $(\partial f_i / \partial x_j)$ に $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$ を代入したものに

等しい。 $a \in D(J(f_1, \dots, f_n))$ であるから $(c_{ij}) = (\partial f_i / \partial x_j)$

は invertible. ゆえ

$$k[y_1, \dots, y_n] / (y_1^{p^e}, \dots, y_n^{p^e}) = k[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n]$$

とおくと $\bar{R}[\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_n] = k[\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n]$ になりたつ。ここで

$\bar{}$ は residual class modulo $(y_1^{p^e}, \dots, y_n^{p^e})$ を表わす。ゆえに

$$R[f_1, \dots, f_n] + (y_1^{pe}, \dots, y_n^{pe}) = k[y_1, \dots, y_n].$$

いま m_a を $y_1^{pe}, \dots, y_n^{pe}$ で生成された R の max. ideal とすると中山の補題より $Rm_a[f_1, \dots, f_n] = Rm_a[y_1, \dots, y_n]$. ゆえ

$$\bigcap_{a \in D} Rm_a[f_1, \dots, f_n] = \bigcap_{a \in D} Rm_a[y_1, \dots, y_n]$$

ここで $D = D(J(f_1, \dots, f_n))$. また

$$\bigcap_{a \in D} Rm_a = R[J(f_1, \dots, f_n)^{-pe}]$$

であるから

$$R[f_1, \dots, f_n, J(f_1, \dots, f_n)^{-pe}] = k[x_1, \dots, x_n, J(f_1, \dots, f_n)^{-pe}]$$

である。 q. e. d.

$$g_1, \dots, g_m \in k^{[n]} \text{ とする。 } \{J(g_{\lambda_1}, \dots, g_{\lambda_n}) \mid 1 \leq \lambda_i \leq m\}$$

で生成された $k^{[n]}$ の ideal を $g_1, \dots, g_m$ についての Jacobian ideal といひ $I(g_1, \dots, g_m)$ で表わす。

$$2. \text{系. } k[x_1^{pe}, \dots, x_n^{pe}, g_1, \dots, g_m] = k[x_1, \dots, x_n]$$

なるための必要十分条件は $I(g_1, \dots, g_m) = (1)$.

k -代数 B を次のようにおく。

$$B = k[x_1^{pe}, \dots, x_n^{pe}, f_1, \dots, f_n, J(f_1, \dots, f_n)^{-pe}] \cap k^{p^{-e}}[x_1, \dots, x_n]$$

B は明らかに $k[x_1^{pe}, \dots, x_n^{pe}]$ -代数である。この B が property

P をみたすとは $g_1, \dots, g_m \in B$ が存在して $k^{p^{-e}}[x_1, \dots, x_n]$ に

おける $g_1, \dots, g_m$ の Jacobian ideal が unit ideal なることをいう。

A が $k^{[n]}$ の purely insep k -form であるときある e について $k^{p^e} \otimes A \cong k^{p^e}[x_1, \dots, x_n]$ がなりたつ。このような e の最小のものを A の height とい $ht A = e$ で表わす。

以下 A は $ht A = e$ なる $k^{[n]}$ の purely insep. k -form を表わすことにする。

3. 定理. B が $ht B \leq e$ なる purely insep k -form なるための必要十分条件は property P をみたすことである。また A はつねに property P をみたす B に同型である。ゆえとくに $A \cong k[x_1^{p^e}, \dots, x_n^{p^e}, g_1, \dots, g_m]$ ここで g_i は上で定義したもの。

定理 3 より A の structure は $g_1, \dots, g_m$ によってきまる。 $n > 1$ のときこのような g_i を一般的に与えるのは非常に困難である。

4. 系. $g_1, \dots, g_n \in k^{p^e}[x_1, \dots, x_n]$ で

$J(g_1, \dots, g_n) \in k^{p^e} \setminus (0)$ とする。すると

$$A = k[x_1^{p^e}, \dots, x_n^{p^e}, g_1, \dots, g_n]$$

は $ht A \leq e$ なる purely insep. k -form でありその differential A -module $\Omega_k(A)$ は free である。

問題. 系 4 の逆がなりたつか? すなわち $\Omega_k(A)$ が free なる $ht A = e$ の k -form A は上の $k[x_1^{p^e}, \dots, x_n^{p^e}, g_1, \dots, g_n]$ に同型になるか?

この問題について $n=1$ の場合はのちにみるようになりたつ。また $n=2$, $p=2$, $\deg A=1$ の3条件を同時にみたす A についてはなりたつ。これ以外は不明。

さて $n=1$ のときすなわち $k[x] := k^{[1]}$ の purely insep k -form A の structure を考えてみる。このときは $f \in k[x]$ について $J(f) = \partial f / \partial x = f'$, つまり $J(f)$ は x による微分であるから定理3より

$$A = k[x^{p^e}, f, (f')^{-p^e}] \cap k^{p^{-e}}[x]$$

としおいてこの A が property P をみたすとしてよい。つまり $A \ni g_1, \dots, g_m$ が存在して $I(g_1, \dots, g_m) = (1) = k^{p^{-e}}[x]$,

明らかに $I(g_1, \dots, g_m)$ は $g'_1, \dots, g'_m$ で生成された ideal であるから $\text{g.c.d.}(g'_1, \dots, g'_m) = 1$ となる。再び定理3より

$A = k[x^{p^e}, g_1, \dots, g_m]$ と表わせるがとくに $m=2$ とできる。

つまり A は algebraic space curve の座標環である。まとめて

5.系. $k[x]$ の k -form は $k[x^{p^e}, g_1, g_2]$ と表わされる。ここに g_1, g_2 は $k[x^{p^e}, f, (f')^{-p^e}] \cap k^{p^{-e}}[x]$ の元で互いに素なるものである。逆にこのような環 $k[x^{p^e}, g_1, g_2]$ は k -form である。

この系5によって A の structure は g_1, g_2 による。まず $g_2 = 0$ のときを考察する。このときは $g'_1 \in k^{p^{-e}} \setminus (0)$ ゆえ

$g_1 = a_0 + c x + a_1 x^p + \dots + a_n x^{n^p}$ ($a_i \in k^{p^e}$, $c \in k^{p^e} \setminus (0)$)
と表わされる。 $c x$ をあたりに x とおくことによつてはじめて
かゝる $c = 1$ としてよい。つまり

$$A = k[x^{p^e}, a_0 + x + a_1 x^p + \dots + a_n x^{n^p}] \quad (a_i \in k^{p^e})$$

となる。このような form を p -polynomial type といい。

6. 系. $k[x]$ の k -form によつてその differential
module が free ならば p -polynomial type である。

7. 系. $k[x]$ の k -form が U.F.D ならば p -polynomial
type である。

8. 系. (Kamabayashi-Miyajishi-Takeuchi) $k[x]$ の
 k -form が U.F.D かつ rational prime ideal $\mathfrak{p}$ (i.e. $A/\mathfrak{p} = k$)
なる k -form A の prime ideal $\mathfrak{p}$ が存在すれば trivial である。

A に代数群の structure が入っているとす。つまり A
はホップ代数とすると $\Omega_k(A)$ は free、ゆゑ系 6 より
 p -polynomial type である。このことから

9. 系. (Russell) A がホップ代数の structure をもて
ば $A \cong k[x^{p^e}, x + a_1 x^p + \dots + a_n x^{n^p}]$ ($a_i \in k^{p^e}$) .

次に $\Omega_k(A)$ がかならずしも free でない場合を考える。
まず A の quotient field $Q(A)$ が rational field のときは

10. 系. $Q(A) \cong k(x)$ とすると

$$A \cong k[x^{pe}, x^{pe-1}(1+ax), x(1+ax)^{pe-1}] \quad (a \in k^{p-e})$$

さらに $\Omega_k(A)$ が free か $A \neq k[x]$ とすると $p=2$ で

$$A \cong k[x^2, x+ax^2] \quad (a \in k^{\frac{1}{2}} \setminus k)$$

系 10 において $x^{pe}, x^{pe-1}(1+ax), x(1+ax)^{pe-1}$ を
パラメータとする space curve はのちに述べるように set
theoretic complete intersection である。しかし $p=2$ か $e=1$
以外のときは一般的に ideal theoretic complete intersection
とはならない。

$Q(A)$ がかならずしも rational field でないときを考え
る。 $e \geq 2$ のときはきわめて複雑になるので $e=1$ のときのみ
を以下であつかう。ゆえこれからは $\dim A \leq 1$ とする。ゆえ
 $A = k[x^p, f, (f')^{-p}] \cap k^{p-1}[x] = k[x^p, g_1, \dots, g_m] = k[x^p, g_1, g_2]$
で g_1, g_2 は互いに素となっている。 g_1, g_2 を f から求めてみ
よう。

$f' = g_1^{\lambda_1} \dots g_n^{\lambda_n}$ を $k^{p-1}[x]$ での既約分解とする。

任意の $G \in k^{p-1}[x]$ が $G \in A$ なるための必要十分条件は

$$G g_1^{v_1 p} \dots g_n^{v_n p} = \alpha_0 + \alpha_1 f + \dots + \alpha_{p-1} f^{p-1} \quad (\alpha_i \in k[x^p]) \quad (*)$$

と表わせることである。もし $g_i^p \mid \alpha_j$ ($j=1, \dots, p-1$) ならば
 $\alpha_j / g_i^p \in k[x^p]$ であるから最初から g_i^p は $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ の公約元

でないとは仮定してよい。 $\bar{k}$ を k の代数閉包として $a_i \in \bar{k}$ を $\mathcal{O}_i$ の 1 つの根とする。そこで

$$t_i = [k(a_i^p) : k(a_i^p, f(a_i))]$$

とおくと $f(a_i) \in k^{p^{-1}}(a_i)$ より $f(a_i)^p \in k(a_i)$ ゆえ $t_i \leq p$.

そこで $t_i = p$ とする。すると $v_i = 0$ 。なぜならば $v_i > 0$ とすると (*) の両辺に a_i を代入して

$$0 = \alpha_0(a_i) + \alpha_1(a_i)f(a_i) + \cdots + \alpha_{p-1}(a_i)f(a_i)^{p-1}$$

ゆえ $\alpha_j(a_i) = 0$ ($j=1, \dots, p-1$) となるがこれは $\mathcal{O}_i^p$ は $\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}$ の公約元ではないという仮定に矛盾する。ゆえ $v_i = 0$ 。そこで (*) の両辺を x で微分して

$$G' g_1^{v_1 p} \cdots g_n^{v_n p} = (\alpha_1 + 2\alpha_2 f + \cdots + (p-1)\alpha_{p-1} f^{p-2}) f'.$$

ゆえに $\mathcal{O}_i^p \mid G' g_1^{v_1 p} \cdots g_n^{v_n p}$ 。ところで $v_i = 0$ かつ $g_i + g_j$ ($i \neq j$) より $\mathcal{O}_i^p \mid G'$ でなければならぬ。とくに $\mathcal{O}_i^p \mid g_j'$ (for all $j=1, \dots, m$) これは $g.c.d.(g_1', \dots, g_m')$ に矛盾する。つまり t_i は 1 である。

ゆえ $h_i(x^p) \in k[x^p]$ が存在して $h_i(a_i^p) = f(a_i)$ とおける。剰余定理より $h(x^p) \in k[x^p]$ そうまくとって $h(x^p) \equiv f(x) \pmod{\mathcal{O}_i}$ とできる。 f を $f-h$ とおきかえることによって初めから

$\mathcal{O}_i \mid f$ と仮定してよい。つまり $f = g_0 g_1^{s_1} \cdots g_n^{s_n}$ と表わせる。

ここで g_0 は $\mathcal{O}_i$ ($i=1, \dots, n$) と互いに素な $k^{p^{-1}}[x]$ の元である。

そこで $f' = g_1^{\lambda_1} \cdots g_n^{\lambda_n}$ の λ_i が p より上ならばあきらかに

$s_i \geq p$ 。また $A = k[x^p, f, g_1^{-p}, \dots, g_n^{-p}] \cap k^{p^{-1}}[x]$

であるから $A = k[x^p, f g_i^{-p}, g_i^{-p}, \dots, g_n^{-p}] \cap k^{p^{-1}}[x]$.

ゆえ f を $f g_i^{-p}$ でおきかえることができる。これを繰り返して最初から $1 \leq \lambda < p$ と仮定してよい。ゆえ $1 < \sigma < p$ である。

ここで任意の整数 σ に対して $0 \leq \bar{\sigma} < p$, $\bar{\sigma} \equiv \sigma \pmod{p}$ とおく。

さらに $f^{\bar{\sigma}} = g_0^{\bar{\sigma}} g_1^{\bar{\sigma}} \dots g_n^{\bar{\sigma}}$ とおくと明らかに

$$A \supset k[x^p, f, f^{\bar{2}}, \dots, f^{\overline{p-1}}]$$

がなりたつ。この右辺は $1, f, f^{\bar{2}}, \dots, f^{\overline{p-1}}$ を basis とする

free $k[x^p]$ -module である。ゆえ任意の $G \in k^{p^{-1}}[x]$ が

$G \in A$ なるための条件は (*) のときと同様に

$$G g_1^{r_1 p} \dots g_n^{r_n p} = \alpha_0 + \alpha_1 f + \alpha_2 f^{\bar{2}} + \dots + \alpha_{p-1} f^{\overline{p-1}} \quad (\alpha_i \in k^p[x^p]) (**)$$

ここで $g_i^p \nmid \text{g.c.d.}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{p-1})$ と表わせることである。

整数 j に対して $0 < j^* < p$ で j の modulo p における逆元を

表わすことにすると $\overline{j j^*} = \bar{1}$ 。ゆえ $0 \leq j \leq p-1$ に対して

$\mu_j = \overline{j j^*}$ とおくと $\{\mu_0, \dots, \mu_{p-1}\} = \{0, 1, \dots, p-1\}$ 。仮定より

$g_i^p \nmid \alpha_0, \dots, g_i^p \nmid \alpha_{\mu_{j-1}}, g_i^p \nmid \alpha_{\mu_j}$ とできる。ゆえ (**) に

あいて $\alpha_t f^{\bar{t}}$ は $t = \mu_j$ 以外 g_i^{j+1} でわられて $t = \mu_j$

のときは g_i^{j+1} でわれない。これは $V_i = 0$ であることを示して

いる。すなわち $A = k[x^p, f, f^{\bar{2}}, \dots, f^{\overline{p-1}}]$ 。さらに

$$\begin{aligned} \text{g.c.d.}(f', f^{\bar{2}'}, \dots, f^{\overline{p-1}'}) &= \sum_{i=1}^{p-1} \sigma_i g_0 \dots g_{i-1} g_i' g_{i+1} \dots g_{p-1} \\ &= a \in k^{p^{-1}} \setminus (0) \quad (\sigma_0 = 1) \end{aligned}$$

でなければならぬ。ここで $f_1 = g_0$, $f_2 = \prod_{\sigma_i=2} g_i, \dots$

$f_{p-1} = \prod_{i=p-1}^p g_i$ とおくと f_i は $k^{p-1}[x]$ で "square free" で
 $f = f_1 \cdots f_{p-1}^{p-1}$ かつ $\sum_{i=1}^{p-1} (f_1 f_2 \cdots f_{i-1} f_i' f_{i+1} \cdots f_{p-1}) = a \in k^{p-1} \setminus (0)$
 になりたつ。以上より次の定理を得る。

11. 定理. $f, f^2, \dots, f^{p-1}$ を上のものとする。このとき $k[x^p, f, f^2, \dots, f^{p-1}]$ は height が 1 以下の k -form である。逆に height が 1 の $k[x]$ の k -form はこの環に同型になる。さらに $k[x^p, f, f^2, \dots, f^{p-1}] = k[x^p, f, f^2 + \dots + f^{p-1}]$ になりたつ。

いま上の $f^2 + \dots + f^{p-1}$ を g とおいて $\varphi(x) = x^p, \varphi(y) = f, \varphi(z) = g$ で定義された natural map $\varphi: k[x, y, z] \rightarrow k[x^p, f, g]$ を考える。この kernel を $\mathfrak{p}$ とすると

$$\mathfrak{p} = \sqrt{(Y^p + f^p(x), Z^p + g^p(x))}$$

である。ここで $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ について $f^p(x) = a_0^p + a_1^p x + \dots + a_n^p x^n$ とする。 $g^p(x)$ も同様。前にも述べたように $p \neq 2$ のとき $\mathfrak{p}$ はかならずしも ideal theoretic に complete intersection にならない。ゆえ定理 11 をいいかえて

12. 定理. A が $\text{ht } A \leq 1$ なる $k[x]$ の k -form なるための必要十分条件は $A \cong k[x, y, z]/\mathfrak{p}$ 。ここで $\mathfrak{p}$ は上のように定義されたものである。

定理 11, 12 によって $\text{ht } A = 1$ なる k -form A の structure は 上の $f_1, \dots, f_{p-1}$ を与えることによってきまる。

まず $p=2$ のときを考える。このときは定理11よりただちに

$$A = k[x, y] / (y^p + a_0^p + x + a_1^p x^p + \dots + a_n^p x^{np}) \quad (a_i \in k^{p^{-1}}).$$

ゆえ $\Omega_k(A)$ はつねに free.

$p=3$ のとき。 $A = k[x^p, f_1 f_2^2, f_1^2 f_2]$ で

$$f_1' f_2 + 2 f_1 f_2' = f_1' f_2 - f_1 f_2' = a \in k^{p^{-1}} \setminus (0) \text{ となる。まず}$$

$$f_1 = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2, \quad f_2 = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$

ここで $\alpha_i, \beta_i \in k^{p^{-1}}[x^p]$, と表わせる。

$$k^{p^{-1}}[x^p] + k^{p^{-1}}[x^p] f_1 f_2^2 + k^{p^{-1}}[x^p] f_1^2 f_2 = k^{p^{-1}}[x^p] + k^{p^{-1}}[x^p] x + k^{p^{-1}}[x^p] x^2$$

ゆえこの両辺を x で微分して

$$k^{p^{-1}}[x^p] f_2 + k^{p^{-1}}[x^p] f_1 = k^{p^{-1}}[x^p] + k^{p^{-1}}[x^p] x.$$

ゆえ $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, $\alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1 \in k^{p^{-1}} \setminus (0)$ となる。— このよ

うな α_i, β_i に対して $((\alpha_0 + \alpha_1 x)(\beta_0 + \beta_1 x)^2)' = \alpha_1 \beta_0 - \alpha_0 \beta_1$

かなりたつかる

$$A = k[x^p, (\alpha_0 + \alpha_1 x)(\beta_0 + \beta_1 x)^2, (\alpha_0 + \alpha_1 x)^2(\beta_0 + \beta_1 x)]$$

である。

$p \geq 5$ のとき。このときは $p=2, 3$ にくうべて複雑になるが

$f_1, \dots, f_{p-1}$ を具体的に求めることができる。以下これについて

述べる。まず $(f_1 f_2^2 \dots f_{p-1}^{p-1})' = f_2 f_3^2 \dots f_{p-1}^{p-2}$ であるから

$$f_2 f_3^2 \dots f_{p-1}^{p-2} = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_{p-2} x^{p-2}, \quad (\alpha_i \in k^{p^{-1}}[x^p])$$

をみたさなくてはならない。このような $f_2, \dots, f_{p-1}$ に対して f_1 を与えればよい。まず

$$\Phi = \alpha_0 x + \frac{1}{2} \alpha_1 x^2 + \dots + \frac{1}{p-1} \alpha_{p-1} x^{p-1}$$

とおく。 $\Phi' = f_2 f_3^2 \dots f_{p-1}^{p-2}$ に注意する。 f_i は square free であるから $f_i = g_{i,1} \dots g_{i,\lambda_i}$ と $k^{p-1}[x]$ で既約分解できる。 $a_{i,j}$ を $g_{i,j}$ の 1 つの根とすると $k^{p-1}(a_{i,j})/k^{p-1}$ は sep. とならない。 insep. とするとどのような f_1 をえらんでも

$\sum_{i=1}^p f_1 \dots f_{i-1} f_{i+1} \dots f_{p-1}$ は unit にならない。ゆえに

$k^{p-1}(a_{i,j}) = k^{p-1}(a_{i,j})$, すなわち $k_{i,j} \in k^{p-1}[x]$ が存在して

$\Phi \equiv k_{i,j} \pmod{g_{i,j}}$, 剰余定理より $k \in k^{p-1}[x]$ をうまく

えらんで $\Phi \equiv k \pmod{g_{i,j}}$ ($i=1, \dots, p-1, j=1, \dots, \lambda_i$)

とできる。すなわち $f_2 f_3 \dots f_{p-1} \mid \Phi - k$ かなりたつ。そこで

$(\Phi - k)' = \Phi' = f_2 f_3^2 \dots f_{p-1}^{p-2}$ に注意すれば $f_2^2 f_3^3 \dots f_{p-1}^{p-1} \mid \Phi - k$

であるから $f_1 = (\Phi - k) f_2^{-2} f_3^{-3} \dots f_{p-1}^{-p+1} a$ ($a \in k^{p-1} \setminus \{0\}$)

とおけば f_1 が求まるものである。逆に任意の $f_2, \dots, f_{p-1}$ はすべてこの方法で求めることができる。

$p=5$ のときこのようにして $\rightarrow$ の例をつくってみる。

まず $\pi \in k^{p-1} \setminus k$ とする。そこで

$$f_2 = x + a, \quad f_3 = x + \pi, \quad f_4 = x \quad (a \in k^{p-1})$$

なる場合を考えてみよう。

$$f_2 f_3^2 f_4^3 = (x+a)(x+\pi)^2 x^3$$

$$= x^6 + (2\pi+a)x^5 + (\pi^2+2\pi a)x^4 + a\pi^2 x^3$$

f_1 が存在するためには $p-1=4$ 次の係数が 0 でなければなら
ないから $a=2\pi$ 。これ以外の a の値では f_1 が存在しない。

ゆえ

$$f_2 f_3^2 f_4^3 = x^6 - \pi x^5 + 2\pi^3 x^3$$

そこで

$$\Phi = 3x^7 - \pi x^6 + 3\pi^3 x^4$$

となる。 $\Phi(-2\pi)=0$, $\Phi(-\pi)=-\pi^7$, $\Phi(0)=0$ 。 $h \in k^{p-1}[x^5]$
は $h \equiv 0 \pmod{f_2}$, $h \equiv -\pi^7 \pmod{f_3}$, $h \equiv 0 \pmod{f_4}$

なるように選ぶ。たとえば $h = \pi^{-3} x^5 (x+2\pi)^5$ はこれ
をみたす。ゆえ $f_1 = (\Phi - h) / f_2^2 f_3^3 f_4^4$ とすればよい。

これを具体的に求めると $f_1 = -\pi^{-3}(x-2\pi)$ である。

ゆえ

$$\begin{aligned} & h [x^5, \pi^{-3}(x-2\pi)(x+2\pi)^2(x+\pi)^3 x^4, \\ & \pi^{-1}(x-2\pi)^2(x+2\pi)^4(x+\pi)x^3, \\ & \pi^{-4}(x-2\pi)^3(x+2\pi)(x+\pi)^4 x^2, \\ & \pi^{-2}(x-2\pi)^4(x+2\pi)(x+\pi)^2 x] \end{aligned}$$

は h -form である。

文献

T. Asanuma, Purely inseparable forms of polynomial rings, preprint.