

概均質ベクトル空間の Gauss 和^(*)

川中宣明

阪大・理

行者明彦

1. (G, V) : 既約, 正則概均質ベクトル空間 $/\mathbb{C}$

$V^\vee$: V の dual space

f : V の既約相対不変式

$S = \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$

$O = V - S$

$j: V - S \hookrightarrow V$

$d = \deg f$

$n = \dim V$

$\langle, \rangle: V^\vee \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ pairing

dual の概均質ベクトル空間において, f, S, O, j にあたるものを, $f^\vee, S^\vee, O^\vee, j^\vee$ と書く. (定義については [20] 参照)

佐藤・木村の分類を見ると ([20]), V には, 自然に $\mathbb{Z}$ -scheme の構造が, 入ることがわかる. (この $\mathbb{Z}$ -scheme の構造をもっと intrinsic に, 定めることもできる。) 従って,

reduction mod p により, 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の既約・正則
概均質ベクトル空間が, 得られる。(p が, あまり小さいと,
既約, 正則, 概均質といった条件は, 破れるので, 以下の
話では, p は適当に, 大きいものとしておく。どれだけ大き
くすればよいかは, 分類 [20] を用いて, 個別に計算すれば,
わかる。(11 節参照)

2. $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$: ℓ 進体の代数閉包

$$\chi : \mathbb{F}_q^\times \longrightarrow \mathbb{C}^\times (\cong \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times) \quad \text{乗法指標}$$

$$\psi : \mathbb{F}_q \longrightarrow \mathbb{C}^\times (\cong \overline{\mathbb{Q}_\ell}^\times) \quad \text{加法指標} (\psi \neq 1)$$

とし, $\chi(0) = 0$ と定義する。可換群 $\text{Hom}(\mathbb{F}_q^\times, \mathbb{C}^\times)$ の元とし
ての, χ の位数を $\text{ord } \chi$ と書く。このとき,

$$\mathcal{F}_\psi[\chi \circ f](v^\vee) = \sum_{v \in V(\mathbb{F}_q)} \chi(f(v)) \psi(\langle v^\vee, v \rangle) \\ (v^\vee \in V^\vee(\mathbb{F}_q))$$

とき, これは概均質ベクトル空間の Gauss 和 と呼ぶ。[11]

3. f の b -函数を

$$b_f(s) = b_0 \prod_{j=1}^d (s + \alpha_j) \quad (d = \deg f)$$

とし,

$$b_f^{\text{exp}}(t) = \prod_{j=1}^d (t - e^{2\pi\sqrt{-1}\alpha_j})$$

とすると, [9] [16] を使って $b_f^{\text{exp}}(t) \in \mathbb{Z}[t]$ が, わかる。

[8] より, $\alpha_f \in \mathbb{Q}$ だから,

$$b_f^{\text{exp}} = \prod_{l \geq 1} \Phi_l^{m_f(l)}$$

$\Phi_l = l$ 次円分多項式

と書ける。

4. 予想 $p \gg 0$, $v^\vee \in \mathcal{O}^\vee(\mathbb{F}_p)$ の時

$$(\#) \quad \mathcal{F}_q[x \circ f](v^\vee) = \varepsilon_{x, \psi} q^{\frac{1}{2}(\dim V - m_f(\text{ord } x))} (\chi^{-1} \otimes \theta_x)(f^\vee(v^\vee))$$

$$|\varepsilon_{x, \psi}| = 1$$

$$\theta_x = \begin{cases} 1 & \text{if } \frac{n}{d} \in \mathbb{Z} \\ \text{Legendre symbol} & \text{if } \frac{n}{d} \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z} \end{cases}$$

5. 定理 (i) $m_f(\text{ord } x) = 0$ なら, 予想は OK.

(ii) (G, V) が [20] の分類で, type (11) でなければ,

予想は, OK.

6. 注意 以下を見ればわかるように, この定理は, $\mathcal{E}f^A$

($\mathcal{E}$ は, micro-differential operators の層) の構造に関する問題に帰着させることで, 証明される。type (11) が,

除外されるのは、この場合に、 εf^A の構造が、まだ、十分に
わからないうちによる。

注意 p を、どのくらい大きくとればよいかは、個別に
計算すれば、わかる。(例えば type (1) なら無制限、type (2)
なら $p \neq 2, \dots$)

7. 注意 (この節については、[15] 参照)

1. $|\cdot|^{\frac{1}{1-q}}$: Teichmüller character

$$\gamma(\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^*} |x|^\alpha \psi(x) \quad \left(\alpha \in \frac{1}{1-q} \mathbb{Z}/\mathbb{Z} \right)$$

とする。少々、雑ではあるが、(H) は、次のように書きかえ
られる。

$p \gg 0$, $v^\vee \in O^\vee(\mathbb{F}_q)$ のとき

$$q^{-\frac{n}{2}} \mathcal{F}_\psi[|f|^\alpha](v^\vee) = \varepsilon'_\psi(\alpha) \left(\prod_{j=1}^d \gamma(\alpha + \alpha_j) \right) \cdot |f^\vee(v^\vee)|^{-\alpha - \frac{n}{d}}$$

$$|\varepsilon'_\psi(\alpha)| = 1.$$

Gross-Koblitz の公式により、Gauss 和と、 p 進 Γ 函数が、
本質的に同じものであることを思い出せば、上の予想一定理
(有限体の場合) と、 $\mathbb{R}$ の場合との類似は、明らかであろう。

裏返し変換に関して、 $\mathcal{F}_\psi[\chi \circ f]$ が、どうかわるかは、よく

わかってるので、以下、必要ならば“被約”という仮定をおきながら、定理の証明をする。(スケッチ)

8. (この節では、 $\overline{\mathbb{F}_q}$ 上で考える。)

[5; p172, 定義 1.7] で、定義された、 A' , $A' - \{0\}$ 上の (étale) sheaf $\mathcal{F}(\psi)$, $\mathcal{F}(\chi)$ を、ここでは、 $\mathcal{L}_\psi$, $\mathcal{L}_\chi$ と書くことにする。(X, ψ については、2 節)

$$\begin{array}{ccc} V^\vee \times V & \xrightarrow{\langle \rangle} & A' \\ \text{pr}^\vee \swarrow & & \searrow \text{pr} \\ V^\vee & & V \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & & \\ & & \downarrow \\ V & \xleftarrow{\quad} & V-S \xrightarrow{f} A' - \{0\} \end{array}$$

を自然に定義する。 V 上の sheaf g に対し、

$$\mathcal{F}_\psi[g] = \text{pr}^\vee_* [\text{pr}^* g \otimes \langle \rangle^* \mathcal{L}_\psi] \quad (\text{Fourier 変換})$$

とおく。([2] [10]) ここで、 $\text{pr}^\vee_*$ は、通常 $R\text{pr}^\vee_*$ と書くものであるが、すべての話しか、derived category で、進むので、 R , L は省略する。この時、

$$\mathcal{F}_\psi[\chi \circ f](v^\vee) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \text{Tr}(F; H^i(\mathcal{F}_\psi[j_! f^* \mathcal{L}_\chi])_{v^\vee})$$

ここで、 F は、Frobenius endomorphism. 従って、次の二つを示せば、十分である。

$$8.1. \quad \mathcal{F}_\psi[j! f^* \mathcal{L}_x] \big|_{V^\vee - S^\vee} = f^\vee{}^* \mathcal{L}_{x^{-1} \otimes \theta_x} [-\dim V] \big|_{V^\vee - S^\vee}$$

$$8.2. \quad \mathcal{F}_\psi[j! f^* \mathcal{L}_x] \big|_{V^\vee - S^\vee} \text{ は, pure of weight } -m_f(\text{ord } x)$$

(pure sheaf の定義については, [4] 参照) まず, (8.1) から考える.

9. (この節では, $\overline{\mathbb{F}_q}$ 上)

まず, Jacobi 和の類似物を考える.

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{x \in \overline{\mathbb{F}_q}^\times} \chi^{-d}(x) \psi(-x) \right) \left(\sum_{v \in V(\overline{\mathbb{F}_q})} \chi(f(v)) \psi(\langle v^\vee v \rangle) \right) \\ &= \sum_{\substack{v \\ x \neq 0}} \chi(f(x^{-1}v)) \psi(\langle v^\vee v \rangle - x) \\ &= \sum_{\substack{v \\ x \neq 0}} \chi(f(v)) \psi(x(\langle v^\vee v \rangle - 1)) \\ &= \sum_{\substack{v \\ x \in \overline{\mathbb{F}_q}}} \chi(f(v)) \psi(x(\langle v^\vee v \rangle - 1)) - \sum_v \chi(f(v)) \\ &= \sum_{\substack{v \\ \langle v^\vee v \rangle = 1}} \chi(f(v)) - \sum_v \chi(f(v)) \end{aligned}$$

この計算を, 逐語的に, sheaf の言葉に翻訳すると, 次の distinguished triangle ([5; p265] 参照) を得る:

6.

9.1.

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{pr}_!^{\vee} \text{pr}_!^* (j_! f^* \mathcal{L}_x) & \nearrow \text{これは } 0. \\
 +1 \swarrow & & \nwarrow \\
 \mathcal{F}_\psi [j_! f^* \mathcal{L}_x] [-1] & \longrightarrow & (\text{pr}_!^{\vee}|_H)_! (\text{pr}_!|_H)^* (j_! f^* \mathcal{L}_x) [-2]
 \end{array}$$

但し、

$$H = \{ (v^{\vee} v) \in V^{\vee} \times V \mid \langle v^{\vee} v \rangle = 1 \}$$

注意 (多変数の) Fourier 変換は, Radon 変換と, 一変数の Fourier 変換に分解するが. ([6; Chapter 1] 参照)
 triangle (9.1) を考えることは, Fourier 変換に, 一変数の Fourier 逆変換をほどきして, 話しを, Radon 変換に帰着させることにあたる.

10. (この節では, $\mathbb{C}$ 上)

$\Delta = 1/\text{ord } \chi$ とし, χ^{Δ} が, 定める $\mathbb{C} - \{0\}$ 上の locally constant sheaf を, $\mathcal{L}_{\Delta}$ とする. $\mathcal{F}$ を [3], [7] の意味の Fourier 変換とすると, (9.1) と同様にして, 次の triangle を得る.

10.1.

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{pr}_!^{\vee} \text{pr}_!^* (j_! f^* \mathcal{L}_{\Delta}) & \nearrow \text{これは } 0. \\
 +1 \swarrow & & \nwarrow \\
 \mathcal{F} [j_! f^* \mathcal{L}_{\Delta}] [-1] & \longrightarrow & (\text{pr}_!^{\vee}|_H)_! (\text{pr}_!|_H)^* (j_! f^* \mathcal{L}_{\Delta}) [-2]
 \end{array}$$

さて, f^Δ の, G に関する相対不変性を, $\mathrm{Lie}(G)$ を用いて, infinitesimal に記述すると, それは, 微分方程式と考えられる. ([19] の (4.1)) =これを, $\mathcal{D}$ -module と見たものを, $\mathcal{M}_\Delta$ とし, $\mathcal{M}_\Delta = \mathcal{M}_\Delta[\frac{1}{f}]$ とおくと,

$$\mathcal{F}[\mathfrak{g}! f^* \mathcal{L}_\Delta] = \mathrm{DR}(\mathcal{F}[\mathcal{M}_\Delta^*])$$

であるから, ($\mathrm{DR}, *,$ については, [17] 参照) 議論を, 微分方程式の話に帰着させて, $\mathcal{F}[\mathfrak{g}! f^* \mathcal{L}_\Delta]$ が, おめられる. 従って,

$$pr^! pr^* \mathcal{L}_\Delta, \quad (pr^!|_H)_! (pr|_H)^* \mathcal{L}_\Delta$$

の, reduction mod p が, うまく, (i.e. $\mathbb{Z}_p$ -scheme 上の sheaf と見た時の smoothness)

$$pr^! pr^* \mathcal{L}_x, \quad (pr^!|_H)_! (pr|_H)^* \mathcal{L}_x$$

になれば, (8.1) が, 証明できる. これは, $p \gg 0$ ならば, OK だが, 次に述べるやり方で, 具体的に, p がどれだけ大きければよいか, わかる.

注意 [3] [7] の, Fourier 変換の定義には, 半空間という, $\mathbb{C}$ に特有のものが, 含まれ, 8 節に, 出てきた Fourier 変換 $\mathcal{F}_\psi$ には, Artin-Schreier sheaf $\mathcal{L}_\psi$ という, $\overline{\mathbb{F}}_q$ に特有のものが, 含まれていたため, (9.1) (10.1) という triangles を使わずに, 直接に reduction mod p を考えることはできない.

11. (この節では, mixed characteristic)

reduction mod p が, "うまく" 行く場合を思い出すと:

11.1. (complete smooth variety)

または, もう少し, 一般に:

11.2. (complete smooth variety) - (normal crossing)

くらいしかない. 我々が, 問題にしている sheaf $j_! f^* \mathcal{L}_x$ (on $j_! f^* \mathcal{L}_x$) は, 実質的に, $V-S$ 上の sheaf であるから, (11.2) を直接, 使おうとすると, S の特異点を, 具体的な形で, 解消しなければならぬ. これは, なかなかうまくいかなかった.

ところが, よく知られているように, GL_n (ie. [20] の type (1) の場合の $V-S$) の, 多様体としての cohomology の, reduction mod p に関する不変性が, 次のようにして, 証明できる:

(証明) $E_n = \{ n \times n \text{ 上半三角行列} \}$

$$B_n = E_n \cap GL_n \quad (\text{Borel 部分群})$$

とすると,

$$GL_n \longrightarrow GL_n/B_n$$

は, (11.1) 型の base をもち, (11.2) 型の fibre をもつ, fibre bundle になる. そこで, spectral sequence を使えば, 目的の結果を得る. 

この証明を見て、想像されるように、一般の既約、正則、被約、概均質ベクトル空間でも、 E_n にあたる subspace が、うまくみつかれば、同様の議論が、できるはずである。ゆえに、実際に、みつかる。

命題～定義

V : 既約、正則、被約、概均質ベクトル空間。

B : G の Borel 部分群

B_0 : generic isotropy 群の、Borel 部分群

とすると、

(i) V の B -stable な subspace E が、 $V-S$ と交わるなら、

$$\dim E \geq \dim B - \dim B_0$$

であり、等号の成立する場合、 E を (仮に) Borel subspace と呼ぶ。

(ii) Borel subspace E で、 $E \cap S$ が、normal crossing になるか、または、ordinary double しか持たないものが、存在する。

この証明は、case-by-case check であり、不満が残るが、とにかく、このおかげで、reduction mod p に関する精密な議論が、できる。

注意 Borel subspace は、水野氏の、 E_n 型代数群 (任意標数) の、ユニポテント共役類の分類の仕事の中で、最初に、(implicit に) あらわれた。最近の、村上順氏の仕事では、big cell の、概均質ベクトル空間における類似物が、大きな役割りを、はたしていることにも、注意しておく。

これで、(8.1) の証明のあらすじは、完了した。次に、(8.2) を考える。

12 $j_! f^* \mathcal{L}_X$ は、perverse sheaf であり、(perverse sheaf については、[1] [17] 参照) perverse sheaf は、weight filtration を持つので ([1] 定理 5.3.5)

$$j_! f^* \mathcal{L}_X = \mathcal{W}_0 \supset \mathcal{W}_1 \supset \mathcal{W}_2 \supset \cdots$$

を weight filtration とする。(derived category における、"filtration" については [1] 3.1 節) 11 節の議論により、この filtration は、標数 0 に、持ち上げられる:

$$j_! f^* \mathcal{L}_X = \mathcal{W}_0 \supset \mathcal{W}_1 \supset \mathcal{W}_2 \supset \cdots$$

さらに、Riemann-Hilbert 対応 により、次の filtration が、得られる:

$$\mathcal{M}_X = \mathcal{N}_0 \supset \mathcal{N}_1 \supset \mathcal{N}_2 \supset \cdots$$

pure な perverse sheaf が、semi-simple で、あること

より [1; (5.3.4)]

12.1. $\mathcal{N}_{-i}/\mathcal{N}_{-i-1} = \text{simple } \mathcal{D}\text{-modules の直和.}$

また, perverse sheaf の weight filtration の存在 [1; (5.3.5)] の証明と同様にして

12.2 $\mathcal{W}_{-i} \supset \mathcal{W}_{-i-1} = \mathcal{W}_{-i-2}$

ならば, $\mathcal{W}_{-i}$ において, $\mathcal{W}_{-i-1}$ の complement が,

存在する.

ことが, わかる. さらに, [19] の一般論と, [12][13][14][18]

[19] の具体的な計算により, $\mathcal{E} \otimes \mathcal{M}_\Lambda$ の $\mathcal{E}$ -module として

の構造は, [20] の $\text{type}(11) = (SL_5 \times GL_4, \Lambda^2(V_5) \otimes V_4)$

を除いて, きわめてよく, わかってゐる. 特に, $\mathcal{E}$ -submodule

として, どのようなものが, 存在するか, また, 存在しない

かが, 十分にわかってゐて, その知識と, (12.1), (12.2) を

あわせると

$$\mathcal{N}_0 \supsetneq \mathcal{N}_{-1} \supsetneq \cdots \supsetneq \mathcal{N}_{-m_f(\text{ord } x)} \supsetneq \mathcal{N}_{-m_f(\text{ord } x)-1} = 0$$

$$\text{Supp } \mathcal{E} \otimes \mathcal{N}_{-m_f(\text{ord } x)} \supset V^\vee \times \{0\}$$

が, わかる. これから, $j_! f^* \mathcal{L}_x$ の組成因子で, $\mathcal{H}$ の Fourier 変換が, $V^\vee - S^\vee$ 上で, 生き残るものを, $\mathcal{G}$ とすると,

$$\mathcal{G} = \text{pure of weight } -m_f(\text{ord } x).$$

ここで, [4] の主結果と, $\mathcal{F}_q$ が, Verdier dual と可換

であること [10; (2.1.5)] を使うと.

$$F_4[q] = \text{pure of weight } -m_f(\text{ord } x)$$

さらに.

$$F_4[j, f^* \mathcal{L}_x] \big|_{v^* - s^*} = F_4[q] \big|_{v^* - s^*}$$

であるから, (8.2) を得る.

13. 注意 $\Sigma \otimes \mathcal{M}_\Lambda$ の submodule の存在・非存在に、^(特に、非存在) 関する部分で、佐藤・木村の「分類」も、本質的に用いたが、local b -function を用いて (分類は用いずに) 本来、議論できるはずであるが.....

(*) 本稿は、行者が、執筆した。概均質ベクトル空間の Gauss 和というものの定義された背景、その他、については、「代数的整数論 シンポジウム (1984年 7月)」の報告集に所収の稿を、見ていただきたい。えちらの方は、川中が、執筆している。

References

- [1] A.A. Beilinson, J. Bernstein, P. Deligne : Faisceaux pervers, Astérisque N° 100 (1982)
- [2] J.L. Brylinski : Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformations de Fourier et sommes trigonométriques. Preprint.
- [3] J.L. Brylinski, B. Malgrange, J.L. Verdier : Transformation de Fourier géométrique, I. C.R. Acad. Sc. Paris 297 (1983) 55-58.
- [4] P. Deligne : La conjecture de Weil II. Publ. Math. IHES 52 (1980) 137-252
- [5] P. Deligne et al. : SGA $4\frac{1}{2}$, Lecture Notes in Math. 569. Springer
- [6] I.M. Gel'fand, M.I. Graev, M.Ya. Vilenkin : Generalized functions. vol 5.
- [7] R. Hotta, M. Kashiwara : The invariant holonomic system on a semisimple Lie algebra, Inventiones Math. 75 (1984) 327-358
- [8] M. Kashiwara : B-functions and holonomic systems. Inventiones Math. 38 (1976) 33-53
- [9] M. Kashiwara : Holonomic systems of Linear differential equations with regular singularities and related topics in

- topology, Adv. in Pure Math. vol 1, Kinokuniya.
- [10] N.M. Katz, G. Laumon : Transformation de Fourier et majoration de sommes exponentielles, Dissertation.
- [11] N. Kawanaka : Open problems in algebraic groups, Katata Symp. Proc. P13
- [12] T. Kimura : The b -functions and holonomy diagrams of irreducible regular prehomogeneous vector spaces, Nagoya Math. J. 85 (1982) 1-80
- [13] T. Kimura, M. Muro : On some series of regular irreducible prehomogeneous vector spaces, Proc. Japan Acad., ^{Ser.A.} 55 (1979) 384-389
- [14] T. Kimura, I. Ozeki : On the microlocal structure of a regular prehomogeneous vector space associated with $\mathrm{Spin}(10) \times \mathrm{GL}(3)$, Proc. Japan Acad., 58 Ser.A (1982) 239-242
- [15] S. Lang : Cyclotomic fields II, Springer
- [16] B. Malgrange : Polynomes de Bernstein-Sato et cohomology evanescente, Astérisque 101-102 (1983)
- [17] 野海正俊 : Constructible $\mathbb{C}_x$ 加群と holonomic $\mathcal{D}_x$ 加群, 数学 36巻2号 (1984) 125-136

- [18] I. Ozeki : On the microlocal structure of a regular prehomogeneous vector space associated with $GL(P)$,
Proc. Japan Acad., 56, Ser. A (1980) 18-21.
- [19] M. Sato, M. Kashiwara, T. Kimura, T. Oshima : Micro-local analysis of prehomogeneous vector spaces, Inventiones Math. 62 (1980) 117-179.
- [20] M. Sato, T. Kimura : A classification of irreducible prehomogeneous vector spaces and their relative invariants, Nagoya Math. J. 65. (1977) 1-155.