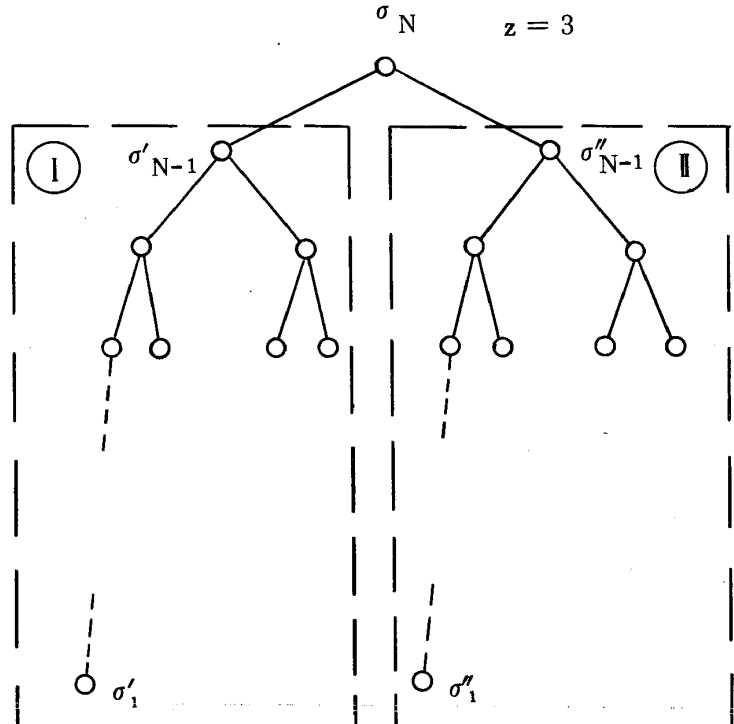


## Bethe 格子における固有値問題の方法

東京工大物理 小 口 武 彦

Bethe 格子では閉じた図形がないことが、1次元格子と類似している。このため Ising model の Bethe 格子に、1次元格子の場合の Kramers-Wannier の固有値問題の方法<sup>1)</sup>を適用できる。

図に示すように ① の系 (スピンの総数は  $N-1$  個) で、1番上のスピンが  $\sigma'_{N-1}$  の値 ( $\pm 1$  の何れか) をとる確率を  $P_{\sigma'_{N-1}}$  とし (② についても同様), ① + ② にさらに1個のスピン  $\sigma_N$  を加え (スピンの総数は  $2N-1$  個になる), そのスピンが  $\sigma_N$  の値をとる確率を  $P'_{\sigma_N}$  とすると, つぎの non-linear な固有値方程式が得られる。



$$\lambda P'_\sigma = \left[ \sum_{\sigma'=\pm 1} e^{K\sigma\sigma' + \frac{1}{z-1}L\sigma} P_{\sigma'} \right]^{z-1} \quad (1)$$

$$P_+ + P_- = P'_+ + P'_- = 1$$

$$\lambda \equiv \frac{Z_{(z+1)(N-1)+1}}{[Z_{N-1}]^{z-1}}, \quad K \equiv \frac{J}{2kT}, \quad L = \frac{mH}{kT} \quad (2)$$

ただし  $Z_{(z+1)(N-1)+1}$ ,  $Z_{N-1}$  はそれぞれ  $(z+1)(N-1)+1$  個および  $N-1$  個のスピン系の状態和,  $z$  は最隣接格子点の数 (図は  $z=3$  の場合) である。簡単のため  $L=0$  とおく。(1) は  $P_+ = P_- = P'_+ = P'_- = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = 2 \cosh^2 K$  という解がある

小口武彦

ことはただちにわかる。これは paramag の解である。そこで  $P'_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \epsilon'$ ,  $P_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \epsilon$  ( $\epsilon, \epsilon'$  は微小量) とおくと, (1) より

$$\frac{\epsilon'}{\epsilon} = (z-1) \tanh K \quad (3)$$

が得られる。 $\epsilon > \epsilon'$  のときは, 外側のスピンの摂動を与えても, 内側に入るにつれて damp してしまうので, paramag の解が安定であるが,  $\epsilon'/\epsilon > 1$  となると  $P_{\pm} = \frac{1}{2}$  の解は不安定になり, そのときは安定な解は  $z=3$  の場合は

$$\lambda_2 = 2 \operatorname{sh} 2K$$
$$P_{\pm} = \frac{2 \operatorname{sh} K \pm e^{-K} \sqrt{(e^{2K}-3)(e^{2K}+1)}}{4 \operatorname{sh} K} \quad (4)$$

が得られる。したがって  $(z-1) \tanh K_c = 1$  が転移点であり, これは当然のことながら Bethe 近似の結果と一致する。

注意すべきことは, (2) の定義から,  $\lambda$  はスピン 1 個あたりの状態和に相当するものであるが, Bethe 格子ではそうではない。それは Bethe 格子は普通の格子と違って site が同等でないためである。したがって上に得た解は, Bethe 格子の十分内側のスピンに対する解である。

#### Reference

- 1) H.A.Kramers and G.H.Wannier : Phys Rev 60 (1941) 252