

Quantifier "aa" を持つ system ST の完全性定理

神大 敬養部 角田 譲

Quantifier "aa" を持つ集合論 ZF^{aa} の基礎となる体系の自然形の完全性定理が Keisler, $\mathcal{L}(Q)$ の体系の完全性定理の証明と同様の方法で得られることを示すのが本稿の目的である。

$\mathcal{L}$ は equality を持つ first-order language である。 $\mathcal{L}^{aa}$ は $\mathcal{L}$ に新しく "quantifier" "aa" を付け加えて得られる language である。 $\mathcal{L}^{aa}$ formulas は通常と同様に定義する。次の項が新しく付け加えられる: $\varphi \in \mathcal{L}^{aa}$ formula とする。 $(aa)x\varphi$ も $\mathcal{L}^{aa}$ formula である。

$\mathcal{L}^{aa}$ の structure とは、 $\mathcal{L}$ の structure $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ の universe A の部分集合 F の集合 $\mathcal{F}$, i.e. $\mathcal{F} \subseteq P(A)$ の pair $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ を意味する。

$(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ を $\mathcal{L}^{aa}$ の structure, $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{L}^{aa}$ formula とする。 $(\mathcal{M}, \mathcal{F}) \models \varphi[a_1, \dots, a_n]$ ($a_1, \dots, a_n \in A$) である。

答: 是 ()

Lemma 1. $(\mathcal{M}, \mathcal{F}) \models \mathcal{L}^{aa}$, structure $\models \vdash$. $\vdash \varphi$ 2. $\& \&$
 i.e. $(\mathcal{M}, \mathcal{F}) \models \varphi$ 2. $\& \&$. $\Sigma \vdash \varphi$ 2. $(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ i.e. Σ , model 2. $\&$
 + i.e. $(\mathcal{M}, \mathcal{F}) \models \varphi$ 2. $\& \&$.

[illegible]

Lemma 3. $\mathcal{L}^{aa} = \mathcal{L}^{bb}$. $\Rightarrow$ $\mathcal{L}^{aa}$ is a $\mathcal{L}^{bb}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}^{aa} = \mathcal{L}^{bb}$.
 $\mathcal{L}^{aa} = \mathcal{L}^{bb}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}^{aa} = \mathcal{L}^{bb}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}^{aa} = \mathcal{L}^{bb}$.

Lemma 4. $\mathcal{L} \models \exists \frac{\aleph_1}{\aleph_0}$ Language $\models \vdash \exists$. $T \in \mathcal{L}^{aa}$,
consistent theory, $\Sigma_n(x)$ ($n < \omega$) $\in \mathcal{L}^{aa}$, $x \in \text{free}$ $\rightarrow$ $\neg$
free variable $\in \{ \in \mathcal{D} \}$ formulas, $\frac{\aleph_1}{\aleph_0} \models \vdash \exists$, $x \in \mathcal{C}$. Then,
 $\exists \Sigma_n \models$ locally omit $\models \vdash \exists$ $x \in \mathcal{C}$. Then, $\exists \Sigma_n \models$ omit $\models \vdash \exists$.
countable model $\in \mathcal{D}$.

Ex 17. Binary predicate symbol $\in \mathcal{A}$ 2

Definition 5. ST is. language $\mathcal{L}^{aa}$, $\vdash$ is formulae φ & ψ & χ , non-logical axioms $\vdash \varphi$, $\vdash \psi$ & $\vdash \chi$.

$$FL \text{ I. } (\forall x)(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (caax)\varphi \rightarrow (caax)\psi.$$

$$FL\ 2. \quad (aax)\varphi \wedge (aax)\psi \rightarrow (aax)(\varphi \wedge \psi).$$

FL 3. $\neg (\max) (x \neq x)$

ST I. $(\forall x)(\text{aa}y)(x \in y), \quad (\forall x)(\text{aa}y)(x \subseteq y).$

Definition 6. A is non-empty set, E is A binary relation $\subseteq \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$, (A, E) is κ -regular $\Leftrightarrow \exists \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ such that $\mathcal{F}$ is a κ -complete filter and $\mathcal{F} \subseteq E$.

- (1) $(\forall a \in A) (a_E)^\perp < \kappa$,
 (2) $\{a_E : a \in D\}$ is a closed unbounded subset of A subset $D \subseteq \mathcal{P}(A)$. $\text{Hence } a_E = \{b \in A : b \in a\}$.

It follows that (A, E) is κ -regular, (A, E) is extensional $\Leftrightarrow \exists \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ such that $\mathcal{F}$ is a κ -complete filter and $\mathcal{F} \subseteq E$.

Definition 7. $\text{Cub}_{E, \kappa} \subseteq \mathcal{P}(A)$ is a κ -complete filter.

$\text{Cub}_{E, \kappa} = \{X \subseteq A : \hat{K} \subseteq X, K \cap \mathcal{P}_\kappa(A) \text{ is a club subset}\}$,
 where $\hat{K} = \{a \in A : a_E \in K\}$.

Lemma 5 is $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}_\kappa(A)$ Lemma 8 is $\mathcal{F} \cap \mathcal{P}_\kappa(A)$.

- Lemma 8. (1) $\text{Cub}_{E, \kappa}$ is a κ -complete filter $\subseteq \mathcal{P}(A)$.
 (2) $\text{Cub}_{E, \kappa}$ is $\bar{E}$ -normal $\Leftrightarrow \exists \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ such that $\mathcal{F}$ is a κ -complete filter and $\mathcal{F} \subseteq E$.
 (3) $\bar{A} < \kappa$ $\Leftrightarrow \exists \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(A)$ such that $\mathcal{F}$ is a κ -complete filter and $\mathcal{F} \subseteq E$.

$$\Rightarrow (\mathcal{L}^*, \mathcal{S}) \models \varphi[b],$$

$$\Rightarrow (\mathcal{M}^*, \mathcal{F}) \models (aay, \varphi(y)) \text{ is a formula } \varphi(y) \text{ of } \mathcal{L}^{aa}(\mathcal{M}) \text{ such that } (\mathcal{M}^*, \mathcal{F}) \models \varphi[b].$$

$$\text{iv) } A = \{A \vdash B : A \vdash B\}$$

$$\text{H.C.} \Rightarrow \text{iv) } (\exists x) \varphi \Rightarrow \neg (\forall x) \neg \varphi \text{ is not true.}$$