

ゲルボールの衝突^{*)}

—超弾性領域での変形と衝撃力—

田中良巳

北海道大学創成科学研究機構

(2005年9月5日受理)

1 序論

1.1 背景

固体の衝突は、大きな空間スケールでは惑星科学から、建築物の解体・機械加工、あるいは、球技（戯）など、基礎科学から工学あるいは日常生活に至るまで広範囲の事柄に関わる現象である。その科学的な研究の始まりは、ヘルツによる弾性接触理論 [1] の提出とその結果の接触時間問題（2物体の衝突において、衝突速度とそれらが接触している時間との関係を問う問題）への適用にまで遡ることが出来る。20世紀以降は、固体衝突の研究は主として応用的な観点から行われて、金属を中心とする構造材料の衝突特性について多くの実験データが蓄積されるとともに、理論的にそれらを説明するために、上述のヘルツ理論を基礎にしつつ、その上に、弾性振動や様々な散逸効果、例えば、塑性変形や固体粘性などを考慮した現象論が提出されてきた [2, 3, 4]。さらに、1990年代からは、粉体ダイナミクスを基礎づけることを目的として、球状固体の衝突現象が、跳ね返り係数の衝突速度依存性を中心とて、再び基礎的・物理的な観点から研究されるようになってきている [5, 6, 7, 8, 9]。

上で述べた硬い固体の衝突現象に対する研究の流れに対比すべきものとして、超撥水性の基板上への小さな（サブミリ程度）水滴の衝突挙動の研究を挙げることができる [10]。水滴は、サイズが小さくなると表面エネルギーが支配的になり、球という固有の形をもち、その形を乱すような変形に対して復元力を生ずる。このような水滴が（それがへばりつくことの無い）超撥水性の基板上に打ち付けられると、跳ね返りやその後の内部振動といった衝突現象特有の振舞いを示す。このような液滴衝突の理解には、通常の硬質の固体衝突におけるものとは異なった、大胆な単純化を伴った物理的視点が有用であることが示されている [11]。また、回転する固体片が液体表面に衝突する時の跳ね返り現象についても、最近系統的な実験的・理論的研究が行われた [12, 13]。

微少水滴にとどまらず、いわゆるソフトマター物理が対象とするような物質群における衝突現象には、それ固有の意義を見出すことができる。まず、第一に、ソフトマターは小さな外力に対しても大きな変形を生じ、かつ、その構成関係（応力と歪（とそれらの時間微分）との関係）は多種多様である。こうした系の衝突挙動を、通常の

*) 本稿は、編集部の方から特にお願ひして執筆していただいた記事である。

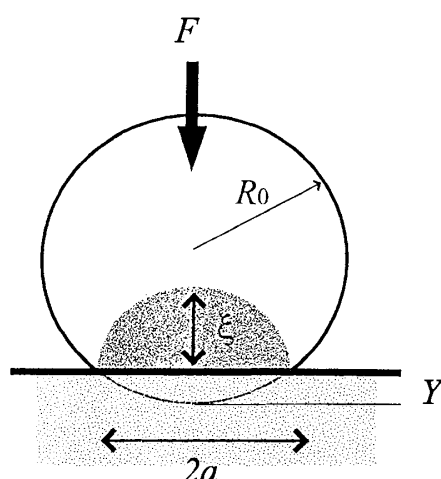


図 1: 半径 R_0 の弾性体球を力 F で剛体基板に静的に押し付けたときの変形。

硬質の固体におけるものと対比させながら特徴づけ、理解していくことは、連続体力学的な観点から、興味深いことである。また、ある種のソフトマターは生体組織のモデル物質とみなされたり、緩衝材として用いられったりする。そうした系の衝突特性を研究することは、基礎科学としての（ソフトマター）物理学が、バイオメカニクス等応用も含めた他分野と生産的な交流を行う機会の一つになり得る。

ここでは、ソフトマターの一つであるゲルの衝突現象について述べる [14, 15, 16, 17]。具体的には、自由落下する球状ゲルが、水平な剛体基盤へ衝突し、跳ね返るまでの変形過程を扱う。実験では、粘性が小さく大変形弾性体（超弾性体）と見なすことが出来るようなゲルを用い、i) 接触過程で大変形したゲル形状や、ii) その変形を特徴付ける時間スケール、即ち、接触開始から最大変形までの時間や接触時間、iii) 跳ね返り係数、あるいは iv) 衝突中にゲルが基板に及ぼす力（とその最大値）、を衝突速度をパラメータにして計測する。ここで得られたデータは、微少変形領域を扱うヘルツ理論の予測とは大きく異なった振舞いを示す。また、得られた実験データを説明するため、大変形衝突の特徴を考慮したスケーリング的な議論、及びそのアイデアを発展させた簡単なモデルを提案する。本研究の結論を一口でいうと、ゲルのような柔らかな物質の衝突において、衝突速度と垂直な方向への変形が本質的である、ということである。

以下では、まず、背景知識として線形弾性論に基づくヘルツ接触理論の要約を行う。

1.2 スケーリングによるヘルツ理論の要約

ここではまず、Hertzによる弾性接触理論を、スケーリングの観点から見直した後 [18]、オリジナルの解析的取り扱い [1, 19, 20] の結果について要約する。

まず、静的な圧縮の場合から論じる。図 1 に示したように、半径 R_0 、Young 率 E の球状弾性体を、剛体壁に力 F で押し付けた状況を考える。球の底部の凹みを Y 、また接触面の半径を a とする。ここで問いたいことは、「凹み Y と接触力 F には、どのような関係があるか？」である。次元的には、歪エネルギー U は以下の形をとる：

$$U \cong E \epsilon_c^2 W_c. \quad (1)$$

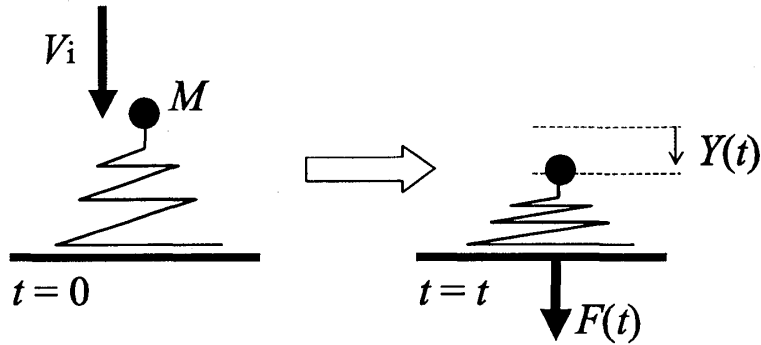


図 2: ヘルツ衝突のアイデアを模式的に表現する等価モデル。質点は元の弾性体球と同じ質量を持ち、バネはヘルツタイプの非線形な力-変形関係をもつ。

ここで、記号「 $\cong$ 」は、数係数を除いて等しいという意味に用いることとする。 E は Young 率、 W_c は歪んでいる領域の体積の典型値、 ε_c はその領域での歪の典型値である。また、図 1 に示した ξ は、歪領域の典型的な厚み (或いは、歪の浸入長) である。まず、 $\xi \cong a$ が成り立つ。これは、‘等方’弾性体の本質的性質としてある面にサイズ a にわたって乱れが加えられると、その効果は a と同程度のサイズにわたって内部に染み入る、からである。これより、歪領域の体積は次元的には、(i) $W_c \cong a^3$ となる。また、この領域での歪の典型値は、(ii) $\varepsilon_c \cong Y/a$ である。唯一の長さスケール a で特徴付けられる歪み領域が Y だけの変形 (凹み) を被るからである。また、 Y が十分小さい場合、接触部の形状は、2 次曲面で近似できるので、(iii) $Y \cong a^2/R_0$ である。これら条件を式 (1) に代入すると、歪エネルギー U のスケーリング形は、

$$U(Y) \cong ER_0^{1/2}Y^{5/2} \quad (2)$$

となる。これを Y で微分することで、接触力 F と凹み Y との関係が得られる。

$$F(Y) \cong ER_0^{1/2}Y^{3/2}. \quad (3)$$

これらの関係式で特徴的な点の一つは、力 F と凹み Y が、 $3/2$ 乗という非自明な冪で関係付けられることである。即ち、弾性体球を一つの力学的な素子とみると、それは圧縮に対しては非線形バネとして振舞う。この非線形性は、弾性球の圧縮では歪領域が接触部付近に局在し、かつ、その大きさ W_c が Y に依存することによる。(もし、球ではなく立方体押し付けたら歪は系全体に一樣に分布し、その値は Y と比例する。その結果 F と Y は比例する。)

次に弾性球と剛体基板との衝突を論じる。議論の前提として、弾性球と基板との相互作用は、上で述べた静的なヘルツ接触に従うと仮定する。即ち、弾性球の中心と基板との距離が $(R_0 - Y)$ であるとき、基板から弾性球に及ぼされる力は、上の式 (3) に従うものとする。この仮定の下では、弾性球は図 2 に示すような、非線形バネ-質点系と等価である。ただし、この質点は元の弾性球と同じ質量 M をもち、非線形バネは、それ自体の質量は無視でき、かつ、ヘルツコンタクトと同じ変位-力関係に従うとする。以降では、この等価モデルを念頭において議論を進める。このバネ-質点系に、(基板

に向けて) 初速度 V_i を与えたとき、基板との接触過程は以下のように進展する：接触開始後、質点は、速度を減じながら沈み込み、最大変形 Y_m に達し、また、基板に最大接触力 F_m を及ぼす；続いてその全く逆の過程をたどって質点が上昇し、バネが自然長まで回復した時点で飛び立つ（跳ね返る）。接触開始から最大変形までの時間を τ_m とし（以降「変形時間」と呼ぶことにする）、接触開始から跳ね返りまでの時間、つまり接触時間を τ_f とする。以下では、この 1 自由度モデルでは、後者は厳密に前者の 2 倍である） τ_m 、 Y_m 、 F_m の V_i 依存性を議論する。

まず次元的には

$$\tau_m \cong Y_m/V_i \quad (4)$$

が成立する。 Y_m は、エネルギー保存則

$$\rho R_0^3 V_i^2 \cong E R_0^{1/2} Y_m^{5/2}. \quad (5)$$

より、

$$Y_m \cong (\rho/E)^{2/5} R_0 V_i^{4/5} \quad (6)$$

となり、これを式 (4) に代入すると

$$\tau_m \cong (\rho/E)^{2/5} R_0 V_i^{-1/5} \quad (7)$$

という $\tau_m - V_i$ 関係が得られる。また、 F_m については、式 (3) より

$$F_m = F(Y_m) \cong E R^2 (\rho/E)^{3/5} R_0 V_i^{6/5} \quad (8)$$

となる。以上の結果を簡潔に表すため、以下の特徴的な速度、時間、力のスケールを導入する。

$$V_c \equiv \sqrt{E/\rho}, \quad (9)$$

$$\tau_c \equiv R_0/V_c, \quad (10)$$

$$F_c \equiv E R_0^2. \quad (11)$$

数係数の違いを無視するスケーリングの立場からは、 V_c は音速、 τ_c は、音波が試料のサイズ程度伝播するのに要する時間と意味づけることができる。これより、

$$Y_m/R_0 \cong (V_i/V_c)^{4/5}, \quad (12)$$

$$F_m/F_c \cong (V_i/V_c)^{6/5}, \quad (13)$$

$$\tau_m/\tau_c \cong (V_i/V_c)^{-1/5}, \quad (14)$$

を得る。

最後に、上に述べた静的圧縮と接触時間に対する解析的取り扱いの結果について簡単にまとめておく。まず、弾性球と剛体基板との静的な接触において以下の結果が導かれている [1, 19, 20]。

$$F(Y) = \frac{4E}{3(1-\nu^2)} R_0^{1/2} Y^{3/2}, \quad (15)$$

$$U(Y) = \frac{8E}{15(1-\nu^2)} R_0^{1/2} Y^{5/2}. \quad (16)$$

ここで、 ν は弾性球の Poisson 比である。

ヘルツ理論における τ_m または接触時間 τ_f の表式を導くには、単に運動の積分を行えばよい。即ち、エネルギー保存の条件 $\frac{1}{2} M V_i^2 = \frac{1}{2} M \left(\frac{dY}{dt}\right)^2 + U(Y)$ より、

$$\tau_m = \int_0^{Y_m} \frac{dY}{\sqrt{V_i^2 - 2U(Y)/M}}. \quad (17)$$

ただし、 Y_m は最大変形時におけるエネルギー保存の条件 $(1/2) \times M V_i^2 = U(Y_m)$ より決まる。ゲルではほぼ厳密に成り立つ非圧縮条件 $\nu = 1/2$ を採用し、積分の値を評価すると、上の式 (14) に対応して次が得られる。

$$\tau_m/\tau_c = \tau_f/2\tau_c = 2.26 \times (V_i/V_c)^{-1/5}. \quad (18)$$

また、 F_m に関しては、

$$F_m/F_c = (15\pi/16)^{3/5} \times (V_i/V_c)^{6/5}. \quad (19)$$

これらの結果は、後でゲル球の実験データとの比較に用いる。

2 実験

2.1 試料ゲル

本研究では、水溶液状態のアクリルアミド (acrylamid:AA) モノマーと架橋分子メチレンビスアクリルアミド (N, N'-methylenebisacrylamide:BIS) を、球殻状の型の中でラジカル重合することで、球状のゲルを作成した (ラジカル形成剤は、ammonium peroxodisulphate、反応促進剤は、tetramethylethylenediamine)。ゲルの組成を変化させる (主には BIS 濃度) ことでゲルの Young 率をコントロールした。表 1 に、本実験で用いたゲルの組成を示した。(ゲルを区別するために A10B4 等の略称を導入した。) 粘弾性測定の結果、ここで用いられているゲルは、0.1Hz から 100Hz 程度までの振動数に対して力学応答はほとんど変化せず、この範囲の周波数において、純粋な弾性体と見なしてよいことがわかった。表 1 には、50Hz の振動数における複素 Young 率の実部 E' と $\tan \delta$ の値も示した。 E' (通常のヤング率 E と同一視する) とゲルの密度 ρ から決まる特徴的速度スケール $V_c = \sqrt{E'/\rho}$ の値もあわせて示した。

衝突 (あるいは静的圧縮) 実験に際して、ゲル表面での粘着現象を避けるため、その表面を予めアルミナ粉末コートした。

2.2 静的圧縮実験

静的圧縮実験には半径 15mm の球状ゲルを用いた。実験では、電子天秤の上に球状ゲルを置き、上からガラス板で圧縮した。このガラス板の変位は、z 軸ステージによってコントロールした。接触力は、(元々のゲル球の重さを差し引いた上で) 電子天秤の表示から決定した。

code	water[g]	AA[g]	BIS[g]	E' [10^4 Pa]	$\tan \delta$	V_c [m/s]
A6B6	100	6	0.06	0.61	0.07	2.40
A10B4	100	10	0.04	1.24	0.08	3.42
A10B7.5	100	10	0.075	2.09	0.03	4.45
A10B10	100	10	0.1	2.71	0.02	5.04
A10B15	100	10	0.15	3.88	<0.01	6.05
A10B30	100	10	0.3	6.46	<0.01	7.81

表 1: 試料として用いたアクリルアミドゲルの組成、50Hz の振動数における複素 Young 率の実部 E' と $\tan \delta$ 、及び $V_c \equiv \sqrt{E'/\rho}$ (ρ はゲルの密度) で定義される特徴的速度スケール。

2.3 衝突実験

衝突実験には、半径 25mm の球状ゲルを用いた。吸引チューブによってゲル球を基板 (厚さ 10mm のアルミ板) の上方に固定する。吸引を止めることでゲルの落下が開始し、基板と衝突する。衝突速度 V_i は、 h を吸引状態でのゲルの底部と衝突を受ける基板表面との距離として、 $V_i = \sqrt{2gh}$ によって決定した。この衝突過程を、高速 CCD ビデオカメラ (Motion Coder Analyzer : Kodak 社製) によって記録した (記録速度は、1000FPS)。これらの記録画像上で、接触時間 τ_f や変形時間 τ_m 、あるいは、衝突中のゲルのサイズ変化を計測した。(変形時間 τ_m は、接触開始からゲルの横方向のサイズが最大になる時刻までの間隔として定義した。)

衝突中の接触力を計測する場合、アルミ基板上に三個のロードセル (フォースゲージ) を配置しさらに、その上からゲルの衝突を直接受けるための厚さ 10mm のアクリル板を置いた (上下の板とロードセルは粘着剤で固定されている)。

この研究では、ゲル球の跳ね返り係数 e の衝突速度依存性についても評価した。そのために、一度基板から跳ね返ったゲルが再び基板と衝突をするまでを高速ビデオカメラで記録し、一回目と二回目の衝突の接触開始時刻の差から、1 度目の衝突での跳ね返り速度を評価し、 V_i との比を取ることで、跳ね返り係数を決めた。

3 結果

3.1 静的圧縮

図 3 は、静的圧縮実験の結果である。ただし、変形及び接触力は、各々、特徴的な量 R_0 、 $F_c \equiv ER_0^2$ によって無次元化してある。異なる試料ゲルの力-変形関係は、一つの曲線上に重ねられることがわかる。また、グラフにおいて、'Hertz' と記された曲線は、ヘルツ理論の解析解の結果 ($F/F_c = (16/9)(Y/R_0)^{3/2}$; 式 (15) において $\nu = 1/2$ としたもの) である。 Y/R_0 が小さい時には、ゲルの圧縮挙動がヘルツ理論の結果とよく合致することがわかる。一方、大きな Y/R_0 では、 F/F_c はヘルツ理論の予想を上回る。ヘルツ理論からの逸脱は、図 3(b) 中に下向きの矢印で示したように、 $Y/R_0 \approx 0.3$ 程度のところで起きている。即ち、ヘルツ理論は、凹み Y が半径 R_0 の $1/3$ 程度という比較的大きな変形までよく成り立つ。図中で 'Fitting' と記した点線は、

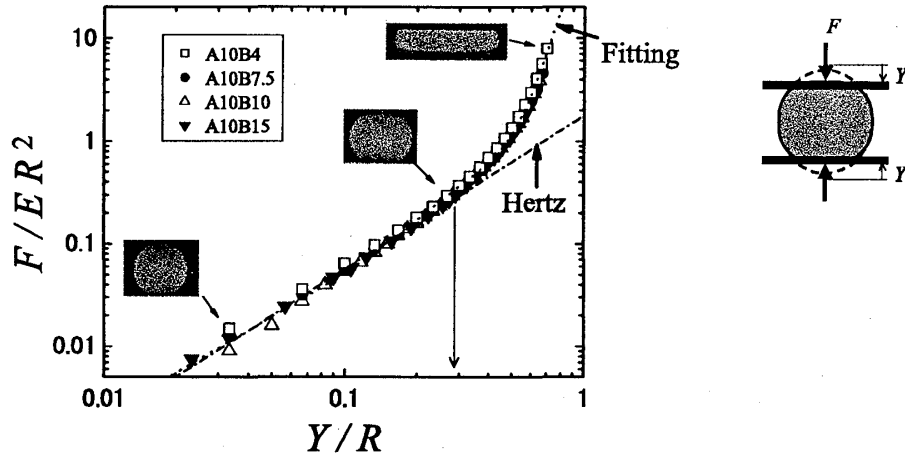


図 3: 静的な圧縮実験の結果。Y の定義は、イラストに示されている。挿入の写真は、それが指すデータ点に対応する変形。特に真ん中の写真は、ヘルツ的な挙動がみられる限界の変形でのゲルの形状である。下向の矢印で示したように静的圧縮実験において、ヘルツ的な振舞いは Y が半径 R_0 の $1/3$ 程度という比較的大きな変形まで成立する。

($F/(ER_0^2) = f$, $Y/R_0 = y$ という表記を用いることにして) フッティング関数として $f(y) = (16/9)y^{3/2} (a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4)$ を仮定し、静的圧縮実験に用いた全ての試料からのデータに対して、多項式フィットを行うことで a_0 から a_4 の係数を決めたものである。このときの値は、 $a_0 = 1.22$, $a_1 = -7.66$, $a_2 = 62.08$, $a_3 = -169.84$, $a_4 = 162.70$ であった。

3.2 衝突実験

図 4 はゲル球の衝突過程の高速度ビデオカメラによる記録画像である。(a) は、本研究において最も変形が小さい条件、(b) は比較的大きな変形条件での衝突過程である。(a) においてでさえ、変形はゲル球全体に及んでいることがわかる。また、(b) のような速い衝突では、最大変形時のゲルは、薄いパンケーキ状である。一方、跳ね返りの瞬間には、鉛直方向に大きく引き伸ばされている。かつ、そのときの形状は、底部は尖っているのに対して頭部は丸みを帯びており、基板と平行な面に関して非対称なものとなっている。図 5 は、図 4 において示されている水平方向の最大サイズ R_m と衝突速度 V_i との関係を示している。(ただし、それぞれ半径 R_0 と特徴的速度 $V_c = \sqrt{E/\rho}$ でスケールされている。) 異なる試料からのデータが全て一本の直線上に重なっている。図 6(a) は、各試料における τ_m と V_i との関係を示す。 τ_m は、衝突後ゲル球の横方向のサイズが最大になる時刻 (接触開始を時刻 $t=0$ として、そこから測って) として定義し、衝突過程の記録画像から決めた。また、図 6(b) は、接触時間 τ_f と V_i との関係である。

τ_m と τ_f のデータを、ヘルツ理論の場合 (即ち微小変形の場合) に倣って、特徴的速度スケール V_c 及び特徴的時間スケール $\tau_c = R_0/V_c$ を用いて無次元化した量の間関係として示したのが、図 7(a) と図 7(b) である。この無次元化によって、それぞれのデータは、一本のマスターカーブに乗ることがわかる (図 7(b) の高速側ではデータ点の散

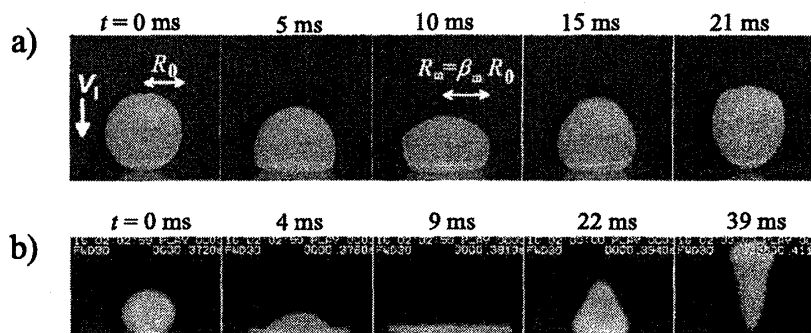


図 4: 衝突過程の例。(a)A10B30 ゲル、 $V_i/V_c = 0.24$ ($V_i = 1.9$ m/s) での衝突過程。(b)A10B4 ゲル、 $V_i/V_c = 1.77$ ($V_i = 6.1$ m/s) での衝突過程。最大変形は、接触中にゲルの横方向のサイズ変化が最大となる状態として定義した。また、そのときの横方向の伸長率を β_m とする。

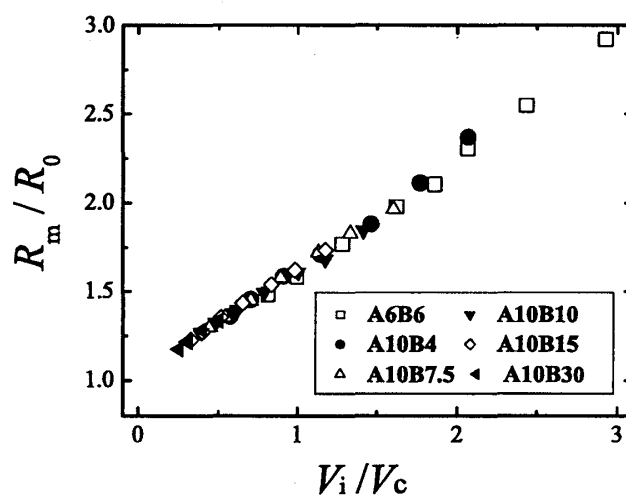


図 5: 図 4 に示された R_m と衝突速度 V_i の関係の無次元化プロット。異なる試料ゲルからのデータは非常によく一本の直線に重なる。

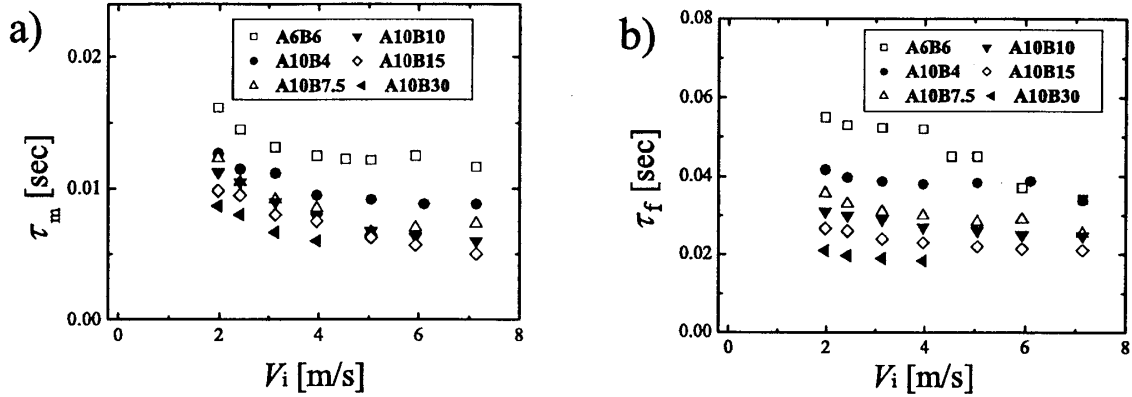


図 6: (a): 衝突速度 V_i と変形時間 τ_m の関係。 τ_m は、衝突後ゲル球の横方向のサイズが最大になる時刻（接触開始を時刻 $t=0$ として）として定義し、衝突過程の記録画像から決めた。(b): 衝突速度 V_i と接触時間 τ_f の関係。

乱が大きい、これについては下に述べる)。ただし、このマスターカーブは、ヘルツ理論の予測とは異なった振舞いを示す： τ_m の実験結果を示すデータ点（列）は、ヘルツ理論が予測する曲線（図 7(a) 中で ‘Hertz’ と記されている）より下側にある、即ち、ある V_i/V_c の値に対して、ヘルツ理論の予想より小さな τ_m/τ_c を与えている。一方、 τ_f の実験結果を示すデータ点列は、（すくなくとも、データの乱れが始まる $V_i/V_c = 1.5$ 程度までは、）ヘルツ理論が予測する曲線より上側に存在する。このこと（端的に云うと、 τ_m と τ_f の比が $1/2$ から大きくずれていること）は、大変形を伴う衝突では、接触過程の前半（接触開始から最大変形まで）と後半（最大変形から跳ね返りまで）が、非常に非対称であることに由来している。

さらにグラフを詳細に観察すると、以下の点が明らかになる。変形時間 τ_m については、 V_i/V_c が小さな領域（ ≈ 0.3 ）では、実験値はヘルツの予想に近いが、 V_i/V_c が増加するにしたがってヘルツ理論の予測より早く減少し（ $V_i/V_c = 1$ 程度まで）、さらに V_i/V_c が大きい領域では、ほぼ一定値となる（高衝突速度側におけるプラトー域の存在）。一方、接触時間 τ_f に関しては、 V_i/V_c が小さな領域（ ≈ 0.3 ）においてヘルツ理論の予測値と近いことは、 τ_m と同様だが、 $V_i/V_c \approx 1$ 程度で、実験データは一度プラトー域に達し、その後さらに V_i/V_c が大きい条件において、データの乱れが生じているように見える。図 7(b) において乱れたデータ点に対応する衝突過程では全て、跳ね返り直前にゲルと基板の界面付近に特徴的な現象が生じる。例えば図 7(b) の右側の挿入画像と、その図の真ん中、あるいは、図 4(b) の右側の画像とを比較すると、図 7(b) の右側の画像では、その底部に ‘脚’ が形成されていることがわかる。乱れたデータに対応する衝突では、いつもこのような構造が生じる。今の所、この脚の形成はゲル球の底部と基板との接着が原因であり、 τ_f の乱れについては、脚と基板との接着が上向きに運動しているゲル本体に引張られ、一気に剥がれることによると考えている。

図 8 は、異なる衝突速度における接触力 $F(t)$ の振舞いである。遅い衝突 ((a); $V_i/V_c = 0.26$) では、 $F(t)$ は一つのピークをもつ関数であるが、中間的な衝突速度 ((b); $V_i/V_c = 0.88$) では、最初の大きなピークの後に小さな二つ目のピークが現れている。衝突中にゲルが著しく扁平化するような速い衝突 ((c); $V_i/V_c = 2.5$) では、 $F(t)$ は完全に二つ

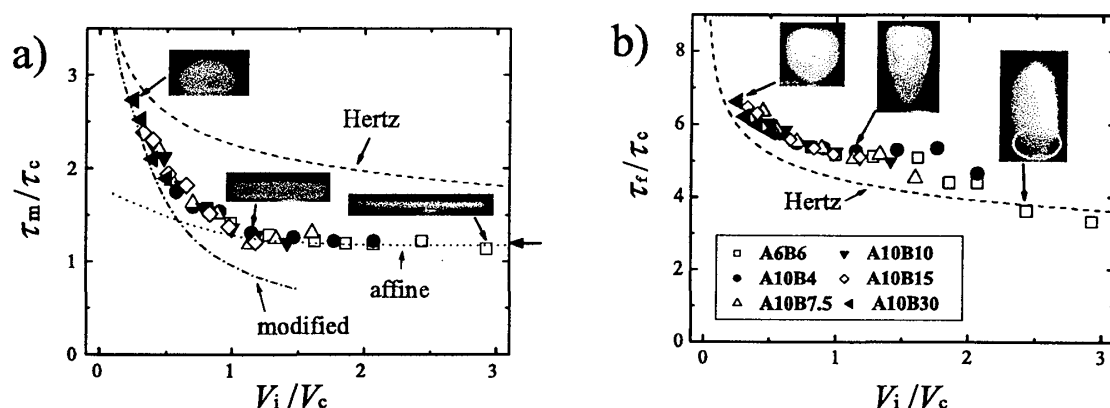


図 7: (a): V_i/V_c と τ_m/τ_c の関係。また、ヘルツ理論から定まる曲線、及び、後で導入する 2 種のモデルが予想する曲線も合わせて示した。プロットに用いたシンボルは図 6(a) におけるものと同一である。挿入した 3 枚の写真は、それらが指すデータ点对应する最大変形時のゲルの形状である。 V_c と τ_c によってスケールすることにより、図 6(a) の全てのデータは一つのマスターカーブに重なる。 V_i/V_c が大きな領域では、 τ_m/τ_c は殆ど一定値である。(b): V_i/V_c と τ_f/τ_c の関係。また、ヘルツ理論から定まる曲線、及び、第 4 章で導入する 2 種のモデルが予想する曲線も合わせて示した。挿入した 3 枚の写真は、それらが指すデータ点对应する跳ね返りの瞬間におけるゲルの形状である。 V_i/V_c が大きい領域において、データの重なりが著しく悪くなっている。これは、大変形において、ゲル球と基板との接着が起きることによると思われる。

の山に別れ、その間の時間領域では、 $F(t)$ はほぼ 0 になる。

図 9 には、接触力のピーク値 F_m と衝突速度 V_i との関係を示すデータの無次元化プロットである。($F(t)$ に二つのピークが現れる条件では、二回目のピークでの値も示してある)。この場合も、大きな変形にも関わらず、特徴的な量 V_c と F_c でスケールすることによって、全てのデータが共通のマスターカーブに重なることがわかる。‘Hertz’ と記された曲線は、式 (19) に示したヘルツ理論の予測である。 $F(t)$ が一つのピークしか持たない V_i/V_c が小さい領域では、実験データはヘルツ理論と一致している。しかし、 $F(t)$ に二つ目のピークが現れる V_i/V_c が大きな領域では、接触力の最大値（即ち、一つ目のピークに対応する F_m ）の実験データは、ヘルツ理論の予想より大きくなる。この振舞いは、次の章で導入するモデルの予想とよく一致している。

図 10 は、跳ね返り係数 e と無次元化衝突速度の関係を示す。この e についても、全ての試料からのデータは、一本のマスターカーブ上に重なっている。また、 V_i/V_c が 2 程度以上の領域では、 e は一定値に漸近しているように見える。

3.3 要約

球状ゲルの衝突に関する実験結果のうち、特に特徴的な点を列挙すると：E0) 線形弾性論の前提から逸脱する大きな変形が生じているにもかかわらず、接触時間や変形の大きさ、最大接触力、あるいは跳ね返り係数、といった衝突を特徴付ける量が、線形領域で測定した弾性率 E 、系のサイズ R_0 及び密度 ρ から構成される物理量でよくスケールされる。E1) 衝突中における水平方向の最大サイズ R_m は、衝突速度に対して線形に増加する。E2) 変形時間 τ_m を衝突速度を増加させながら観察すると、中間的な衝突速

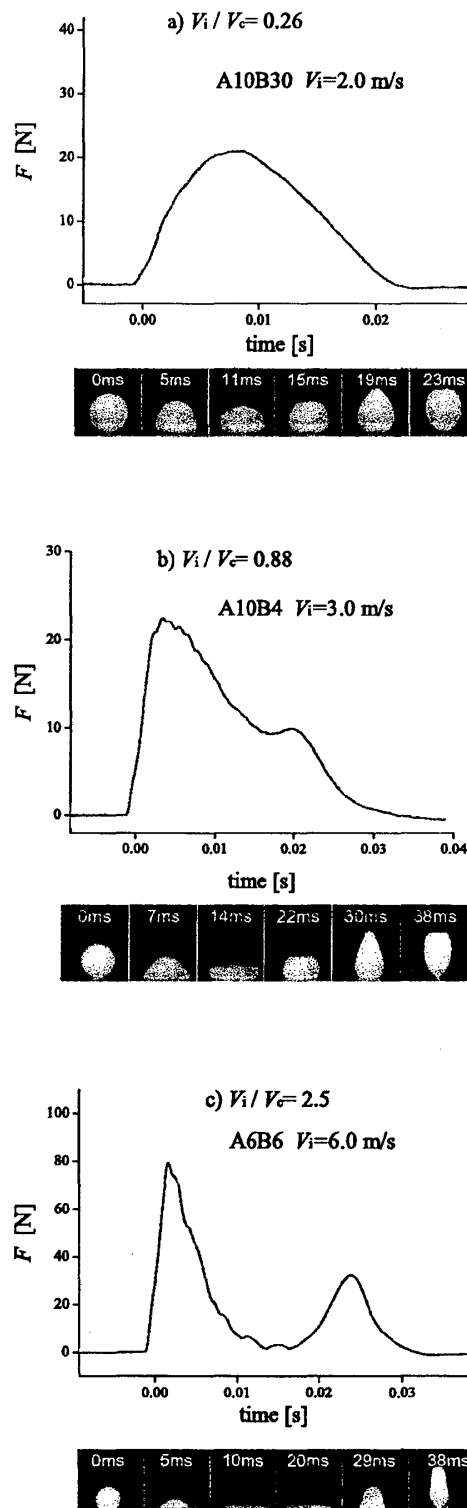


図 8: 接触力の時間変化 $F(t)$ 、及び、対応する衝突での変形過程。大きな衝突速度では、 $F(t)$ が二つのピークをもつ関数となる。

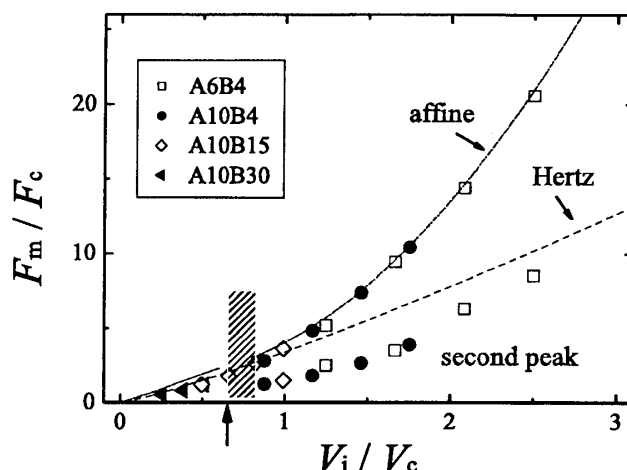


図 9: 接触力のピーク値 F_m の振舞い。ヘルツ理論、および、アフィンモデルの予想もあわせて示した。

度域においてヘルツ理論の予測より急激に減少し、さらに衝突速度が大きくなると τ_m が衝突速度に依らないプラトー域に入る。E3) 接触時間 τ_f の実験値は、ヘルツ理論の予測より大きな値を持つ。E4) 大きな衝突速度において、接触力 $F(t)$ に二つのピークが生じ、また、接触力の最大値 F_m は、ヘルツ理論の予測より大きくなる。E5) 跳ね返り係数 e に関しても、 V_i/V_c を変数としてプロットすると、異なるゲルからのデータが一本のマスターカーブに重なる。特に、大きな衝突速度では、 e が衝突速度にほとんど依存しないプラトー的な領域が存在する。

4 理論的扱い

上にまとめたように、ゲルの衝突では、通常のヘルツ理論では説明できない実験結果が得られた。このような場合の取り扱いとしては、まず、図 2 に示した考え方はそのままにして、非線形バネのポテンシャルを、純粋なヘルツ理論によるものから、静的圧縮実験の結果より定めたものに取り替える、ことが考えられる（次節参照）。さらに V_i/V_c が大きく、扁平に変形したゲルに関しては、ヘルツ理論におけるような‘球体の底部の凹み’、ではなく、‘球全体の水平方向の広がり’を第一義的な変形のモードとみることが適切であろう。以下では、この二つの視点に基づき、3 章の実験結果、特に、変形時間 τ_m や接触力 $F(t)$ の振舞い、を現象論的に取り扱う。特に、後者の大変形領域に関しては、まず変形の大きな極限を考察し、そこにおいて成り立つスケーリング則を提示することによって、大変形衝突の本質的な特徴を明らかにする。さらに、このスケーリング則導出のアイデアを具現化した、簡単な解析モデルを提案し、その振舞いを論じる。

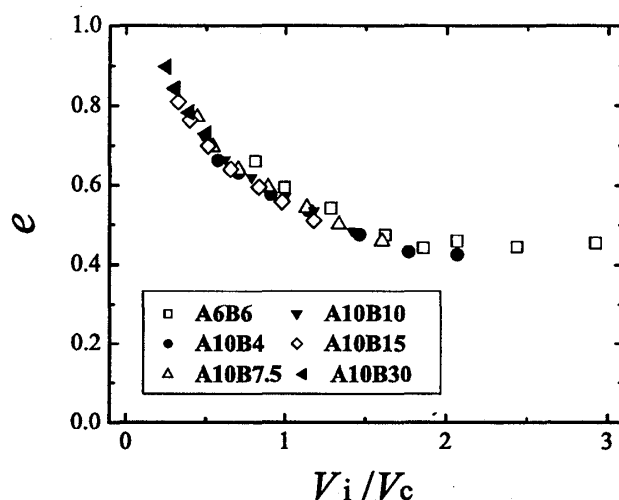


図 10: 跳ね返り係数 e と無次元化衝突速度 V_i/V_c の関係。この e についても、各試料ゲルのデータが、非常によく一本のマスターカーブに乗る。また、 e は、 V_i/V_c が大きな領域において一定値に漸近するように見える。

4.1 実験式によるヘルツモデルの修正

図 2 に示した非線形バネ-質点モデルの質点 M の運動式 $M \frac{d^2 Y}{dt^2} = F(Y)$ において、接触力 $F(Y)$ を純粋なヘルツタイプではなく、静的圧縮実験の結果から実験的に定めたものに取り替える。これを無次元化された量のみで書き換ええるため、 $F \rightarrow f \equiv F/ER_0^2$ 、 $Y \rightarrow y \equiv Y/R_0$ 、 $t \rightarrow s \equiv t/\tau_c$ で定義される変数変換を行うと $y'' = \frac{3}{4\pi} f(y)$ を得る。ただし、この「 $'$ 」は無次元化された時間 s に関する微分を表すものとする。 $f(y)$ は先に述べたように

$$f(y) = (4/3)^2 y^{3/2} (1.22 - 7.66y + 62.08y^2 - 169.84y^3 + 162.7y^4) \quad (20)$$

と近似される。初期条件は $y(0) = 0$ と $y'(s=0) = V_i/V_c$ である。図 7(a) に ‘modified’ と記した線は $y(s)$ の数値解から決めた、変形時間と接触時間の振舞いである。 $(y$ が原点に最初に回帰する (無次元化) 時刻を接触時間とし、それを 2 で割ることで変形時間を求めた。) 中間領域での τ_m の実験データの振舞い (即ち、ヘルツ理論の予測より急激な減少) をある程度再現している。

4.2 大変形領域

4.2.1 スケーリング解析

大きな (無次元化) 衝突速度 V_i/V_c では、最大変形時において、ゲル球は著しく扁平化する。ゲルの各部分の運動が鉛直方向から水平方向に転換した結果である。この場合、式 (4) の Y_m に代わって、図 4 に示した横方向のサイズ変化 $R_m = \beta_m R_0$ を特徴的な長さスケールにとるのが適切だと考えられる。このような領域の衝突の本質的な点

を議論するため、 V_i/V_c が大きな極限、即ち、変形 R_m が大きな（正確には $R_0 \ll R_m$ という意味での）極限を考察する。

この場合、式(4)に代わって、次式を要請する。

$$\tau_m \cong R_m/V_i \quad (21)$$

この R_m を、ヘルツ理論の場合に倣って、エネルギー保存から決める。大変形の極限では、扁平化したゲル球の変形を、一様なものだと見なしてもいいだろう。これは、ゲルの形状を、横方向の半径 $\beta_m R_0$ の回転楕円体で近似することに相当する。この場合のエネルギー保存は、ゲルの変形エネルギーとして理想ゴムタイプ¹ のものを採用すると、式(5)にかわって以下ようになる。

$$\begin{aligned} \rho R_0^3 V_i^2 &\cong E R_0^3 (\alpha_m^2 + 2\beta_m^2 - 3) \\ &\approx E R_0^3 \beta_m^2 = E R_0 R_m^2, \end{aligned} \quad (22)$$

ただし、 α_m ($\ll \beta_m$) は、想定している楕円体の縦方向の伸長率であり、非圧縮条件 $\alpha_m \beta_m^2 = 1$ を満たす（記号 α 、 β の意味については図 11 参照）。これより、

$$R_m \cong \sqrt{\frac{\rho}{E}} R_0 V_i \quad (23)$$

が得られ、これを式(21)に代入すると

$$\tau_m \cong \sqrt{\frac{\rho}{E}} R_0 \quad (24)$$

となる。以上の議論から、最大変形時の横方向のサイズと衝突速度が比例すること、そして、大変形領域では、 τ_m は V_i によらない一定値になることが帰結される。このような振舞いは、この実験の衝突速度範囲において、すでに見出されている（E1）及び（E2）。

4.2.2 アフィン変形モデル

前節では、変形の大きな領域におけるゲル球の衝突挙動をスケーリングの観点から論じた。大変形の極限では、ゲルの変形を一様なものとしてとり扱うことができ、それを利用して得られたスケーリング則は、変形が大きい領域での衝突挙動を定性的に説明した。ここでは、この変形の一様性をそれ自身の性質として持っているモデルを考察する。これによって大変形領域の衝突挙動、特に、 τ_m や接触力 F_m の振舞いが定量的に説明される。

このモデルでは、基板との接触後、(i) ゲル球が（鉛直軸に関する）軸対称性を保ったままアフィンの変形すると仮定する（図 11）。さらに、(ii) ゲルの変形エネルギーとして理想ゴムタイプのものを採用する。仮定 (i) によって、ゲルの変形や運動は鉛直方

¹例えば、体積 L^3 の立方体が、一様に変形して、各辺の長さが αL 、 βL 、 γL の直方体になる時の変形エネルギーが、 $\{\text{体積 } L^3\} \times \{\text{線形領域での弾性率 } E\} \times \{\text{各方向の伸長率の2乗の和 } \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\}$ に比例する。詳しくは、例えば [21]

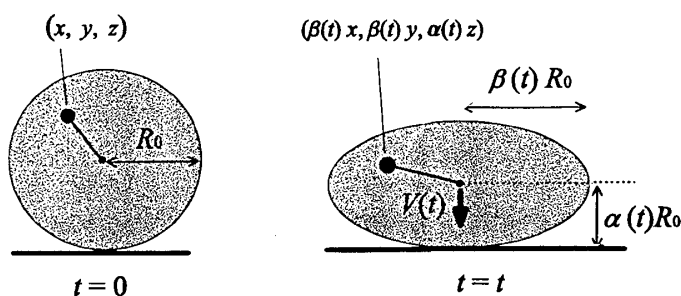


図 11: アフィン変形モデルの説明。衝突後、ゲル球の外形は伸長比 $\alpha(t)$ 、及び、 $\beta(t)$ で特徴付けられる回転楕円体になる。また、内部もそれと相似的に変形する。

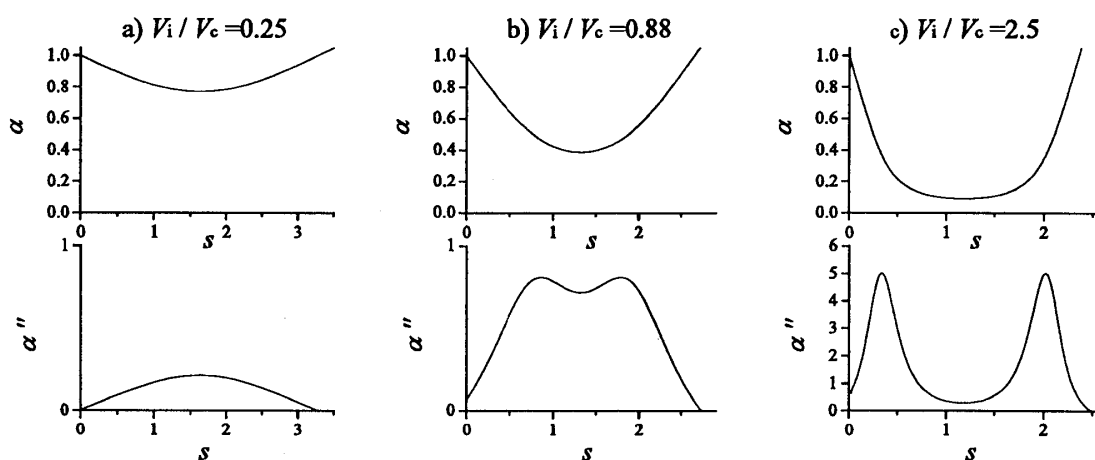


図 12: アフィンモデルにおける $\alpha(s)$ 及び $\alpha''(s)$ の振舞い。 $\alpha''(s)$ は、接触力に比例する量であり、衝突速度が増加すると、これが二つのピークを持つ関数となる。この振舞いは実験と対応している。

向の伸長率 $\alpha(t)$ と水平方向の伸長率 $\beta(t)$ によって特徴付けられる：ゲル球の中心（重心）の速度 $V(t)$ は $R_0 \dot{\alpha}(t)$ で与えられ、また、図 11 に示したように、接触開始である時刻 $t=0$ において、球の中心から (x, y, z) という相対位置にあった物質点は、時刻 t において、中心から見て $(\beta(t)x, \beta(t)y, \alpha(t)z)$ という位置に動く（ここで (x, y, z) は、変形前のゲル球の各部につけた（相対）Lagrange 座標である）。よって、この物質点の（相対）速度 $\vec{u}$ は、 $(\dot{\beta}(t)x, \dot{\beta}(t)y, \dot{\alpha}(t)z)$ で与えられる。

このモデルの支配方程式を得るために、この系のラグランジアン $L = K - U$ を構成する。運動エネルギー K は、重心の並進による部分 K_t と、重心に対して相対的な内部運動（歪）による部分 K_r の和である。 K_t は、 $K_t = (1/2) M V(t)^2 = (1/2) M (R_0 \dot{\alpha}(t))^2$ である。ここで、 M はゲル球の質量である。 K_r は以下のように簡単な積分で得られる： $K_r = \int_V \frac{\rho}{2} |\vec{u}|^2 dx dy dz = \frac{\rho}{2} \int (\dot{\alpha}^2 z^2 + \dot{\beta}^2 x^2 + \dot{\beta}^2 y^2) = \frac{1}{2} \left(\frac{M}{5} \right) R_0^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{2M}{5} \right) R_0^2 \dot{\beta}^2$ 。よって、全運動エネルギー $K = K_t + K_r$ は、次のようになる。

$$K = \frac{1}{2} m_\alpha R_0^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_\beta R_0^2 \dot{\beta}^2. \quad (25)$$

ここで、縦方向と横方向の“有効質量”を次のように導入した。

$$m_\alpha \equiv \frac{6M}{5}, \quad m_\beta \equiv \frac{2M}{5}. \quad (26)$$

ポテンシャルエネルギー U については、上の仮定 (ii) より、

$$U = \frac{1}{2} \frac{E}{3} \frac{M}{\rho} (\alpha^2 + 2\beta^2 - 3). \quad (27)$$

ここで、 M/ρ は球状ゲルの体積であり、因子 $E/3$ は、上式が微少変形の極限において線形弾性論の歪エネルギーに一致するという要請から生じる [21]。(25) と (27) から、このモデルのラグランジアンは

$$L = \left(\frac{m_\alpha R_0^2}{2} \dot{\alpha}^2 + \frac{m_\beta R_0^2}{2} \dot{\beta}^2 \right) - \frac{EM}{2 \cdot 3\rho} (\alpha^2 + 2\beta^2 - 3) \quad (28)$$

であり、これに非圧縮条件が加わる。

$$\alpha(t)\beta(t)^2 = 1. \quad (29)$$

式の上からは、この系を次のように特徴づけることが出来る： 各々異なった質量およびバネ係数をもつ調和振動子の自由度 α 、 β からなる系であり、かつ、それらの間には式 (29) で表される拘束が課せられている。

非圧縮条件から β 及び $\dot{\beta}$ を消去しオイラーラグランジュの式 $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \alpha} \right) = 0$ を適用すると、 α の発展方程式が得られる。

$$\left(1 + \frac{1}{12\alpha^3} \right) \ddot{\alpha} - \frac{\dot{\alpha}^2}{8\alpha^4} + \frac{5E}{18\rho R_0^2} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha^2} \right) = 0 \quad (30)$$

また、初期条件は以下である。

$$\alpha(t=0) = 1 \quad \text{and} \quad \dot{\alpha}(t=0) = \sqrt{\frac{10}{13}} \frac{V_i}{R_0}. \quad (31)$$

二つ目の式は、基板との接触が開始する時刻 $t=0$ におけるエネルギー保存の条件、即ち、 $(1/2) \times M V_i^2 = K(t=0)$ に由来する。

先に導入した特長的な速さスケール $V_c \equiv \sqrt{E/\rho}$ と時間スケール $\tau_c \equiv R_0/V_c$ を用いて、式 (30) と式 (31) を無次元化すると、発展方程式は以下ようになる。

$$\alpha'' - \frac{3}{2\alpha(12\alpha^3 + 1)} \alpha'^2 + \frac{10k(\alpha^4 - \alpha)}{12\alpha^3 + 1} = 0, \quad (32)$$

$$\alpha(0) = 1 \quad \text{and} \quad \alpha'_0 = \sqrt{\frac{10}{13}} \frac{V_i}{V_c} \quad (33)$$

ここでプライム記号「'」は、スケールされた時間 $s = t/\tau_c$ に関する微分を表す。

図 12 は、異なる初期条件（衝突速度）における式 (32)、式 (33) の数値解から決めた $\alpha(s)$ と $\alpha''(s)$ の振舞いである。アフィンモデルにおいては、 α が極少に達する時刻、即ち、 β が最大に達するときの s の値が最大変形時間 τ_m/τ_c となる。図 7(a) において、‘affine’ と記されている曲線がこのモデルの予想である。衝突速度が大きい領域での τ_m のデータの特徴、即ち、プラトーの存在とその絶対値を、このモデルは非常によく再現する。

一方、 $\alpha''(s)$ は、接触力 F に比例する。なぜなら、図 11 に示したようにアフィンモデルでは、重心の鉛直方向の位置が $R_0\alpha$ で与えられるので、接触力 F は、 $MR_0\ddot{\alpha} = \frac{4\pi}{3}F_c\alpha''$ となるからである。図 12 に示した $\alpha''(s)$ の形状は時間 s について対称的であり、図 8 の $F(t)$ の形状とは異なっている。しかしながら、 $\alpha''(s)$ は、実験で得られた $F(t)$ の振舞いの本質的な特徴を捉えている。第一に、アフィンモデルは、 V_i/V_c を増加させると、接触力に二つのピークが生じることを予測する。特に、大きな衝突速度においては、 $\alpha''(s)$ が二つの山に分離し、その間では α'' の値が、ほぼ 0 となる；このような振舞いは、図 8(c) に示された接触力の振舞いと合致する。

図 9 において ‘affine’ と記された曲線は、アフィンモデルが予測する接触力のピーク値 F_m/F_c と V_i/V_c の関係である。モデルの予想は、大きな V_i/V_c における、一つ目のピークに対する F_m/F_c (即ち、接触力の最大値) の実験データと非常によく一致している。

4.3 要約

この章では、大変形領域での衝突を議論するため二つ取り扱いを提案した。一つは、中間的な衝突速度領域を対象としていて、ゲル球の運動量に関しては、ヘルツ理論と同じく重心の鉛直方向の速度のみを考慮し、ゲルが基板から受ける接触力は静的圧縮実験から定めた実験式を用いる、というものである。もう一つのアプローチは、大変形領域に対するものであり、接触開始後のゲル球について、水平方向への広がり为主要な変形モードだと捉え、ゲル全体が一様に変形しているとする。このような近似の元に、スケーリング的な議論と、それを具現化した簡単な解析モデル (アフィン変形モデル) の提案を行った。3 章の要約で述べた τ_m の挙動 (E2)) については、上の二つの取り扱いによって定量的に理解することができた。また、最大接触力 F_m の振舞い (E4)) に関しても、アフィンモデルが定量的な予測を与えた。

5 考察

・衝突の過程の非対称性

図 4 に見られるように、実際のゲル球の変形過程は時間的・空間的に非常に非対称的である。 α という一自由度しか持たないアフィン変形モデルでは、このような非対称性は、取り扱うことが出来ない。非対称性に関しては、モデルを拡張してとり扱うことには現在のところ成功していないが、直感的には次のように “表現する” (“説明する” とは云い難いが) ことが出来る。時刻 $t = \tau_m$ において、パンケーキ状になったゲル球を考える。この各部分は、中心方向引かれており、 $t = \tau_m$ 以降、ゲル球は横方向のサイズを減じ、同時に縦方向のサイズを回復する。この過程で、境界条件の非対称性 (パンケーキの上面は自由表面、底面は基板に接している) のため、パンケーキの中心が盛り上がるような変形が生じる。一旦こうした変形が生じると、さらに横方向の収縮が進行するとともに、それは拡大される。この過程では、球の頂点近くの部位は縦方向に強く加速される一方、底部付近は殆ど動かない、という速度の非一様性 (或いは、内部モード) が誘起される。

・アフィン変形モデルの初期条件の不定性について

まず、モデルにおける初期条件の決め方に関する問題を述べる。このモデルには初速度 $\dot{\alpha}$ の決め方（実際の衝突速度との対応づけの仕方）に関して不定性が存在する。4章で行ったように、運動エネルギーの連続性を要請すると、時刻 $t = 0$ において、ゲル球の重心速度の不連続が生じる ($R_0 \dot{\alpha}(t = 0) = \sqrt{\frac{10}{13}} V_i \neq V_i$ 、式 (31) 参照)。一方、 $t = 0$ における重心速度の連続性を要請すると、 $t = 0$ での、エネルギー保存を満たさなくなる。しかし、このことは、このモデルが修正ヘルツモデルと相まって τ_m の挙動を説明するという意味では、本質的な欠点ではない。なぜなら、このモデルは本来衝突速度が十分大きく、変形が系全体に及んでいる状況を想定して作られたものであり、そこでは、このモデルは初期速度に依らない τ_m を予想するからである。（初速度の選び方の影響は、 V_i/V_c が小さい領域において現れるが、ここでは、修正ヘルツモデルに役割を譲っている。）

・ τ_m のプラトー値の直接評価

図 7(a) に示したように、アフィン変形モデルでは、大きな衝突速度において τ_m にプラトー域が存在する。（このプラトーでの τ_m の値は、実験値によく合致していた。）アフィン変形モデルのこの振舞い（プラトー域の存在とその値）は、式 (28) から以下のように直接知ることができる。衝突速度が大きい極限では、衝突後のゲル球は直ちに $\alpha \ll \beta$ を達成し、 τ_m の値は、それ以降の運動に支配される。このとき、 $\alpha = \beta^{-2} \ll \beta$ 及び $\dot{\alpha} = -2\beta^{-3}\dot{\beta} \ll \dot{\beta}$ に注意すると、近似的に（あるいは $V_i \rightarrow \infty$ に関する漸近則を得るという意味において）、式 (28) の中の α 及び $\dot{\alpha}$ に関する項を落とすことが出来る。結果として、式 (28) は普通の（1 自由度の）調和振動子のラグランジアンに還元される。 τ_m はこの振動子の固有周期の 1/4 倍に対応する。実際にこれを評価すると $\tau_m/\tau_c = (\pi/2) \times \sqrt{3/5}$ となる。この値は、図 7(a) の右側に太い矢印で示されているようにプラトーの値となっている。

・接触力の二つのピークについて

大きな衝突速度において、接触力 $F(t)$ に二つのピークが生じた。このような振舞いは、図 2 に示したバネ-質点モデルの描像からは理解できない。二つのピークが、衝突中のゲルの大変形と直接関連していることを説明する。上で述べたように、大きな衝突速度では、ゲル球が扁平化し、水平方向への広がり（最大変形に達した後の）収縮が、主要な運動のモードとなる期間が存在する（図 12(c) において、 $\alpha(s)$ の平らな底がこの期間に対応している）。この期間では、重心の位置は、基板の近傍に停滞し、その速度、及び、加速度（これは接触力に比例する）は小さくなる。即ち、最大変形の前において、接触力は非常に小さい。これに対して、重心の（縦方向の）加速度が大きくなるのは、衝突直後に、ゲルの各部分の縦方向の速度が水平方向に変換される時と、最大変形の後、水平方向の速度が縦方向に戻る時である。これが、 $F(t)$ に生じる二つのピークの原因である。

6 まとめ

本研究では、ゲルに特有な弾性的大変形を伴う衝突において、i) 変形時間 τ_m が衝突速度 V_i に依存しなくなる、ii) 接触力 $F(t)$ が2つのピークを持ち最大変形で殆ど0になる、という二つの特徴的な振舞いが実験的に見出された。考察の最後で述べたように、 τ_m の漸近値は、水平方向の変形を記述するモード β だけに関する有効ラグランジアンによって直接的に理解できるし、また、 $F(t)$ の二つのピークについても、初期の運動エネルギーが、水平方向の運動に関する運動エネルギーに一旦変換することの当然の帰結であった。大変形を伴う衝突では、衝突速度と垂直な方向への変形が本質的な役割をはたしている。

一方、衝突過程の時間的・空間的な非対称性やこれと直接関わる τ_f や跳ね返り係数 e の振舞い（例えば、E5) に述べた e の漸近値の意味など）を理解するには、衝突中のゲルの変形に関するより詳細な考察・モデル化が必要となる。こうした点については、未解決な問題として残されている。

共同研究者であるお茶の水女子大の奥村剛氏、色々な面で研究をサポートしていただいた中央大学松下研究室のメンバー、特に松下貢氏、山崎義弘氏（現早稲田大学）、小林奈央樹氏（現食総研）、また、この解説を書く機会を与えてくださった東北大学の川勝年洋氏、内田就也氏に感謝いたします。本研究の多くの部分は、中央大学理工学研究所の助成（2003年度から2004年度）のもとに遂行され、また一部は、北海道大学理学研究科長田一グン研究室の設備を用いて行われたものです。関係各位に改めて感謝いたします。本稿の内容は、原著論文 [14, 15, 16, 17] に基いています。

参考文献

- [1] Hertz H., *J. Reine Angew. Math.* **92**, 156(1882)
- [2] Goldsmith W., *Impact*, Arnold, London, 1960.
- [3] Kuwabara, G. and Kono K., *Jpn. J. Appl. Phys.*, **26**, 1230(1987).
- [4] Stronge W. J., *Impact Mechanics*, Cambridge Univ Press, 2000.
- [5] Labous L., Rosato A. D. and Dave R. N., *Phys. Rev. E*, **56**, 5717(1997).
- [6] Gerl F. and Zippelius A., *Phys. Rev. E*, **59**, 2361(1999).
- [7] Hayakawa H. and Kuninaka H., *Chem. Eng. Sci.*, **157**, 239(2002).
- [8] 早川 尚男, 散逸粒子系の力学, 岩波書店, 2003.
- [9] Daraio C., Nesterenko V. F., Herbold E. B. and Jin S., *Phys. Rev. E*, **72**, 016603 (2005).

- [10] Richard D., Clanet C. and Quéré D., *Nature* (London), **417** 811 (2002).
- [11] Okumura K., Clanet C, Richard D. and Quéré D., *Europhys. Lett.*, **62** (2003).
- [12] C. Clanet C., Hersen H. and Bocquet L., *Nature* **427**, 29 (2004).
- [13] Nagahiro S. and Hayakawa Y., *Phys. Rev. Lett.*, **94**, 174501(2005).
- [14] Tanaka Y., Yamazaki Y. and Okumura K., *Europhysic Lett.*, **63**, 149 (2003).
- [15] 田中良巳, 小林奈央樹, 山崎義弘, 奥村剛, 松下貢中央大学理工学研究所 論文
集 第9号 / 2003.
- [16] Tanaka Y., *The European Physical Journal E*, **18**, 95 (2005).
- [17] Tanaka Y., Submitted.
- [18] de Gennes P. G., *Europhys. Lett.*, **35** (1996) 145.
- [19] Landau L. D. and Lifshitz E. M., *Theory of Elasticity*, Pengamon Press, 1960.
- [20] Johnson K. L., *Contact mechanics*, Cambridge Univ. Press, 1985.
- [21] Strobl G. R., *The physics of polymers*, Springer Verlag, Berlin, 1997; 深尾浩次, 宮
本嘉久, 宮地英紀, 林久夫訳, 高分子の物理, シュプリンガー東京, 1998.