

定数係数偏微分方程式に 対する Liouville Type の定理.

東大理 村岡 実

§ 1. 序

同数論でよく知られた Liouville の定理は, Real Analysis
の立場からは次の様にとらえられる.

方程式: $(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y})u(x,y) = 0$ in $\mathbb{R}^2$
の解として,

$$u(x,y) = o(1) \quad \text{as } \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty$$

なるものは恒等的に 0 でなければならぬ.

ここで微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$ に対応する特性多項式
 $P(\xi) = i\xi_1 - \xi_2$ の実零点が原点のみであることに
注意しよう.

一方、 $\Delta + 1$ の特性多項式 $-(\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2) + 1$
の実零点は $(n-1)$ dim manifold をなす.

$(\Delta + 1)u = 0$ in $\mathbb{R}^n$ の解:

$$u(x) = \int_{S^{n-1}} e^{ix \cdot \omega} d\omega = \int e^{ix_1 \omega_n} d\omega$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n!}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}} \cdot J_{\frac{n-2}{2}}(x) \\
&= \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\left(\frac{n!}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}} \cos\left(x - (n-1) \cdot \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{n+1}{2}}\right) \quad \text{as } x \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

は、 $x \rightarrow \infty$ のとき $|x|^{-\frac{n+1}{2}}$ の order で一様に減衰することには注意すれば、次の命題が予測できるとはなるだろうか、すなわち。

方程式： $P(D)u = 0$ in $\mathbb{R}^n$

の解が $x \rightarrow \infty$ のとき、どの程度まで減衰するのかは、 $P(\xi)$ の 実零点 の幾何学的性質によって決定される。

我々は §2 において、この問題の部分的解答を与える。ここでは考える領域を全空間から外部領域に変えたとき、事情はどのように変わるかを見る。この時、実零点が $(n-1)$ dim manifold をなす $\Delta+1$ については全空間の場合と同じく、 $O\left(|x|^{-\frac{n+1}{2}}\right)$ 以上の減衰を示す解は現われないが、実零点が退化した Δ , $\overline{\Delta}$, $\Delta+i$, 等の場合、非常に速い減衰を示す解が現われるのが特徴的である。

記号 $P(D)$: 定数係数偏微分作用素, $D = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x}$, $P(\xi)$ は const

$$V(P) = \{ \xi \in \mathbb{R}^n ; P(\xi) = 0 \}$$

Ω : $\mathbb{R}^n$ の外部領域 (i.e. 連結開集合 τ , Ω^c が有界)

$u(x) \in L'_{loc}(\Omega)$ が distribution sense τ で方程式

$$P(D)u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{とみなすとす,}$$

" $P(D)u = 0$ in Ω " と略記する。

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}u = (2\pi)^{-n} \int u(x) e^{-ix\xi} dx \quad \text{in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$$

§2. $\Omega = \mathbb{R}^n$ の場合.

次の状況を設定する。

$$V(P) = \bigcup_{j=0}^{n-1} M^j, \quad M^i \cap M^j = \text{finite set} \quad (i \neq j)$$

M^j は j -dim manifold or 空集合

$P(\xi)$ は M^j ($j=1, \dots, n-1$) 上単純, すなわち,

- $\text{grad } P \neq 0 \quad \text{on } M^{n-1}$
- $\text{grad } \text{Re } P \neq \text{grad } \text{Im } P \quad \text{on } M^{n-2}$
- $\frac{\partial P}{\partial n_\mu}(\xi) = 0 \quad \mu=1, \dots, n-j$

$$\sum_{|\alpha|=2} \frac{\partial^2 P}{(\partial n)^\alpha}(\xi) \cdot \frac{y^\alpha}{\alpha!} \neq 0 \quad \text{for } \forall y \neq 0 \in \mathbb{R}^{n-j}$$

$$\text{on } M^j \quad (1 \leq j \leq n-3)$$

ここで $\{n_\mu\}_{\mu=1, \dots, n-j}$ は M^j の normal vector

(これはこの条件は regular point におけるのみならず)
 τ のもとで

この時 $V(P)$ により決まる数 $k \leq 0$ と, some K_δ を用いて次の評価が成り立つ.

定理 A $P(D)u = 0$ in $\mathbb{R}^n$

$$u(x) = O(|x|^p) \text{ for some } p, \text{ unif in } \mathbb{R}^n$$

$$u(x) = o(|x|^k) \text{ unif in some } K_\delta$$

$$\text{ならば } u \equiv 0$$

some K_δ の定義:

$$S^{n-1} \supset N \equiv \bigcup_{j=1}^{n-1} N(M^j) = \bigcup_{j=1}^{n-1} \bigcup_{\xi \in M^j} (T_\xi^+(M^j) - 0 / \mathbb{R}^+)$$

$$N_\delta = \{ \omega \in S^{n-1} ; \text{dis}(\omega, N) \leq \delta \}$$

$$K_\delta = \{ r\omega : \omega \in N_\delta, r \geq 0 \}$$

k の定義

$$k_{n-1} = \min_{\xi \in M^{n-1}} \{ \xi \text{ における } M^{n-1} \text{ の主曲率で } 0 \text{ でないものの個数} \}$$

$$k_j = \min_{\xi \in M^j} \min_{n \in T_\xi^+} \left\{ \xi \text{ における normal vector } n \text{ と, } T_\xi(M^j) \text{ の張る } (j+1) \text{ dim space } \mathcal{L} \text{ への } M^j \text{ の射影 } (M^j)_n \text{ を } \mathcal{L} \text{ の中の超曲面と考えたときの non-zero な主曲率の個数} \right\}, \quad 1 \leq j \leq n-2$$

$$k = \min \left\{ \frac{k_{n-1}}{2} - (n-1), \frac{k_{n-2}}{2} - (n-2), \frac{k_{n-3}}{2} - (n-3+1), \dots, \frac{k_j}{2} - (j+1), \dots, \frac{k_1}{2} - 2 \right\}$$

但し、 $\{ \}$ の中で意味のない項は 0 と読みかえらる。
 特に $V(P) = M^0 = \text{有限集合}$ の場合は $N = S^{n-1}$,
 $h = 0$ とする。

(定理の証明の方針) Littleman [4] と同様に、

$$P(D)v = w \in \mathcal{J}^{-1}(C_0^\infty) = \{ w \in \mathcal{S} : \hat{w} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \}$$

の解 $v(x) = \int e^{ix\xi} \hat{w}(\xi) / P(\xi) d\xi$ の $x \rightarrow \infty$ に
 おける漸近行動を調べる方法による。

例 1. $P(D) = \Delta + 1$, $(\Delta + 1)(\Delta + i)$

$$N = S^{n-1}, \quad h = -\frac{n-1}{2}$$

2. $P(D) = \square - 1$

$$N = \{ \omega \in S^{n-1}, |\omega_n| \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \}, \quad h = -\frac{n-1}{2}$$

3. $P(D) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} - \Delta$

$$N = S^{n-1}, \quad h = -\frac{n-1}{2}$$

4. $P(D) = \square$

$$N = \{ \omega \in S^{n-1}; |\omega_n| = \frac{1}{\sqrt{2}} \}, \quad h = -\frac{n}{2}$$

5. $P(\xi) = (\xi_1^2 + \xi_2^2 - 1) + i(\xi_3^2 + \xi_4^2)$

$$N = S^{n-1}, \quad h = \frac{1}{2} - (4-2) = -\frac{3}{2}$$

6. $P(\xi) = (\xi_2 + \xi_1)^2 + \sum_{j=3}^n \xi_j^2, \quad n \geq 4$

$$N = \{ \omega \in S^{n-1}; \omega_1 = \omega_2 \}, \quad h = -2$$

$$7. P(\xi) = (i\xi_1 - \xi_2)(1 - \xi_1^2 - \xi_2^2 - \xi_3^2)$$

$$N = S^{n-1}, \quad h = -1$$

$$8. P(\xi) = \text{homogeneous elliptic poly}, \quad i\xi_n + \xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2$$

$$N = S^{n-1}, \quad h = 0$$

注意 例 2, 3. τ は $\text{cone } K_\varepsilon$ を “ τ 分” に減らすことか
 τ を 3. するめさ.

$$\text{例 2'}. N_\varepsilon = \{ \omega_n \geq \frac{1}{\sqrt{2}} + \varepsilon \} \text{ or } \{ \omega_n \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} - \varepsilon \}$$

$$K_\varepsilon = \{ r\omega; \quad r \geq 0, \quad \omega \in N_\varepsilon \}$$

としたとき、

$$P(D)u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

$$(*) \quad u(x) = O(|x|^v) \quad \text{for some } v, \text{ unif in } \mathbb{R}^n$$

$$u(x) = o(|x|^{-\frac{n-1}{2}}) \quad \text{unif in each } \underline{K_\varepsilon}$$

$$\text{ならば } u \equiv 0$$

$$\text{例 3'}. N_\varepsilon = \{ \omega_n > \varepsilon \} \text{ or } \{ \omega_n < -\varepsilon \}$$

としたとき (*) が成立.

(詳しくは Littman [5] を参照せよ)

§ 3. $\Omega =$ 外部領域の場合.

定理 B.I i) $P(\xi)$ の各既約成分は $(n-1)$ dim manifold を

$$\text{な } L. \quad \text{grad } P \neq 0 \quad \text{on } V(P).$$

$$\min_{\xi \in V(P)} \{ \xi \text{ における } V(P) \text{ の non zero な主曲率の個数} \}$$

$$= k$$

ii) Ω^c が凸, 又は $P(\xi)$ が elliptic

なる仮定のもとで,

$$P(D)u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u(x) = O(|x|^{\nu}) \quad \text{for some } \nu, \text{ unif in } \Omega$$

$$u(x) = o(|x|^{\frac{k}{2} - (n-1)}) \quad \text{unif in } K_S \cap \Omega$$

$$\text{ならば } u \equiv 0 \quad \text{in } \Omega$$

定理 B. II i) $P(\xi)$ の各既約成分が全て実零点をもつ,

ii) Ω^c が凸, 又は $P(\xi)$ が elliptic

なる仮定のもとで,

$$P(D)u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$D^{\alpha}u \in L'_{loc}(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq m$$

$$D^{\alpha}u = O(|x|^{-\nu}) \quad \text{unif in } \Omega, \quad \forall |\alpha| \leq m$$

$$\text{ならば } u \equiv 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{ここで } m \text{ は 次の様な整数である.} \\ P(\xi) = \prod_{j=1}^m P_j(\xi) \text{ と素因数分解したとき} \\ m = \min_j \{ \deg P_j \} \end{array} \right)$$

定理 B. III ii) Ω^c が凸, 又は $P(z)$ が elliptic
なる仮定の下で.

$$P(D)u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u(x) = O(e^{-\nu|x|}) \quad \forall \nu, \text{ unif in } \mathbb{R}^n$$

$$\text{ならば } u \equiv 0 \quad \text{in } \Omega$$

(定理 BI ~ BIII の証明)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \text{find}$$

$$(\Omega^c)_\varepsilon = \{ x \in \mathbb{R}^n : \text{dis}(x, \Omega^c) \leq \varepsilon \}$$

$$\chi_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & x \notin (\Omega^c)_\varepsilon \\ 0 & x \in (\Omega^c)_{\varepsilon/2} \end{cases}$$

$$U_\varepsilon(x) = \begin{cases} \chi_\varepsilon \cdot u & , \text{ in } \Omega \\ 0 & , \text{ in } \Omega^c \end{cases}$$

とすると

$$U_\varepsilon \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n) \text{ が } \frac{1}{\varepsilon} \text{ 以下に } \forall \varepsilon > 0$$

⊙ $P(z)$ が elliptic ならば u の analyticity により

直ちに $u \equiv 0$. 従って,

Ω^c が凸 ならば.

$$\text{Convex hull}(\text{Supp } U_\varepsilon) = \text{Convex hull}(\text{Supp } P(D)U_\varepsilon)$$

$$\subset (\Omega^c)_\varepsilon, \quad \text{for } \forall \varepsilon$$

であるから, $u \equiv 0$.

$U_\varepsilon \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ の証明

(B. I) U_ε は u と全く同じ order の減衰を示すから, Littmann の定理 (補注参照) により $U_\varepsilon \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

(B. II) $U_\varepsilon(x) = O(|x|^{-\nu})$ in $\mathbb{R}^n$, $\forall \nu$
 であるから, Triebes [6] と全く同様の議論
 をすることにより $U_\varepsilon \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ が従う.

(B. III) $U_\varepsilon(x) = O(e^{-\nu|x|})$ in $\mathbb{R}^n$, $\forall \nu$
 であるから, $\hat{U}_\varepsilon(\xi)$ は entire function
 として $\mathbb{C}^n$ 全体に拡張され, しかも,

$P(\xi) \hat{U}_\varepsilon(\xi) = \hat{f}(\xi)$, $f = P(D)U_\varepsilon \in \mathcal{E}'$
 であるから, Malgrange の lemma により,
 $U_\varepsilon \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ が従う.

定理 B.I ~ B.III に対する若干の考察

1. $P(\xi)$ の素因数の中にも $\Delta + 4i$ の様な実零因子を有する
 (因子が存在すると B.I, B.II の結論はたゞち
 破れてしまふ). 例えは,

$$P(D) = (\Delta + 1)(\Delta + 4i)$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| > 1\}$$

$$v(x) = \int \frac{e^{ix\xi} \hat{w}(\xi)}{-|\xi|^2 + 4i} d\xi, \quad w \in C_0^\infty(|x| < 1)$$

40

$$u(x) = v|_{\Omega} \quad \text{とかけは、}$$

$$P(D)u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u(x) = O(e^{-|x|}) \quad \text{in } \Omega$$

ではあるが、 $u \neq 0$.

$$\left(\begin{array}{l} \text{全空間では、} \forall P(\xi) \text{ に対して、} \\ P(D)u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n, \quad u(x) = O(|x|^{-\frac{n+\varepsilon}{2}}) \quad \text{ならば } u \equiv 0 \\ \text{なることに注意せよ。} \end{array} \right)$$

2. 穴とあるといふ Perturbation に対して安定なのは、 $\text{codim } V(P) = 1$ なる時だけである。

例えば $\text{codim } V(P) = 2$ なる、 $P(\xi) = i\xi_1 - \xi_2$ in $\mathbb{R}^3$ と $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| > 1\}$ を考えよう。

$$p \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1)$$

$$u(x) = p(x_3) \cdot \left(\frac{1}{x_1 + ix_2} \right)^D \quad \text{in } \Omega$$

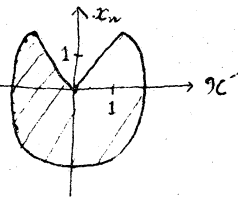
とすると

$$P(D)u = 0 \quad \text{in } \Omega$$

$$u(x) = O(|x|^{-2})$$

ではあるが $u \neq 0$

3. 条件 (ii) をあてると有限の Support をもつ解は現われない。

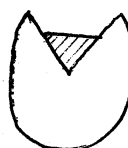
① $\Omega^c =$ , $P(D)$ は $x_n = 0$ を characteristic plane とはせず、

$f(x)$: 半空間 $\{x \in \mathbb{R}^n; x_n \leq 1\}$ に Support を持つ

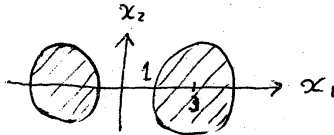
$P(D)$ の null solution

$$u(x) = \begin{cases} f(x) & ; x \in \Omega \cap \{|x| \leq 1\} \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

とすると,

$$P(D)u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \text{Supp } u = \text{[diagram]}$$


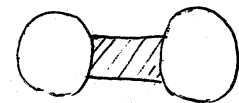
② $\Omega^c = \text{[diagram]}$, $P(\xi)$ は $x_2 = 0$ の characteristic line であり, homogeneous polynomial.



$$f(t) \in C_0^\infty\{t \in \mathbb{R}^1; |t| < 1\}$$

$$u(x) = \begin{cases} f(x_2) & ; \text{in } \Omega \cap \{|x_1| < 3\} \\ 0 & ; \text{otherwise} \end{cases}$$

とすると,

$$P(D)u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad \text{Supp } u = \text{[diagram]}$$


補注 (W. Littman [4])

$P(\xi)$ が定理 B.I. の条件 (i) を満たすという仮定のもとで:

$$P(D)u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n, \quad u \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$u(x) = o(|x|^{\frac{k}{2} - (n-1)}) \quad \text{unif in } \mathbb{R}^n$$

$$\text{もしは } u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

参考文献

- [1] В.В.Грушин . Об условиях типа Зоммерфельда
М. Сб. Т. 61 (103) '63
- [2] T. Kato . Growth properties of sol. of the reduced wave
eq. with var. coeff. C.P.M. '53
- [3] W. Littman , Fourier transform of surface carried
measures. Bull. A.M.S. '63
- [4] " , Decay at infinity of sol of P.D.E with
const coeff. Trans. A.M.S. '66
- [5] " Maximal rates of decay of sol of
P.D.E. Arch. R.M. '60
- [6] F. Trèves . Diff polynomials and decay at infinity
Bull. A.M.S. '60
- [7] L. Schwartz . Théorie des Distributions
nouvelle édition '66
- [8] Г.Е. Уиндлер . Аналог одной теоремы Лорана
Ульварца . Изв. Вис. Учебных Забег. '61
- [9] K. Yosida A theorem of Liouville Type for
Meson. eq. Proc. J.A. '51
- [10] Б.Р. Ваннберг . Принципы излучения.
У.М.Н. '66.