

W. Browder 教授講演記録

Manifold と homotopy theory

京都大学 西田吾郎 記

1. Smoothing PL-manifold. 多様体を, homeo, PL-home, diffeo. 等で分類する問題を考えるとき, 例えば有限表示をもつ任意の群 π は, ある 4 次元多様体 M の $\pi_1(M)$ として実現されることなどから, 多様体にあらかじめいくつかの structure を仮定しておかなければならない. 例として, PL-manifold の smoothing を考える. Milnor, Hirsch, Magur, Cairns, Lashof, Rothenberg 等による解答は次のとおりである.

M^m を PL-manifold, τ_M を PL tangent bundle とする.

定理. i) M が compatible smooth structure をもつ
 $\Leftrightarrow \tau_M$ が linear bundle と PL-bdle として同値.

ii) M の smooth structure の concordance class の全体は, τ_M の linearization の equivalence class 全体と一対一に対応する.

2. Surgery theory. 一つのホモトピー型 X が与えら

たとき, $n \cap X \underset{h.e.}{\simeq} M$ (smooth manifold) となるかを
考える. このような X は Poincaré space である. つまり

$$\exists [X] \in H_m(X), \quad [X] \cap ; H^0(X) \rightarrow H_{m-2}(X) \text{ is } \mathbb{Z}/2.$$

Poincaré space X 上には, Spivak normal fibre
space $\xi; E_0(\xi) \rightarrow X$ と, map $\alpha; \xi^{m+k} \rightarrow T(\xi)$
 $= X \cup CE_0(\xi)$ が存在し, α_* は H_{m+k} 上で degree 1
である. またこのような (ξ, α) は fibre homotopy
equivalence を除いて unique である. smooth
manifold M に対し, $h; M \underset{\simeq}{\rightarrow} X$ ならば, $\mathcal{L}_M \rightarrow \xi$
は fibre homotopy equivalence. 従って ξ は
linearization $\in \mathcal{L}$.

Surgery exact sequence

$\mathcal{S}(X) = \{(M^n, h); M: \text{smooth}, h; M \underset{\simeq}{\rightarrow} X\} / \text{concordance}$
 $\mathcal{L}(\xi) = \{\text{equiv. class of linearization of } \xi\} = [X, G/O]$
また, X は $\mathbb{Z}/2$ の local coefficient system に対し
Poincaré duality をみたすとし, $\pi_1(X) = \pi$, $m = \dim X \geq 5$
とする. このとき, 次の exact sequence がある.

$$L_{m+1}(\pi) \xrightarrow{\omega} \mathcal{S}(X) \xrightarrow{\eta} \mathcal{L}(\xi) \xrightarrow{\sigma} L_m(\pi)$$

ここで, $L_i(\pi)$ は Wall 群で, ω は $L_{m+1}(\pi)$ の $\mathcal{S}(X)$ への
作用である.

3. $K \in \text{compact Lie group}$. K の作用 $K \times X \rightarrow X$
 ε 上の空間 ε K -space とする。

Def. equivariant map $f, X \rightarrow Y$ の isovariant
 とは, $K \ni g, X \ni x$ に対し, $gf(x) = f(x) \Rightarrow gx = x$ となる
 ことをいう。

Def. $K \ni H$ に対し, $\{H\}$ は H の conjugacy class とする。
 $X^{\{H\}} = \{x \in X, \{K_x\} \supset \{H\}\} = G X^H$ とおく。 Category
 C_K は, object は, K -space X で $\forall H' \subset H \subset K$ に対し,
 $X^{\{H\}} \subset X^{\{H'\}}$ が linear K -normal bundle ε 上のものと
 し (この bundle $\varepsilon \mathcal{V}_{H,H'}$ とする), morphism $f: X \rightarrow Y$
 は isovariant map で $f|_{\varepsilon(\mathcal{V}_{H,H'})}$ が linear bundle
 map となるものを定義する。

Def. $\mathcal{S}_K(X) = \{(M, h); M \text{ は smooth } K\text{-manifold, } h; M \rightarrow X \text{ は } C_1 \text{ における homotopy equivalence}\} / \sim$ 。
 $\sim$ は $(M_0, h_0) \sim (M_1, h_1) \Leftrightarrow \exists F; W \rightarrow X \times \{0, 1\}$
 homotopy equivalence in C , $\partial W = M_0 \cup M_1$,
 $F|_{M_i} = (f_i, i)$ である。

定理. $X \in \text{smooth } K\text{-manifold}$ で, smallest
 isotropy subgroup E に対し, $\dim X^{\{E\}}/K \geq 5$ とする。
 このとき exact sequence

$$L_{m+1}(X) \rightarrow \mathcal{S}_K(X) \rightarrow [X/K, G/O] \rightarrow L_m(X)$$

が存在する。そこで L_m は $\mathcal{C}_K \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{B}$ なる covariant functor である。

i). periodic mod 4 in m .

ii). $f: X \rightarrow Y$ in $\mathcal{C}_K$ が、 π_1 の orbit type の π_1 の同型をみちびけば、 $f_*: L_m(X) \rightarrow L_m(Y)$ は同型。

$L_m(X)$ の一つの幾何学定義は、

$$L_m(X) = \{ (W, f); f: W \rightarrow X \times [0, 1] \text{ in } \mathcal{C}_K, \partial W = X \cup X', f|_X = \text{id}, f|_{X'} \text{ is homotopy equivalence} \} / \sim$$

で与えられる。また、次の exact sequence がある。HCK は largest ~~isotropy~~ isotropy subgroup とする。

$$L_m(X - X^{(H)}) \rightarrow L_m(X) \rightarrow L_m(X^{(H)}) \rightarrow L_{m-1}(X - X^{(H)})$$

ここで、 $X^{(H)}$ は 1 orbit type で、 $X - X^{(H)}$ は X より orbit type が一つ少なくなっている。