

Toward a Mathematical Theory of Turbulence ひとつの乱流モデルの構築へ向けて

名和 範人

明治大学・理工学部・数学科

Hayato NAWA

Department of Mathematics

School of Science and Technology

Meiji University

Abstract

This note is based on an on-going joint work with Prof. Sakajo (Kyoto Univ) and Prof. Matsumoto (Kyoto Univ). Our mathematical point of view may not be a conventional one: we don't assume any fluid equations describing the turbulence at first, but we regard turbulence as an infinite dimensional probability measure (as well as the conventional theory of turbulence) on an ensemble of appropriate time-dependent vector fields on the flat torus $\mathbb{T}^3$, which describes (a part of; or a “disguise” of) Kolmogorov's statistical laws. We then consider necessary properties of the ensemble in which the desired probability should be constructed. We will discuss whether a kind of incompressible Euler flow could be our candidate or not.

1 流れの場の記述

空間 $\mathbb{R}^3$ 内のある領域を流れる流体は、数学的には時間に依存したベクトル場として記述される。流体の素性がはっきりしていれば、そのベクトル場を支配する方程式は何かと考えるのは自然なことであるが、とりあえず、そのような方程式のことは忘れて話を進める。

よく言われる乱流の属性である **一様**, **等方**, **定常性** は、一つひとつのベクトル場の性質ではなく、ベクトル場の族が示す集団的な性質、言い換えれば統計的な性質（統計則）を述べたものと理解されている。そこで、そのような確率論的な記述を行うのための概念と記号を準備をしておく。簡単のため、流体は 3 次元の正方形の箱の中を周期的境界条件

を満たしながら流れているものとしよう。即ち、3次元平坦トーラス $\mathbb{T}^3$ 内を流れる流体を考える。

- $\Omega := C(\mathbb{T}^3 \times [0, T]; \mathbb{R}^3)$, 空間的には周期境界条件を持った時間に依存したベクトル場。^{*1}
- $\mathfrak{B}$: Ω に最大値ノルムを導入した際の Borel 集合族。
- P : $\mathfrak{B}$ 上定義された確率測度。

従って、三つ組み $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ は確率空間をなし、確率 P がどのような流れ（時間に依存したベクトル場 Ω の要素）の集合（ $\mathfrak{B}$ の要素）の上に台を持っているかで、^{*2} その統計的な性質が決まる。我々が望むような統計則を満たす確率測度 P を実際に作る事が数学としての究極の課題であるが、このような確率測度があるとして話を進めることにする。

統計則を記述するために、ベクトル場を「観測する装置」としての確率変数をひとつ定める：

$$\begin{array}{ccc} V_{x,t}: \Omega & \longrightarrow & T_x \mathbb{T}^3 \cong \mathbb{R}^3 \\ \Psi & & \Psi \\ u & \longmapsto & u(x, t) =: V_{x,t}(u) \end{array}$$

これは単なる値写像 (evaluation map) とか射影 (projection) と呼ばれるもので、時空点 (x, t) におけるベクトル場の向きを出力（観測）している。

乱流を形容する基本的な三つの性質：一様性・等方性・定常性は、この確率変数 $V_{x,t}$ を用いれば次のようになる：

- 一様性：任意の $x, y \in \mathbb{T}^3$ に対して

$$\mathbb{E}[V_{x,t}] = \mathbb{E}[V_{y,t}].$$

- 等方性：任意の $f \in C \cap L^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3)$ に対して $F(0) = 0$ なる $F \in C([0, \infty))$ があって

$$\mathbb{E}[f(V_{x,t}, V_{y,t})] = F(|x - y|).$$

- 定常性：任意の $h > 0$ に対して

$$\mathbb{E}[V_{x,t}] = \mathbb{E}[V_{x,t+h}].$$

^{*1} 時間 t についても、大胆に周期的とし、 $T > 0$ をその周期と考えても良いかもしれない。

^{*2} 確率 1 で出現する流れの集合は何かということである。

ここで $\mathbb{E}$ は確率測度 P に関する平均（期待値，アンサンブル平均）であり，例えば適当な $\mathbb{R}^3$ 上の“良い”関数 f に対して $\mathbb{E}[f(V_{x,t})]$ は

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(V_{x,t})] &:= \int_{\Omega} f(V_{x,t}(u)) P(\mathcal{D}u) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} f(v) P_{V_{x,t}}(dv)\end{aligned}$$

と定義されるものである*³： P は無限次元な Ω 上の測度であるが， $P_{V_{x,t}}$ は確率変数 $V_{x,t}$ から導かれる $\mathbb{R}^3$ 上の確率分布である．物理学の文献で用いられる期待値の記号 $\langle \cdot \rangle$ も簡便性を考慮して用いることにする：*⁴

$$\langle f(u(x,t)) \rangle := \mathbb{E}[f(V_{x,t})].$$

2 Kolmogorov 予想と Onsager 予想

乱流の性質に対する有名な言明として，Kolmogorov 予想と Onsager 予想がある．この節ではこれら2つの関係について考察する．

一連の論文 [13, 14, 15] で展開された，K41 と呼ばれる Kolomogorov の理論では，流体の支配方程式は非圧縮性の Navier-Stokes 方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = \nu \Delta u - \nabla p + f, \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

が採用されている（ように見受けられる）．ここで， $\nu > 0$ は流体の運動学的粘性を表す定数で f は外力である．*⁵ 乱流を記述すると考えられるベクトル場は，(2.1) を満たす

*³ さらに， $P_{V_{x,t}}$ が Lebesgue 測度 $\mathcal{L}^3$ に対して絶対連続であれば，即ち $\frac{P_{V_{x,t}}(dv)}{\mathcal{L}^3(dv)} = p(v; x, t)$ となる可積分関数 $p(v; x, t)$ があれば（ v が独立変数で (x, t) は関数のラベルである），

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(v) P_{V_{x,t}}(dv) = \int_{\mathbb{R}^3} f(v) p(v; x, t) \mathcal{L}^3(dv)$$

と書ける．もちろん，絶対連続性は自明ではない（そもそも P の存在も未知である）．

今後は，Lebesgue 測度は（次元がいくつでも）単に dx のように書くことにする．

*⁴ 便利な記号であるが，数学的な内容を正確に記すためには確率変数を導入する方がよいと思われる．

*⁵ K41 における乱流の支配方程式が非圧縮性 Navier-Stokes 方程式であるかどうかは，それほど明確ではないように思える．それはさておき，統計的な定常性を要求するためには外力が必要である；低周波域に外力を投入し，それが高周波域に運ばれるとする描像が理論の核心の一部をなしていることは間違いないであろう．方程式上では，粘性によるエネルギーの散逸を表す $\nu \Delta u$ とキャンセルさせていると考えれば良いようだ．

流速場 u であって、前節同様、平坦トーラス $\mathbb{T}^3$ 上定義されていて十分長い時間、区間 $[0, T]$ ($T \gg 1$)、において“乱流”状態にあるとしよう。

Kolmogorov の乱流理論においては、次のエネルギー散逸率非消失の仮定が基本的である：通常それは、

$$\langle \epsilon \rangle := \liminf_{\nu \rightarrow 0} \nu \langle \|\nabla u\|^2 \rangle > 0 \quad (2.2)$$

と書かれて、変形速度テンソルから決まる量は、

$$\|\nabla u\|^2 = \int_{\mathbb{T}^3} \sum_{1 \leq i, j \leq 3} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 dx$$

であるが、*6 K41 では時間に対しても平均を取ったものを考えているように読める。即ち、

$$\langle \epsilon \rangle := \liminf_{\nu \rightarrow 0} \nu \left\langle \frac{1}{T} \int_0^T \|\nabla u(t)\|^2 dt \right\rangle > 0 \quad (2.3)$$

がエネルギー散逸率 $\langle \epsilon \rangle$ の定義となる。*7

上述の基本仮説 (2.2) または (2.3) のもとで、Kolmogorov は乱流に対するいくつかの統計法則を導いている。 $p \in \mathbb{N}$ に対して p 次構造関数 S_p を次のように定義する：

$$\begin{aligned} S_p[u](x, t) &:= \mathbb{E} \left(\left[(V_{x+h, t}(u) - V_{x, t}(u)) \cdot \frac{h}{|h|} \right]^p \right) \\ &= \left\langle \left[(u(x+h, t) - u(x, t)) \cdot \frac{h}{|h|} \right]^p \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.4)$$

K41 と呼ばれる乱流理論では、増分 h に対するある種の相似性の仮定と一様性と定常性から、任意の $p \in \mathbb{N}$ に対して実定数 C_p があって、 $|h| \ll 1$ であれば、(任意の $(x, t) \in \mathbb{T}^3 \times [0, T]$ において)

$$S_p[u] = C_p (\langle \epsilon \rangle |h|)^{p/3}. \quad (2.5)$$

が成り立つ事が示されている。*8 これを Kolmogorov 予想と呼ぶことにする。

*6 $\nabla \cdot u = 0$ を用いている。

*7 このあたりは、乱流の定常性や一様性とも関係があり、一概には言えないところもあるし、理論展開によっては $\mathbb{T}^3$ ではなく $\mathbb{R}^3$ 上の流速場を考えたり、 $T \rightarrow \infty$ と極限を取った方が都合が良さそうに見える場合もある。エネルギー散逸率を巡っては Landau からの批判もあり、後の K62 と呼ばれる理論 [16] では確率変数として修正されているようであるが、このノートでは K62 については深く議論しない。

*8 $p = 3$ のときは $C_3 = -\frac{4}{5}$ で、Kolmogorov の 4/5-則として知られている。定常性と一様性があれば、 (x, t) 依存性はないと考えられる。 $p = 2$ のときは、よく知られた Fourier 空間でのエネルギーカスケードの“双対的”な表現となるが、このノートではエネルギーカスケードについては議論しない。エネルギーカスケードは解の滑らかさと深く関係していると考えられる。

一方, Onsager [17] では, 乱流の支配方程式は非圧縮性の Euler 方程式:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p, \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

とされている (と思われる). しかしながら, 乱流のサンプルは (2.6) の滑らかな解ではなく, 今日では散逸的弱解と呼ばれる, エネルギーを保存しないような“超関数の意味の解”であると考えられている (と読める).^{*9}

Onsager が [17] で述べた予想は, Kolmogorov 予想のような統計則とは異なり, 乱流のサンプル一つひとつに対する言明であって, Hölder 連続な非圧縮性 Euler 方程式の解が散逸的であれば, その Hölder 指数は $1/3$ を超えないと主張している;

$$\left| (u(x+h, t) - u(x, t)) \cdot \frac{h}{|h|} \right| \lesssim |h|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1/3. \quad (2.7)$$

別の言い方をすれば (こちらの方がオリジナルの言明に近いかもしれない),

$$\left| (u(x+h, t) - u(x, t)) \cdot \frac{h}{|h|} \right| \lesssim |h|^\alpha, \quad \alpha > 1/3. \quad (2.8)$$

ならば, Hölder 連続な非圧縮性 Euler 方程式の解はエネルギー (L^2 -ノルム) を保存する; 即ち, 等式

$$\int_{\mathbb{T}^3} |u(x, t)|^2 dx = \int_{\mathbb{T}^3} |u(x, 0)|^2 dx \quad (2.9)$$

が, 任意の $t \in [0, T]$ で成り立つことを主張している.

数学的には, Onsager 予想は非圧縮性 Euler 方程式の解の滑らかさとエネルギー保存則との関係性を問題にしたものであり, Besov 空間における結果 [3, 4] が知られていたが, 近年では Hölder 空間における解の存在定理がいくつか証明され, Onsager 予想の言う Hölder 指数が $1/3$ に近いところまで結果が得られている (例えば [5, 10, 2, 1]).

今一度2つの予想を振り返ってみると, 乱流の支配方程式が何であるかを問題しなければ,^{*10} Kolmogorov 予想は $\mathbb{E}[|V_{x,t} - V_{y,t}|]$ に対する連続性の Modulus に対する予想であり, Onsager 予想 [17] は乱流の各サンプル u の $|u(x, t) - u(y, t)|$ に対するそれである. こうした観点から見ると, Kolmogorov 予想と Onsager 予想は数学的には無関係

^{*9} 方程式 (2.6) に外力項はないことに注意する, それでもエネルギーは保存しないような解が数学的には存在することが近年の研究で分かってきている: [18, 19] および [5, 10, 2, 1], 詳細は5節で議論する.

^{*10} 見方によっては Kolmogorov の理論も非圧縮性の Euler 方程式を支配方程式と見做していると思えなくもない.

ではなく、確率過程の概念を通して密接に結びついている。次の新しい確率変数を導入する：任意の $\mathbb{R}^3$ の単位ベクトル $\hat{r}$ に対して

$$X_{\hat{r},s}^{x,t}(u) := V_{x+s\hat{r},t}(u) \cdot \hat{r} = u(x+s\hat{r},t) \cdot \hat{r}, \quad s > 0$$

と定める。時刻 t と位置 x を固定して $s \in [0, 1]$ の関数と考えたとき、 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ が確率空間であれば、 $\{X_{\hat{r},s}^{x,t}\}_{s \in [0,1]}$ は実数に値を取るひとつの確率過程であって、(2.5) から 任意の偶数 p に対して

$$\mathbb{E} \left[\left| X_{\hat{r},s+r}^{x,t} - X_{\hat{r},s}^{x,t} \right|^p \right] \lesssim |r|^{p/3}$$

が成り立っている事がわかる。ここで、確率過程論の教科書（例えば [11]）などでおなじみの Kolmogorov - Čentsov の定理を思い出そう：

Theorem 1 (Kolmogorov - Čentsov). 確率空間 $(\Omega, \mathfrak{B}, P)$ 上で定義された確率過程 $X = \{X_t | 0 \leq t \leq T\}$ が、ある正数 α, β, C に対して、

$$\mathbb{E} [|X_t - X_s|^\alpha] \leq C |t - s|^{1+\beta}, \quad 0 \leq s, t \leq T,$$

を満足したとする。このとき、 X の Hölder 連続な修正 (modification) $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t | 0 \leq t \leq T\}$ が存在して、その Hölder 指数 γ は任意に $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$ と選べる、即ち、

$$P \left[\omega \in \Omega \left| \sup_{\substack{0 < t-s < h(\omega) \\ s, t \in [0, T]}} \frac{|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)|}{|t-s|^\gamma} \leq \delta \right. \right] = 1,$$

ここで、 $h(\omega)$ は確率 1 で正值な確率変数で、 $\delta > 0$ は適当な定数である。

この定理は、確率過程の平均的な連続性の Modulus が分れば、各サンプルの Hölder 連続性が知られることを主張するものである。我々の確率過程 $\{X_{\hat{r},s}^{x,t}\}_{s \in [0,1]}$ が、すべての偶数 $p > 1$ で Kolmogorov 予想を満足すれば、各乱流サンプルの Hölder 指数は $1/3$ にいくらでも近くとれることが分かる。即ち、Onsager 予想 (2.7) が $0 < \alpha < 1/3$ で成立することが従う。^{*11}

しかしながら、ここでひとつ問題がある：Kolmogorov の議論では流速場は（外力のある）非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に従うと考えられているようであるが、Onsager 予

^{*11} $\alpha = p, \beta = \frac{p}{3} - 1$ とすればよい。Brown 運動の場合には、任意の自然数 n に対して $\alpha = n, \beta = \frac{n}{2} - 1$ ととれる。実際に Brown 運動のサンプルの Hölder 連続性の Hölder 指数は $\frac{1}{2}$ を越えないことが知られており、この定理はそういった意味で最良の結果を与える。しかしながら、我々の確率過程 $\{X_{\hat{r},s}^{x,t}\}_{s \in [0,1]}$ のサンプルの Hölder 指数が $\frac{1}{3}$ を越える越えないかは別問題であるが、Onsager 予想は $\frac{1}{3}$ を越えないと主張している。

想は非圧縮性 Euler 流に対するものである。このミスマッチを排除するためにも、一度、流体を記述する方程式を忘れることにする。即ち、第 1 節で記述したように、乱流とは、単に時間に依存するトーラス $\mathbb{T}^3$ 上のベクトル場の集合 Ω とその上に定義された確率測度 P と考えて、その台 (support) が何かを考察する。しかしながら、こう考えると粘性 $\nu > 0$ が「モデル」に現れず、エネルギー散逸率非消失の仮定 (2.2) または (2.3) をどのように定義したらよいか問題となる。

次節では、一般的な時間に依存する（あまり滑らかでない Ω に属する）ベクトル場のエネルギー散逸率について議論する。

Remark. この第 2 節を終える前に少しだけ歴史的な綾と言うべきものに触れておこう。最初に Kolmogorov が Theorem 1 を証明したのは 1933 年で、このときは連続な修正が存在するとだけ書かれていたが、その後に連続修正の Hölder 指数を明示したのが Čentsov で 1956 年のこととされている（例えば [11] を見よ）。Kolmogorov の K41 は、その名の通り 1941 年に発表された一連の論文で展開された理論だが、Eynk-Sreenivasan [8] によると、その頃の Onsager の手書きのノートが発見されていて、そこでは Kolmogorov の K41 と同様な議論が展開されており、また、今日 Onsager 予想と我々が呼んでいるものは 1949 年の論文 [17] に（証明なしで）数行記述されている言明であるが、そのノートには、すでに“証明”（後の脚注 *17 を参照）付きで書かれているとのことである。

3 乱流場のエネルギー散逸率

第 1 節で定義した $\Omega := C(\mathbb{T}^3 \times [0, T]; \mathbb{R}^3)$ に属する一般のベクトル場に対して“エネルギー散逸率”と呼べるような量を定義したい。

非圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (2.1) の解 u に対しては、Monin が（等方性の仮定なしで）、今日 Kármán-Howarth-Monin の関係式と呼ばれている次の関係を示している（関係式の導出および名前の由来について [9] に解説がある）：ある正数 η があって、 $\eta < |\xi| \ll 1$ のとき、 $\delta_\xi u := u(x + \xi, t) - u(x, t)$ とおくと、

$$\langle \epsilon \rangle = -\frac{1}{4} \operatorname{div}_\xi \langle |\delta_\xi u|^2 \delta_\xi u \rangle. \quad (3.1)$$

が成り立つ。^{*12}

^{*12} 一様・等方流であれば、 $\langle \epsilon \rangle$ は (x, t) にはよらない。 $\eta > 0$ は Kolmogorov scale と呼ばれる“解像度”に関する定数であるが、Duchon-Pobert [6] には

$$\langle \epsilon \rangle := -\frac{1}{4} \operatorname{div}_\xi \langle |\delta_\xi u|^2 \delta_\xi u \rangle|_{\xi=0}$$

なる記述が見られる。

幸いにして, (3.1) の右辺には ν は現れない. そこで, 大胆に $\xi = 0$ として, それを (必ずしも非圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (2.1) の解とは限らない) 第 1 節で定義した Ω に属するベクトル場の “局所的な” エネルギー散逸率と定義することにしよう.*¹³ 即ち:

$$\begin{aligned}\epsilon[u](x, t) &:= -\frac{1}{4} \operatorname{div}_{\xi} \left(|\delta_{\xi} u(x, t)|^2 \delta_{\xi} u(x, t) \right) \Big|_{\xi=0} \\ &= -\frac{1}{4} \operatorname{div}_{\xi} \left(|\Delta_{\xi} V_{x,t}[u]|^2 \Delta_{\xi} V_{x,t}[u] \right) \Big|_{\xi=0}\end{aligned}\tag{3.2}$$

と定める. ここで

$$\Delta_{\xi} V_{x,t}[u] := V_{x+\xi,t}[u] - V_{x,t}[u] = u(x + \xi, t) - u(x, t) =: \delta_{\xi} u(x, t)$$

とおいた.*¹⁴

Onsager 予想によれば, 期待される確率測度は, せいぜい Hölder 指数が $1/3$ より小さな, あまり滑らかでないベクトル場の上に台を持っているはずだから, (3.2) の定義を直接用いて計算することはできない. そこで, 次の 2 通りの計算方法を導入する: 一つ目は超関数的に発散を計算するもので, 正值球対称な C_0^{∞} 級な関数族 φ_{ε} ($\varepsilon > 0$) でトーラス $\mathbb{T}^3$ 上の超関数の意味で $\varphi_{\varepsilon} \rightarrow \delta_0$ ($\varepsilon \downarrow 0$) なるものに対して,

$$\epsilon[u](x, t) := \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} |\delta_{\xi} u|^2 \delta_{\xi} u \cdot \nabla \varphi_{\varepsilon}(\xi) \mathcal{L}^3(d\xi)\tag{3.3}$$

と定める; 2 つ目は積分平均を利用するもので,

$$\begin{aligned}\epsilon[u](x, t) &:= -\frac{1}{4} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^3(B(0; r))} \int_{|\xi|=r} |\delta_{\xi} u|^2 \delta_{\xi} u \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \mathcal{H}^2(d\xi) \\ &= -\frac{3}{4} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi r} \int_{|\hat{\omega}|=1} |\delta_{r\hat{\omega}} u|^2 \delta_{r\hat{\omega}} u \cdot \hat{\omega} \mathcal{H}^2(d\hat{\omega}).\end{aligned}\tag{3.4}$$

として計算する.*¹⁵

これらの定義が旨く機能する程度に解が滑らかであれば,*¹⁶ 次の等式の成立を期待す

*¹³ 数学は自由である!

*¹⁴ 従って, この $\epsilon[\cdot](x, t)$ も Ω 上の確率変数である. そう言った意味では, Kolmogorov の K62 と呼ばれる理論 [16] の精神と同じ (?) である.

*¹⁵ u が滑らかなら, 次の等式が成立することに注意:

$$\int_{B(0; r)} \operatorname{div}_{\xi} (|\delta_{\xi} u|^2 \delta_{\xi} u) \mathcal{L}^3(d\xi) = \int_{|\xi|=r} |\delta_{\xi} u|^2 \delta_{\xi} u \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \mathcal{H}^2(d\xi).$$

*¹⁶ 少なくとも, Ω に属するベクトル場は連続だから, (3.3) と (3.4) に現れる積分は定義できる. 問題は極限の存在である.

るのは自然なことであろう：

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} |\delta_\varepsilon u|^2 \delta_\varepsilon u \cdot \nabla \varphi_\varepsilon(\xi) \mathcal{L}^3(d\xi) \\ &= -\frac{3}{4} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi r} \int_{|\hat{\omega}|=1} |\delta_{r\hat{\omega}} u|^2 \delta_{r\hat{\omega}} u \cdot \hat{\omega} \mathcal{H}^2(d\hat{\omega}). \end{aligned} \quad (3.5)$$

興味深いことに, Duchon-Robert [6] は, ある種のベクトル場に対してこの等式が実際に成立することを証明した. 次の節では, その結果について議論する.

4 非圧縮性 Euler 流とエネルギー散逸率

Duchon-Robert [6] は, $u \in L^3(\mathbb{T}^3 \times (0, T))$ なる非圧縮性 Euler 方程式の超関数の意味の解 (弱解) に対して, (3.5) の左辺の極限：

$$\begin{aligned} D[u](x, t) &:= \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} |\delta_\varepsilon u|^2 \delta_\varepsilon u \cdot \nabla \varphi_\varepsilon(\xi) \mathcal{L}^3(d\xi) \\ &=: \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_\varepsilon[u](x, t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

が超関数の意味 ($D'(\mathbb{T}^3 \times (0, T))$ の位相) で存在し, 超関数として次の等式が成り立つことを証明した：

$$D[u] = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|u|^2}{2} \right) - \operatorname{div} \left(u \left(\frac{|u|^2}{2} + p \right) \right). \quad (4.2)$$

$D[u]$ は (3.3) で定義される $\epsilon[u]$ の超関数としての実現であるが, 上式 (4.2) は, $D[u] \neq 0$ がエネルギー保存の障害となることを示している.*¹⁷ さらに Duchon-Robert [6] は,

*¹⁷ この証明には, 合成積 $\varphi_\varepsilon * u$ が low pass filter の役割を果たすことが効いているようである. $u = (u_1, u_2, u_3)$ とし, $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ ($i = 1, 2, 3$) と偏微分を表し, 関数の上付きの ε は φ_ε との合成積を表すものとする: $f^\varepsilon = \varphi_\varepsilon * f$. また, 以下の数式では Einstein の規約を用いる; $\nabla \cdot u = \partial_i u_i = 0$ にも注意しよう. 実際, 計算により次の等式が示される：

$$D_\varepsilon[u] = \frac{1}{2} E_\varepsilon[u] - \frac{1}{4} \partial_i (u_i u_j u_j)^\varepsilon + \frac{1}{4} u_i \partial_i (u_j u_j)^\varepsilon$$

ここで

$$E_\varepsilon[u] := u_j \partial_i (u_i u_j)^\varepsilon - u_i u_j \partial_j (u_i)^\varepsilon$$

である. 一方で, 方程式の両辺で φ_ε との合成積をとることにより得られる等式から, E_ε が超関数の意味で (4.2) の右辺の 2 倍に収束することが分かる. 結果として超関数の意味で $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\varepsilon = 2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} D_\varepsilon$ が示される. Eynk-Sreenivasan [8] によれば, このような議論は Onsager の直筆ノートでも行われており, (4.1) - (4.2) なる関係式が得られている. この関係式が Onsager 予想の根拠となっていることは想像に難くない.

(3.5) の右辺の極限が然るべき位相で存在すれば左辺に等しく,

$$-\frac{4}{3}D[u] = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi r} \int_{|\hat{\omega}|=1} |\delta_{r\hat{\omega}} u|^2 \delta_{r\hat{\omega}} u \cdot \hat{\omega} \mathcal{H}^2(d\hat{\omega}). \quad (4.3)$$

となることも証明している (即ち (3.5) の成立).

(4.3) の右辺は球面平均ではあるが, Duchon-Robert [6] では, この等式を実際に, Kármán-Howarth-Monin の 4/3-則:

$$-\frac{4}{3}\langle \epsilon \rangle |\xi| = \left\langle |\delta_{\xi} u|^2 \delta_{\xi} u \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \right\rangle, \quad 0 < |\xi| \ll 1,$$

の実現と考えているようである.

Eynk [7] は Duchon-Robert [6] に触発されて類似の結果を得ている:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} |\delta_{\varepsilon} u|^2 \delta_{\varepsilon} u \cdot \nabla \varphi_{\varepsilon}(\xi) \mathcal{L}^3(d\xi) \\ &= -\frac{5}{4} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi r} \int_{|\hat{\omega}|=1} [\delta_{r\hat{\omega}} u \cdot \hat{\omega}]^3 \mathcal{H}^2(d\hat{\omega}); \end{aligned} \quad (4.4)$$

左辺は (4.1) の $D[u]$ であり, 右辺の極限が存在すれば等号が成立する. 書き換えれば

$$-\frac{4}{5}D[u] = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{4\pi r} \int_{|\hat{\omega}|=1} [\delta_{r\hat{\omega}} u \cdot \hat{\omega}]^3 \mathcal{H}^2(d\hat{\omega}) \quad (4.5)$$

となる. Eynk [7] は, Duchon-Robert [6] 同様, アンサンブル平均を球面平均と読み替えて, (2.5) で $p = 3$ とした Kolmogorov の 4/5-則:

$$-\frac{4}{5}\langle \epsilon \rangle |\xi| = \left\langle \left[\delta_{\xi} u \cdot \frac{\xi}{|\xi|} \right]^3 \right\rangle, \quad 0 < |\xi| \ll 1,$$

の実現と見做している.

Duchon-Robert [6] や Eynk [7] のこれらの結果は, 一様・等方・定常などの仮定なしで, 非圧縮 Euler 方程式のある種の弱解が乱流の属性を示すことを示唆しているが, そのためには “ $D[u] > 0$ ”^{*18} を証明するか, (4.3) または (4.5) の右辺が, 然るべき位相で収束して “正值” な数学的な対象を定めることを示す必要がある. 個別の解で, そのようなことが明確に分ければ統計則は必要ではなくなるのかもしれないが, “ $D[u] > 0$ ” の解析には確率論的なアプローチが重要であろうと我々は考えている: 何らかの意味での $D[u]$ の平均がエネルギー散逸率となることが期待される.^{*19}

^{*18} 時空でのノントリビアルな測度か, もっと弱い意味でも良いかもしれない.

^{*19} 最終節である第6節で, この問題を議論する.

第3節で、エネルギー散逸率 $\epsilon[\cdot]$ を一般の Ω に属するベクトル場に対して定義したので、その中で乱流のサンプルとして相応しいベクトル場は何かを見極める必要がある。Duchon-Robert [6] や Eynk [7] の結果は、 Ω 上に存在が期待される確率測度 P の台が非圧縮性 Euler 方程式の弱解でエネルギーを保存しないベクトル場であることを強く示唆しているように思われる。

5 非圧縮性 Euler 方程式の散逸的弱解

非圧縮性 Euler 方程式の弱解でエネルギーを保存しない解を散逸的弱解という。散逸ということを強調して

$$\int_0^T \int_{\mathbb{T}^3} D[u](x, t) dx dt > 0 \quad (5.1)$$

も仮定に含まれているとしよう。^{*20}

ただ単に超関数の意味で非圧縮性 Euler 方程式を満たしているとの条件下では、Sheffer [18] や Schnirelman [19] によって、時空間でコンパクト台を持つような奇妙な解が存在することが知られていたが、第2節で言及したように、ここ数年で Onsager 予想に対する数学は長足の進歩を遂げ（例えば [5, 10, 2, 1]）、遂に、Hölder 指数が $1/3 - \varepsilon$ ($\forall \varepsilon > 0$) となるエネルギーを保存しない解の存在が証明された [2, 1]（物理学的な乱流の属性と考えた場合、まだ少し弱い主張かもしれない。また Hölder 指数を $1/3$ とできるかは課題として残っている）。これらの論文で興味深い点は、アприオリに L^2 ノルムの変化をかなり自由に設定できることである。即ち、（ある付加的条件を満たす）任意に与えられた連続関数 $e = e(t) > 0$ に対して、 $\|u(t)\|^2 = e(t)$ となる非圧縮性 Euler 方程式の Hölder 連続な超関数の意味の解を作ることができる。^{*21} よって (5.1) を満足する解は無数にあることが証明された。

ここで、Hölder 指数の上限が $1/3$ となる（努力目標）理由を述べておこう。Onsager 予想：(2.8) $\Rightarrow$ (2.9) を証明すれば良い：Duchon-Robert [6] や Eynk [7] の結果から次のように分かる： $\mathbb{T}^3 \times [0, T]$ で連続な解が（任意の t で） x についての Hölder 連続性を表す Hölder 指数が $1/3$ より真に大きければ、(4.3) もしくは (4.5) から $D[u] = 0$ が結論されて、(4.2) からエネルギー保存則が導かれる。

散逸的という仮定 (5.1) は、エネルギーを保存しないという条件より強い条件なので、この仮定のもとでは、もっと有益な情報を得ることができる可能性がある。非圧縮性

^{*20} (4.1) で定義される $D[u]$ は関数とは限らないので、時空間の定数関数 1 とのペアリングで書いた方が数学的に厳密な表現である。

^{*21} ここで考えている非圧縮性 Euler 方程式には外力は導入されていないことに注意。方程式に外力が明示的に書かれていなくても、あたかも外力があるような解を作ることができると言えるかもしれない。

Euler 方程式の散逸的弱解の族が求めている乱流の集合であり、確率測度 P の台であって、Kolmogorov 予想 (2.5) が少なくとも $p = 3$ では成り立つことになるのかもしれない。

この節の最後に、“オリジナルのエネルギー散逸率”と我々の $D[u]$ との関係を簡単にまとめておく。 u^ν を非圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (2.1) の Leray-Hopf 解とする。ただし、ここでは簡単のため $f \equiv 0$ として議論する。非圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (2.1) に対しても (4.2) に現れる $D[u]$ と同様な defect 項 $D_{NS}[u]$ を定義できる。^{*22} ここで u を非圧縮性 Euler 方程式 (2.6) の $L^3(\mathbb{T}^3 \times (0, T))$ に属する弱解とし、

$$\lim_{\nu \downarrow 0} \|u^\nu - u\|_{L^3(\mathbb{T}^3 \times (0, T))} = 0 \quad (5.2)$$

が成り立つとすると、次の収束を簡単に確かめることができる：

$$\lim_{\nu \downarrow 0} (D_{NS}[u^\nu] + \nu |\nabla u^\nu|^2) = D[u] \quad \text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{T}^3 \times (0, T)).$$

従って、Leray-Hopf 解は $D[u^\nu] \geq 0$ を満足するので（[6] に証明がある）、(2.6) の解 u に対して $D[u]$ が非自明な測度（雑に言って $D[u] > 0$ ）であれば、

$$\limsup_{\nu \downarrow 0} \int_0^T \int_{\mathbb{T}^3} D_{NS}[u^\nu] dx dt > 0 \quad \text{または} \quad \limsup_{\nu \downarrow 0} \nu \int_0^T \|\nabla u^\nu(t)\|^2 dt > 0$$

が成り立つ。もし $\{u^\nu\}_{\nu > 0}$ として滑らかな非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の族を選ぶことができるのなら、^{*23}

$$\limsup_{\nu \downarrow 0} \nu \int_0^T \|\nabla u^\nu(t)\|^2 dt > 0 \quad (5.3)$$

が言える。逆に、仮定 (5.2) の下で (5.3) を満たす非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の解の族があれば、極限関数である非圧縮性 Euler 方程式の解 u は (5.1) を満足する。

問題は (5.2) であり、(2.6) の散逸的弱解を非圧縮性 Navier-Stokes 方程式の極限から構成できるかどうかは分かっていない。

6 乱流場の分配関数

第 4 節における議論もそうであったが、数学的な解析は 時空間で定義された 数学的な（関数やそれが属する関数空間、その位相などの）対象を用いて行われることが多い。

^{*22} 脚注 *17 での非圧縮性 Euler 方程式 (2.6) の解に対する計算と同様にして次の等式が超関数の意味で成り立つことが分かる： $2D_{NS}[u] = -\partial_t |u|^2 - \operatorname{div}(u(|u|^2 + 2p)) + \nu \Delta |u|^2 - 2\nu |\nabla u|^2$ 。

^{*23} Then, $D_{NS}[u^\nu] = 0$ 。

Kato [12] によって考察された, Navier-Stokes 方程式の粘性消失極限 ($\nu \rightarrow 0$) を考える問題においても, ∇u の時空間での L^2 ノルムをとった量を用いて解析されている.*²⁴ ここでも, 乱流を時空 $\mathbb{T}^3 \times [0, T]$ 上の $\mathbb{R}^3$ に値を取るベクトル場として考えていく. ただし, 以降の議論はかなり大胆なものである.*²⁵

この節では, Ω に属するベクトル場のエネルギー散逸率は (3.3) として考察を進める. (3.4) ではなく (3.3) を採用することは, 第4節や5節の議論を見れば明らかであろう. しかしながら, Duchon-Robert [6] が示した (4.1) ように極限は超関数であることしか分からないので, この量は各時空点で意味を持つような量ではないかもしれない. 実際, 定義のアイデアのもとになった (3.1) も ξ はゼロとはしていない. そこで, 乱流のサンプルは, 非圧縮性 Euler 方程式の散逸的弱解とし, 時空間のある小さな立方体 $\square \times [t - \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}]$ で $D[u]$ を平均した量を実質的なエネルギー散逸率と定める:

$$\epsilon_{x,t}[u] := \frac{1}{|\square \times \Delta t|} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} ds \int_{x+\square} D[u](y, s) dy.$$

さて, ここで $\square \times [t - \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}]$ をもう少し明確にしておこう. 乱流の最小単位として Minimal Flow Unit (MFU と略記する) を時空の領域 $\mathbb{T}^3 \times [0, T]$ に導入する: この領域を小さな4次元直方体に N 等分割して,*²⁶ その一つひとつの立方体上のベクトル場は, まだ“乱流”と見做してよいほどの大きさであるとき, その一つひとつの立方体

$$(x + \square) \times \left[t - \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2} \right]$$

を MFU と呼ぶことにする. $(x, t) \in \mathbb{T}^3 \times (0, T)$ で適当にラベルを貼って, お互いが立方体の境界以外で交わらないようにしておく. そのラベルの数は N でありラベルとして選んだ (x, t) のなす集合も MFU と書くことにする*²⁷:

$$\bigcup_{(x,t) \in MFU} \left\{ (x + \square) \times \left[t - \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2} \right] \right\} = \mathbb{T}^3 \times (0, T),$$

であり, $(x, t) \neq (y, s)$ に対して

$$\left\{ (x + \square) \times \left[t - \frac{\Delta t}{2}, t + \frac{\Delta t}{2} \right] \right\}^\circ \cap \left\{ (y + \square) \times \left[s - \frac{\Delta t}{2}, s + \frac{\Delta t}{2} \right] \right\}^\circ = \emptyset \quad (6.1)$$

*²⁴ K41 においても, エネルギー散逸率は (2.3) と考えているようにも見える. Kato [12] の結果について簡単に触れておく: この論文は, $\mathbb{R}^3$ の有界領域上の (2.1) と (2.6) の関係を考察したものであるが, (2.6) の古典解 (エネルギーが保存する解である) が存在するときは, 雑に言って, (2.3) に相当する量が 0 であることと, $\nu \rightarrow 0$ のとき (2.1) の解が (2.6) の解に L^2 で収束することは同値であることを示している.

*²⁵ ある時間でスナップショットをとったような描像は持ち込まない.

*²⁶ 等分割の必要はないかもしれないが, 記述を簡単にするためそう仮定する.

*²⁷ 誤解は生じないであろう.

“よく発達した乱流”では、各 MFU におけるベクトル場はサイコロを振って決めているようなものと考えことにする：ひとつの粗視化であり、各 MFU に独立同分布な確率変数一つずつ与えて一つのベクトルを出力させる。この際、ベクトル場の値である $\mathbb{R}^3$ も離散化し、あまりにも大きな速度領域はカットオフを入れて無視して、出力されるベクトルも有限個中から選ぶことにする。この離散確率変数の分布が“乱流場の分布”の“離散近似”である。ここでは、その分布を「仕組まれた分布」と呼んでおこう。^{*28}

このように状況を設定すれば、本当にサイコロを N 回振って各 MFU でのベクトル場を決めて $\mathbb{T}^3 \times [0, T]$ 全体のベクトル場を定めているようなものである。離散化された $\mathbb{R}^3$ の値の集合を $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ ^{*29} とすれば、 N 個の MFU のベクトル場をすべて集めて作った $\mathbb{T}^3 \times [0, T]$ 全体の離散ベクトル場の集合は $\mathcal{A}^N$ となる。^{*30}

大数の法則の精密化としてよく知られた Shannon-McMillan の定理から、 $N \gg 1$ であれば“Shannon-McMillan 核”とでもいうべき $\mathcal{A}^N$ の部分集合が現れ、それが、ほぼ確率 1 を占め、その中の元はどれもが、ほぼ等しい確率で分布する（漸近等分割性）ことが分かる。Shannon-McMillan の定理を正確な形で述べよう（詳細については例えば [20]）。

Theorem 2 (Shannon - McMillan). 確率空間 $\Omega = \mathcal{A}^N$ と、その上の N 個の確率変数 $X_i = X_i(\omega) := \omega_i$ ($\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N) \in \Omega$) ($i = 1, 2, \dots, N$) を考える。これらは独立同分布で、その分布は

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ p_1 & p_2 & \dots & p_k \end{pmatrix}$$

と与えられているとする。^{*31} N 個の確率変数の（分布に対する）エントロピーはすべて等しく、それを H とおく：

$$H := - \sum_{j=1}^k p_j \ln p_j.$$

^{*28} これがどのような形をしているかが問題なのであるが、ひとまず与えられたものとして話を進める。

^{*29} 各 a_j は $\mathbb{R}^3$ の元で、 k は膨大な数かもしれないが、これは有限集合

^{*30} $\mathcal{A}^N$ は N 個の各 MFU に順序をつけて、その順番に確率変数の出力である $\mathcal{A}$ の元を並べたもので、 Ω の離散化と言ってよいであろう。この見方は数値的な検証に役立つかもしれない。

^{*31} 正確には、

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_k \\ p(a_1) & p(a_2) & \dots & p(a_k) \end{pmatrix}.$$

であり、 $0 \leq p(a_i) \leq 1$ ($i = 1, 2, \dots, k$) で $\sum_{i=1}^k p(a_i) = 1$ である。これから $\Omega = \mathcal{A}^N$ に自然に確率 P が定まる。

このとき、以下の主張が成立する：任意の正数 α, β に対して、ある自然数 $N(\alpha, \beta)$ が見つかって、 $N \geq N(\alpha, \beta)$ であれば、 Ω の部分集合 Ω_N (Shannon-McMillan 核) が存在して、次を満たす：^{*32}

$$(1) P(\Omega_N) > 1 - \alpha,$$

(2) 任意の $\omega \in \Omega_N$ に対して

$$e^{-N(H+\beta)} \leq P(\{\omega\}) \leq e^{-N(H-\beta)},$$

(3) Ω_N に属する事象 (events) の数 $\#\Omega_N$ は

$$e^{N(H-\beta)} \leq \#\Omega_N \leq e^{N(H+\beta)}.$$

実際、 Ω_N は次のようなものとして選ぶことができる： $\delta \sum_{j=1}^k |\ln p_j| \leq \beta$ なる $\delta > 0$ に対して

$$\Omega_N := \left\{ \omega \in \Omega \mid \left| \frac{N_i(\omega)}{N} - p_i \right| < \delta, \quad 1 \leq i \leq k \right\}$$

ここで、 $N_i(\omega)$ は $\omega \in \mathcal{A}^N$ の中に a_i が出現する回数を出力する確率変数である。

Shannon-McMillan 核に属するもの以外の $\mathcal{A}^N$ の元が出現する確率はほぼゼロである。一方で、Shannon-McMillan 核に属する離散ベクトル場は、ほぼ“仕組まれた分布”に従って $\mathcal{A}$ の要素を含むのだが、この“仕組まれた分布”はどのような形をしているのだろうか。この問いかけは数学では答えられない。統計力学の原理である『エントロピー最大の原理』の処方箋を用いることで分布の形が分かる。ただし、どの MFU においても乱流のサンプル全体でエネルギー散逸率 $\epsilon_{x,t}$ の平均をとれば、同じ値 $\bar{\epsilon} > 0$ をとるものとし

^{*32} 確率 P は実は N に依存していることに注意する。

二つの正数列 $\{A_N\}$ と $\{B_N\}$ に対して、

$$A_N \approx B_N \stackrel{\text{def}}{\iff} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln A_N}{\ln B_N} = 1$$

と定めると、(2) の主張は

$$P(\omega) \approx e^{-NH}$$

であり、(3) の主張は

$$\#\Omega_N \approx e^{NH}$$

と書くことができる。(3) の主張は次のように書くこともできる：

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\ln \#\Omega_N}{N} = H.$$

よう.*³³ “仕組まれた分布”は $e^{-\beta \epsilon_{x,t}}$ を正規化したような形になるが、離散化したベクトル場を元の連続な場にもどして、大胆に Ω 上の平らな無限次元 “測度” $\mathfrak{D}v$ を使って一つの MFU での分配関数を書いてみると

$$Z_{\beta}^{x,t} := \int_{\Omega} \exp \left[\frac{-\beta}{|\square \times \Delta t|} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} ds \int_{x+\square} D[v](y,s) dy \right] \mathfrak{D}v. \quad (6.2)$$

となる。 β は統計力学の場合の “逆温度” に対応するものだが、ここでは物理的な意味ははっきりしていない。

数学的には (6.2) は全く形式的なものであって、これから本物の測度が定まるためには ($\beta > 0$ ならば) 指数の方にある量 $\epsilon_{x,t}[v]$ が正の値をとることがすくなくとも要求されるであろう。そのためには、乱流サンプルの一つひとつは Hölder 指数が $1/3$ に近い Hölder 連続性を持っていることが必要になるかもしれないし、積分範囲である Ω も制限される可能性がある.*³⁴

「MFU ごとにサイコロを振って」と話を進めてきたが、 N 個の MFU 全体（あるいは Ω 上）の分配関数の「密度」は次のようになると考えられる：

$$\prod_{(x,t) \in \text{MFU}} \exp \left[\frac{-\beta}{|\square \times \Delta t|} \int_{t-\Delta t/2}^{t+\Delta t/2} ds \int_{x+\square} D[v](y,s) dy \right] \quad (6.3)$$

$$= \exp \left[\frac{-N\beta}{|\mathbb{T} \times [0, T]|} \int_0^T ds \int_{\mathbb{T}^3} D[v](y,s) dy \right]. \quad (6.4)$$

先に β の物理的な意味は不明と述べたが、上式 (6.4) に現れる MFU の個数 N は、系の体積のような役割を果たしている。また、全体のエネルギー散逸率の平均値 $\bar{\epsilon}$ は乱流のクラスを指定する「示強変数」の役割を果たすことが期待されると思われる。

Acknowledgements

この研究は JSPS 科研費 基盤 (B) (代表者 名和 範人) の助成を受けたものである。

This work is partially supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (B) # 23340030 of JSPS .

*³³ 乱流に対して時空間での一様性を課したと言えるであろう。求めた分布でエネルギー散逸率の平均を計算すれば、それは与えられた値 $\bar{\epsilon} > 0$ となることは言うまでもないが、各サンプルの各 MFU でエネルギー散逸率が正だということを意味しない。Shannon-McMillan 核に属する各離散ベクトル場の MFU 全体のエネルギー散逸率の平均は正となる。

*³⁴ 例えば、(5.1) のような条件を満足するような非圧縮性 Euler 方程式の散逸的弱解の全体。

References

- [1] Buckmaster, T., *Onsager conjecture almost everywhere in time*, arXiv: 304.1049v3 (2013)
- [2] Buckmaster, T., De Lellis, C. and Székelyhidi, L. Jr., *Dissipative Euler flows with Onsager-critical spatial regularity*, arXiv:1404.6915v1 (2014)
- [3] Cheskidov, A., Constantin, P., Friedlander, S. and Shvydkoy, R., *Energy conservation and Onsager's conjecture for the Euler equations*, Nonlinearity vol 21 (2003) 1233–1252
- [4] Constantin, P., E, W., and Titi, E. S., *Onsager's conjecture on the energy conservation for solutions of Euler's equation*, Commun. Math. Phys. vol 165: (1994) 207-209
- [5] De Lellis, C. and Székelyhidi, L. Jr., *Dissipative Euler flows and Onsager's conjecture*, arXiv:1202.1751v1 (2012)
- [6] Duchon, J. and Robert, R., *Inertial energy dissipation for weak solutions of incompressible Euler and Navier-Stokes equations*, Nonlinearity vol 13 (2000) 249-255
- [7] Eyink, G. L., *Local 4/5-law and energy dissipation anomaly in turbulence*, Nonlinearity vol 21 (2003) 1233–1252
- [8] Eyink, G. L. and Sreenivasan, K. R., *Onsager and the theory of hydrodynamic turbulence*, Rev. Mod. Phys. vol 78 (2006) 87–135
- [9] Frisch, U., *Turbulence, Legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge University Press (1996).
- [10] Isett, P., *Continuous Euler flows in three dimensions with compact support in time*, arXiv:1211.4065v1 (2012)
- [11] Karatzas, I. and Shreve, S. E., “Brownian Motion and Stochastic Calculus”, 2nd Edition GTM, Springer, New York, (1991).
- [12] Kato, T., *Remarks on zero viscosity limit for nonstationary Navier-Stokes flows with boundary*, in Seminar on Nonlinear Differential Equations, S.S. Chern (ed.), Springer-Verlag (1984), 85-98
- [13] Kolmogorov, A. N., *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers*, Dkl. Akad. Nauk SSSR, vol 30 (1941) 9-13
- [14] Kolmogorov, A. N., *On degeneration of isotropic turbulence in an incompressible*

- viscous liquid*, Dkl. Akad. Nauk SSSR, vol 31 (1941) 538-540
- [15] Kolmogorov, A. N., *Dissipation of energy in locally isotropic turbulence*, Dkl. Akad. Nauk SSSR, vol 32 (1941) 16-18
 - [16] Kolmogorov, A. N., *A refinement of previous hypothesis concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high Reynolds number*, J. Fluid Mech., vol 13 (1962) 82-85
 - [17] Onsager, L., *Statistical hydrodynamics*, Nubo Cimento Suppl. vol 6 (1949) 297–287.
 - [18] Scheffer, V., *An inviscid flow with compact support in space-time*, J. Geom. Anal. vol 3 (1993) 343–401.
 - [19] Schnirelman, A., *On the uniqueness of weak solution of the Euler equation*, Comm. Pure Appl. math.. vol 50 (1997) 1261–1286.
 - [20] Shiryaev, A. N., *Probability, 2nd ed.*, Springer, New York, (1995)