

quiver から得られる nilpotent Lie 代数と Ricci soliton

大阪市立大学 溝口 史華

Fumika Mizoguchi Osaka City University *

概要

nilpotent Lie 群は, Ricci soliton を許容する非自明な例を多く供給する. 本稿では, quiver から nilpotent Lie 代数を得る方法を紹介する. また, “直線型” の quiver から得られた Lie 代数に対応する単連結 Lie 群が左不変な Ricci soliton 計量を持つことを述べる.

1 導入

本稿では, nilpotent Lie 代数上の代数的 Ricci soliton が重要な役割を果たす.

定義 1.1 (nilpotent) Lie 代数 $\mathfrak{g}$ が n -step nilpotent Lie 代数であるとは, 次を満たすこと:

$$\mathfrak{g}^{n-1} \neq 0, \quad \mathfrak{g}^n = 0.$$

ここで, $\mathfrak{g}^i = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{i-1}]$, $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{g}$ と定める.

定義 1.2 (代数的 Ricci soliton) 内積つき Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ が 代数的 Ricci soliton であるとは, $c \in \mathbb{R}, D \in \text{Der}(\mathfrak{g})$ が存在して, 次を満たすこと:

$$\text{Ric} = c \cdot \text{id} + D.$$

定義 1.3 (Ricci soliton) Riemann 多様体 (M, g) が Ricci soliton であるとは, $c \in \mathbb{R}, X \in \mathfrak{X}(M)$ が存在して, 次を満たすこと:

$$\text{ric}_g = c \cdot g + \mathcal{L}_X g.$$

代数的 Ricci soliton と Ricci soliton には次のような関係がある.

定理 1.4 (Lauret, [3]) 左不変計量つきの単連結 Lie 群 (G, g) , 及び対応する内積つき Lie 代数 $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ に対して, 次が成り立つ:

* This work was supported by the Research Institute for Mathematical Sciences, an International Joint Usage/Research Center located in Kyoto University. This work was partly supported by Osaka Metropolitan University Advanced Mathematical Institute (MEXT Joint Usage/Research Center on Mathematics and Theoretical Physics).

- $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ が代数的 Ricci soliton ならば, (G, g) は Ricci soliton である.
- G が nilpotent で, (G, g) が Ricci soliton ならば, $(\mathfrak{g}, \langle, \rangle)$ は代数的 Ricci soliton である.

与えられた等質多様体が不変な Ricci soliton 計量を持つかという問題がある. 特に, $c < 0$ の場合は, 非自明な Ricci soliton の例が数多く供給される. 最近, Riemann 多様体 (M, g) が $c < 0$ の等質 Ricci soliton であるとき, (M, g) は solvable Lie 群に左不変計量を入れた空間と等長的であることが示された ([1]). また, 適切な subalgebra に内積を制限することにより, Ricci soliton 計量を持つ solvable Lie 群から, Ricci soliton 計量を持つ nilpotent Lie 群が得られる ([4]). したがって, Ricci soliton を許容する nilpotent Lie 群を調べることは重要である.

nilpotent Lie 代数上の代数的 Ricci soliton について, 2-step nilpotent Lie 代数については具体例が多い. また, Lie 代数の構造が簡単な場合は, 代数的 Ricci soliton を許容するか否かの判定条件も解明されている ([6]). 一方で, ステップ数の高い nilpotent Lie 代数は, 扱いやすい具体例が少ない. そこで, 次のような一般的な問題が考えられる.

問題 1.5

- 扱いやすい step 数の高い nilpotent Lie 代数の例を構成する.
- 与えられた nilpotent Lie 代数が代数的 Ricci soliton を許容するか否かを判定する.

本稿では, quiver から nilpotent Lie 代数を構成する方法を紹介する. この方法は, 任意の step 数の nilpotent Lie 代数を供給する. さらに, “直線型” の quiver から得られた Lie 代数が代数的 Ricci soliton を許容することを述べる.

2 既知の例

以下では, nilpotent Lie 代数上の代数的 Ricci soliton について既に知られている例を 2 つ紹介する. 1 つ目は, ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数である. ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数とは, 次の例のように行列をブロック分割して, その対角ブロックとそれより下のブロックが 0 となるような行列全体のことである:

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & 0 & x_7 & x_8 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & x_9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

定理 2.1 (田丸, [7]) ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数には, 代数的 Ricci soliton となる内積が存在する.

例えば, $(1, 1, 1)$ のブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数は 3 次元ハイゼンベルグ代数である:

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|cc} 0 & x_1 & x_2 \\ \hline 0 & 0 & x_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\} : 3 \text{ 次元ハイゼンベルグ代数.}$$

2 つ目は, グラフから得られる nilpotent Lie 代数である. 集合 V, E と写像 $f: E \rightarrow V \times V$ の組 (V, E, f) を有向単純グラフという. V の元を頂点といい, E は頂点の対の集合であり, その元を辺という. $f: E \rightarrow V \times V$ は, 辺の始点と終点を定める写像である.

定義 2.2 (Dani-Mainkar, [2]) 有向単純グラフ (V, E, f) に対して,

$$\mathfrak{n} := \text{span}(V \cup E),$$

$$[x, y] = \begin{cases} e & (x, y \in V, f(e) = (x, y)), \\ -e & (x, y \in V, f(e) = (y, x)), \\ 0 & (\text{その他}), \end{cases}$$

とすると, 2-step nilpotent Lie 代数を得る.

定理 2.3 (Lauret-Will, [5]) グラフから得られる Lie 代数が, 代数的 Ricci soliton を許容するための必要十分条件は, グラフが “positive” のときである.

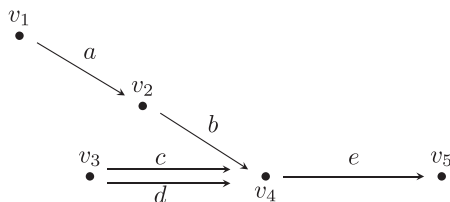
3 quiver から得られる Lie 代数

quiver とは, 多重辺とループを許す有向グラフのことで, 次のように定義する.

定義 3.1 集合 V, E , 写像 $s, t: E \rightarrow V$ に対して, 組 $Q = (V, E, s, t)$ を quiver という. V の元を 頂点, E の元を 辺, $\alpha \in E$ に対して, $s(\alpha)$ を 始点, $t(\alpha)$ を 終点 という.

定義 3.2 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in E$ に対して, $t(\alpha_i) = s(\alpha_{i+1})$ ($1 \leq i \leq n-1$) であるとき, 辺の列 $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ が 道 であるという. このとき, n を 道の長さ という.

例 3.3 $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, E = \{a, b, c, d, e\}$ とし, $s(a) = v_1, s(b) = v_2, s(c) = v_3, s(d) = v_3, s(e) = v_4, t(a) = v_2, t(b) = v_4, t(c) = v_4, t(d) = v_4, t(e) = v_5$ とすると quiver となる. これを図示すると, 次のようになる.



この quiver の道は, $a, b, c, d, e, ab, be, ce, de, abe$ の 10 個.

quiver Q の道 $x = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$ に対して, $s(x) := s(\alpha_1)$ を道 x の始点といい, $t(x) := t(\alpha_n)$ を道 x の終点という.

定義 3.4 quiver $Q = (V, E, s, t)$ に対して, Q のすべての道の集まりを $\text{Path}(Q)$ とし, $\mathfrak{n}_Q$ を次で定める:

$$\mathfrak{n}_Q := \text{span}_{\mathbb{R}} \text{Path}(Q).$$

また, $x, y \in \text{Path}(Q)$ に対して, 積と括弧積を

$$x \cdot y = \begin{cases} xy & (t(x) = s(y)), \\ 0 & (t(x) \neq s(y)), \end{cases} \quad [x, y] = x \cdot y - y \cdot x$$

と定めると, $\mathfrak{n}_Q$ は $[\cdot, \cdot]$ に関して Lie 代数となる. これを Q から得られる Lie 代数 という. ここで, Q のすべての道 $\text{Path}(Q)$ を, $\mathfrak{n}_Q$ の自然な基底という.

$\mathfrak{n}_Q$ に積 $\cdot$ を入れたものは道代数として既に知られている. 道代数の場合は, 頂点を長さ 0 の道として含めるのが一般的である. 今回は, 長さ 1 以上の道のみを扱う.

quiver Q の道 x に対して, $s(x) = t(x)$ であるとき, x を cycle という. 辺が有限集合である有限 quiver が cycle を含まないとき, quiver のすべての道の長さの最大値が存在する. これを quiver の長さ という.

命題 3.5 Q を cycle を含まない有限 quiver とすると, $\mathfrak{n}_Q$ は有限次元の nilpotent Lie 代数となる. また, quiver の長さが m の quiver から得られる Lie 代数は, m -step nilpotent Lie 代数である.

Q を cycle を含む quiver とすると, cycle を繰り返し通ることで無限に道が存在するので, $\mathfrak{n}_Q$ は無限次元の Lie 代数となる.

4 例

本章では, quiver から得られる Lie 代数の具体例を紹介する. 以降, quiver は図で表し, 頂点の記号は省略する.

例 4.1



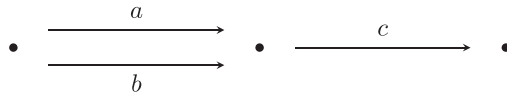
から得られる Lie 代数 $\mathfrak{n}$ は 3 次元ハイゼンベルグ代数と同型. このとき, $\mathfrak{n} = \text{span}\{a, b, ab\}$ で, 括弧積は,

$$\bullet \quad [a, b] = a \cdot b - b \cdot a = ab,$$

- $[a, ab] = 0$,
- $[b, ab] = 0$.

次は, 多重辺を含む quiver の例である.

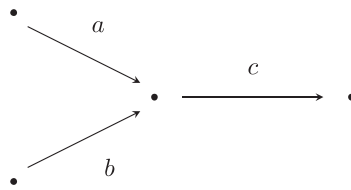
例 4.2



から得られる Lie 代数は $\mathfrak{n} = \text{span}\{a, b, c, ac, bc\}$ で, 次と同型:

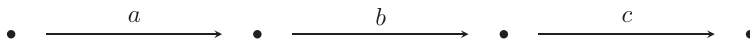
$$\left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & x_1 & x_4 \\ 0 & 0 & x_2 & x_5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

注意 4.3



から得られる Lie 代数は, 例 4.2 で得られる Lie 代数と道も辺のつながり方も同じなので, 例 4.2 で得られる Lie 代数と同じである.

例 4.4



から得られる Lie 代数は $\mathfrak{n} = \text{span}\{a, b, c, ab, bc, abc\}$ で次と同型:

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & x_1 & x_4 & x_6 \\ \hline 0 & 0 & x_2 & x_5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

例 4.1, 例 4.2, 例 4.4 は, ブロック分割から得られるので, 代数的 Ricci soliton となる内積が存在する.

注意 4.5 ブロック分割から得られる nilpotent Lie 代数には, quiver から得られないものの存在す

る. 例えば, 次の Lie 代数は quiver からは得られない:

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & x_1 & x_2 & x_5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & x_4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \mid x_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

また, quiver から得られる nilpotent Lie 代数にも, ブロック分割から得られないものが存在する.

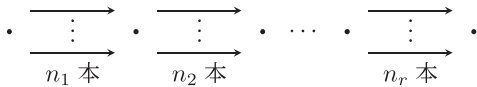
5 結果

前の章で紹介した quiver から得られる nilpotent Lie 代数は, 代数的 Ricci soliton となる内積を持つことがわかった. このことから, 次の問題を考えた.

問題 5.1 cycle を含まない有限 quiver から得られる nilpotent Lie 代数には, 代数的 Ricci soliton となる内積がいつ存在するか.

現在, 次の結果が得られている.

定理 5.2 (直線型 quiver)



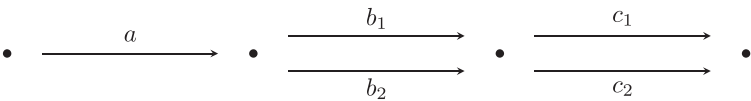
から得られる r -step nilpotent Lie 代数には, 代数的 Ricci soliton となる内積が存在する.

証明において, 代数的 Ricci soliton となる内積を帰納的に構成する.

注意 5.3 代数的 Ricci soliton となる内積は, 次のようになる.

- $r = 2$ のとき, 自然な基底を正規直交基底とする内積が代数的 Ricci soliton.
- $r \neq 2$ のとき, 自然な基底を正規直交基底とする内積は代数的 Ricci soliton とは限らない. 今回構成した代数的 Ricci soliton となる内積は, 自然な基底を直交基底とする内積である.

例 5.4

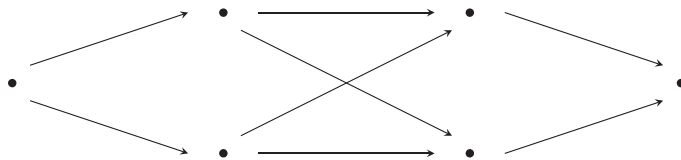


から得られる nilpotent Lie 代数は, $\langle a, a \rangle = 8/7$, その他の道のノルムは 1 とし, すべての道を直交基底とする内積に関して, 代数的 Ricci soliton となる. 一方で, 自然な基底を正規直交基底とす

る内積は代数的 Ricci soliton ではない.

定理 5.5 (2-step) quiver から得られる nilpotent Lie 代数が 2-step のときは, 代数的 Ricci soliton となる内積が存在する.

2-step のときは直線型に帰着されるので, 定理 5.5 は定理 5.2 から従う. 一方, 3-step 以上の場合には, 直線型の quiver に帰着されないものがある. 例えば, 次のような quiver から得られる Lie 代数は, 小さい quiver から得られる Lie 代数の直和には分解できない.



参考文献

- [1] Böhm, C. and Lafuente, R., Non-compact Einstein manifolds with symmetry, arXiv:2107.04210.
- [2] Dani, S. G. and Mainkar, M., Anosov automorphisms on compact nilmanifolds associated with graphs, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), no. 6, 2235–2251.
- [3] Lauret, J., Ricci soliton homogeneous nilmanifolds, Math. Ann. **319** (2001), no. 4, 715–733.
- [4] Lauret, J., Ricci soliton solvmanifolds, J. Reine Angew. Math. **650** (2011), 1–21.
- [5] Lauret, J. and Will, C., Einstein solvmanifolds: existence and non-existence questions, Math. Ann. **350** (2011), no.1, 199–225.
- [6] Nikolayevsky, Y., Einstein solvmanifolds and the pre-Einstein derivation, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), no.8, 3935–3958.
- [7] Tamaru, H., Parabolic subgroups of semisimple Lie groups and Einstein solvmanifolds, Math. Ann. **351** (2011), no. 1, 51–66.