

Applications, Lecture Notes in Mathematics No. 515 (1974), p. 40.

- 2) J. W. Miles, J. Fluid Mech. **79** (1977), 157, 171.
- 3) S. Takeno, Prog. Theor. Phys. **68** (1982), 992.
- 4) A. Nakamura, J. Phys. Soc. Japan **52** (1983), No. 3, to be published.
- 5) A. Nakamura, 物性研究 **39** (1982), No. 2, p. 125.
- 6) R. Hirota, J. Phys. Soc. Japan **33** (1972), 1459; **35** (1973), 1566. K. K. Kobayashi and M. Izutsu, J. Phys. Soc. Japan **41** (1976), 1091.
- 7) R. Hirota, J. Phys. Soc. Japan, **50** (1981), 3785.

ソリトンとカオス

東大物性研 今田正俊

非線型現象についての最近の研究を振り返ってみると、著しい進歩をとげてきた二つの分野がある。一つはソリトンに関する研究であって、この研究を通じて明らかにされてきたことは、非線型系の持つ秩序性、整合性、あるいは相関がいつまでも失われないような運動形態といったような側面であった。もう一方の潮流というのはカオスについての研究である。比較的自由度の少ない非線型力学系を調べることによって、わかってきたことは、非線型系が内在的に持っている、無秩序性、不安定性、乱雑さである。それぞれの場合に対象としてゐる系やモデルが異なっているとはいえ、二つの独立した研究の流れは、おそらく、非線型という一つの出発点から帰結する全く対照的な性格を明らかにしてきている。

カオスの研究では、系を自由度の少ない場合に帰着させ、簡単な力学系の問題として扱うことが多い。もしも調べようとする物理量が空間座標に依存していたりして、自由度が大変多いかあるいは無限大であるような場合は、例えば空間変化が小さい等の近似がしばしば用いられる。しかしながら、自由度の多い多体系においては、欠陥や渦のような空間構造が本質的な役割を果たすことは多い。実際、乱流状態への転移にともなって、空間変化の激しい状態が生ずることがあるのはよく知られている。ここで私が考察する問題は、自由度の少ない系に帰着すると見落としてしまいかねない形でのカオスの発生、すなわち、空間構造によって引き起こされるカオスの問題である。ソリトンを持つ完全可積分系として知られる一次元系に、摂動を加えることにより、カオス的なふるまいがどのように生まれてくるかを考えてみよう。

例として、サイン・ゴルドン系に摂動を加え、系の時間発展を数値計算で調べてみる。加える摂動としては二通りの場合を考える。一つは系のエネルギーが保存されるような摂動で、次のハミルトニアンを考えよう²⁾。

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1 \quad (1)$$

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2}(\phi_t^2 + c_0^2 \phi_x^2) + 1 - \cos \phi \quad (2)$$

$$\mathcal{H}_1 = (1-R)^2 \frac{1 - \cos \phi}{1+R^2+2R \cos \phi} - (1 - \cos \phi) \quad (3)$$

ここで、 c_0 は定数であり、添字の t と x はそれぞれ、時間と空間についての微分をあらわす。 R は完全可積分性からのずれをあらわす量であり、 $R=0$ のとき (1) はサイン・ゴルドン系に帰着する。もう一つの例としては散逸があるような非保存的な摂動の加えられた、次の運動方程式を考察する。

$$\phi_{tt} - c_0^2 \phi_{xx} + \sin \phi = A \sin \omega t - r \phi_t \quad (4)$$

右辺第一項は時間的に変動する外場の項であり、第二項は散逸をあらわす。

ここで我々はカオスを次のような状態として定義する。すなわち、初期状態として位相空間内で互いにきわめて近い二つの状態の軌道が、時間とともに指数関数的に離れていく状態である。この二つの軌道間の距離を $\delta S(t)$ とするとき、カオスは次式で定義される最大リャプノフ指数 λ が正である状態として定義してもよい。

$$\lambda = \text{Max} \left[\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \delta S(0) \rightarrow 0}} \frac{1}{t} \ln \left\{ \frac{\delta S(t)}{\delta S(0)} \right\} \right] \quad (5)$$

但し Max は、初期条件の差 $\delta S(0)$ を 0 に近づける極限のとり方のうち [] 内が最大値を与えるような方向から極限をとることを指定する。一般には数値計算では微小な $\delta S(0)$ を任意に選んだときに、確率 1 で最大リャプノフ数が得られる。今の場合、軌道間の距離は次式で与えられる。

$$\delta S(t) \equiv \sqrt{\frac{1}{L} \int_0^L [\delta S(x, t)]^2 dx} \quad (6)$$

$$\delta S(x, t) \equiv \sqrt{[\delta \phi(x, t)]^2 + [\delta \phi_t(x, t)]^2} \quad (7)$$

ここで、 $\delta S(x, t)$ は局所的な軌道のずれであり、 $\delta \phi$ と $\delta \phi_t$ は二つの軌道での ϕ と ϕ_t の差で

ある。

まず、(1)~(3)式で与えられる保存系に対して、分子動力学法を用いて系の時間発展を数値的に計算し、 $\delta S(t)$ と $\delta S(x,t)$ を求めた結果について議論しよう。純粋なサイン・ゴルドン系($R=0$)については、 $\log \delta S(t)$ の時間発展を調べてみると、 $\delta S(t)$ は時間とともに指数的に増加するようなふるまいを示さない。これは完全可積分性の反映であるが、 R を小さいけれども有限の値にすると、挙動は大きく変わってくる。初期条件として2ソリトン解から出発し、 $\delta\phi(x,t)=10^{-5}$ 、 $\delta\phi_t(x,t)=0$ 、 $R=-0.05$ ととったときの $\log \delta S(t)$ の時間依

存性が図1に示されている。図1では、はっきりとカオス的なふるまいが見られるが、(すなわち、 $\log \delta S(t)$ は t に対して線型に増加しているが)このふるまいの原因を局所的なずれ $\delta S(x,t)$ を調べることによって考えてみよう。

数値計算での系のサイズは $0 \leq x \leq$

400であり、周期的境界条件のために、2ソリトンは図2のように $x=0$ と $x=200$ で衝突をくり返している。 $\log \delta S(x=0,t)$ を見てみよう(図3)。

例えば $t=560$ 付近で図2に見られるようにソリトンと反ソリトンの衝突が $x=0$ で起きているが、このとき、図3には鋭いスパイクとともに $\log \delta S(x=0,t)$ の階段状の増加が見られる。スパイクの方は図4に示されるように $\log \delta S(x=80,t)$ にも見られる(例えば $t \simeq 670$)。このスパイクの原因はその時刻にソリトン或いは反ソリトンが通過したことにある。一方図3に見られた $\log \delta S$ の階段状の増加は、図4ではスパイクとは異なった時刻に観測されている(例えば $t \simeq 575$)。図4を

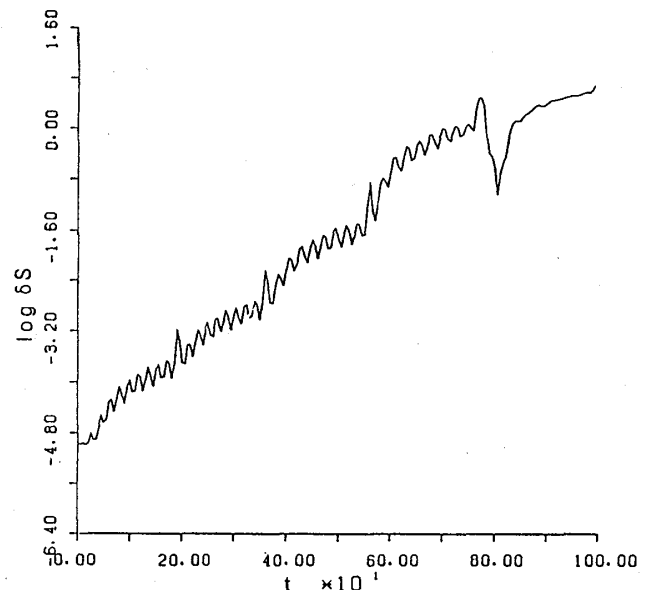


Fig.1

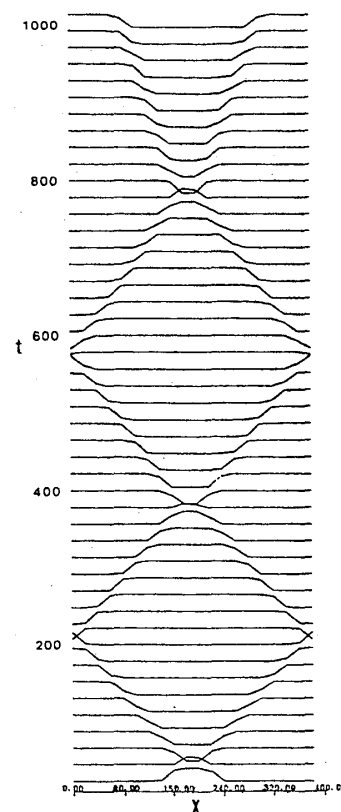


Fig.2

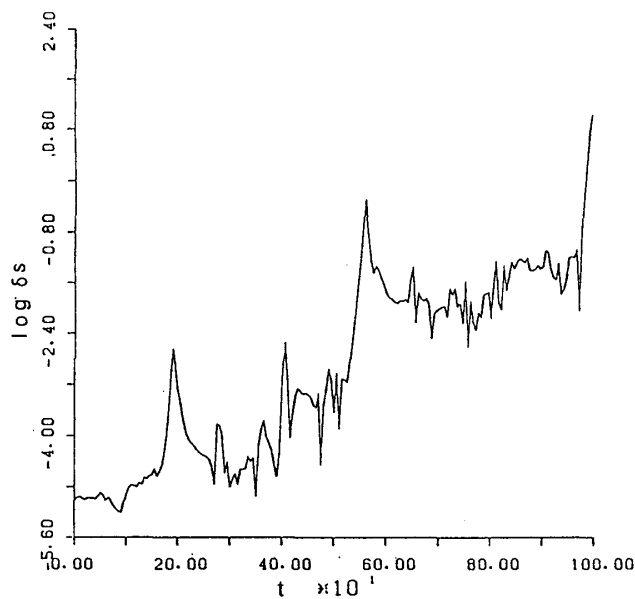


Fig.3

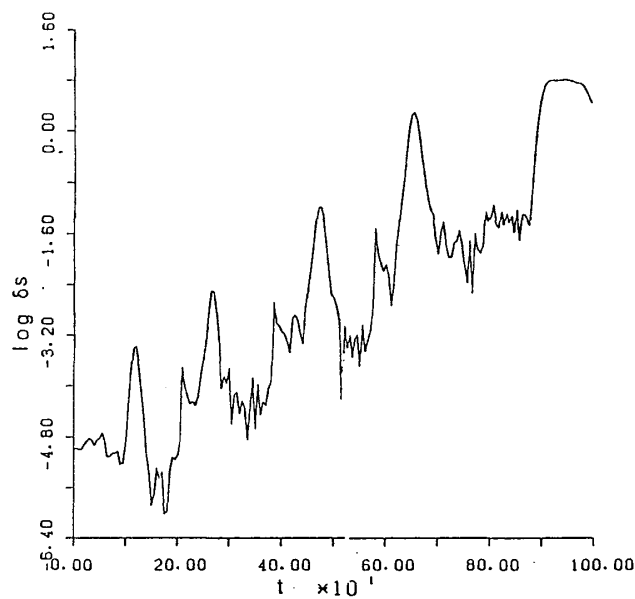


Fig.4

見ていてわかることは、階段状の増加のくり返しによって $\log \delta S(x, t)$ が全体として時間の線型な増加関数となっていることである。この階段状の増加は、いくつかの場所でしらべてみることにより、ソリトンと反ソリトンの衝突時に発生し、 c_0 に近い速さで空間的に伝播していつていることがわかる。したがって図1にみられるカオス的なふるまいは、実はソリトンの衝突が引き起こしていることがわかるのである。このことは、今の場合よりも初期エネルギーを大きくして、カオスを引き起こしやすくしても、2ソリトンの存在しないような初期条件から出発すると、 $\delta S(t)$ の指数関数的な増加が見られないことから確認される。数値計算では2ソリトン状態から出発した場合をしらべたわけであるが、一般に、無限に長い系の場合には、長さあたり有限のエネルギーを与えれば、有限な密度のソリトンが存在し、それらが衝突をくり返していることが期待される。衝突の頻度は別の考察から決めなければならないが、いずれにせよ、衝突のたびに生ずる軌道不安定性は空間を伝播し、全体として $\delta S(t)$ の指数関数的な増加が生み出されることは十分に期待される。ここで一つことわっておかなければならないことは、図1のグラフの傾きは必ずしも $R = -0.05$ におけるリャプノフ指数の値と定量的な関係はないということである。なぜならば $R \neq 0$ の場合には、モード間のエネルギー交換が生じていて¹⁾ 2ソリトンの状態はいつかやがてソリトンの存在しない状態になり、また対生成され……ということを繰り返す、エネルギー等分配則がなりたつと考える方が自然だからである。つまり λ を決めるためには、ソリトン数のゆらぎを考慮に入れる必要がある。

今までの議論は保存系(1)~(3)の場合についてであったが、非保存系(4)の場合にも同じ

メカニズムが存在していることが数値計算からわかる。しかしながら、散逸系の場合は $r\phi_t$ の項の効果により $\log \partial S$ を減少させようとする傾向も存在するから、系がカオスになるかどうかは、ソリトンの衝突による寄与と散逸項の寄与という相反する傾向の競合の結果として考えなければならない。

前述したモード間のエネルギー交換が生じているかどうかを調べる一つの方法は、かつてフェルミ達の行なった有名な再帰現象の発見の数値実験の方法を非線型なノーマル・モードを出発点とするために拡張して、前記の摂動を加えたサイン・ゴルドン系について調べてみることである。紙数の関係で詳しい記述を省略するが興味をお持ちの方は文献 1 を見ていただきたい。

我々の結論は、摂動を加えられたソリトンが相互作用することによってカオスが生ずることがあるということである。そもそも“ソリトン”というのは非線型系におけるコヒーレントな性質を担っている典型的な実体であると考えれば、この結論は多少奇妙にきこえるかもしれない。しかし非線型性がなければカオスは生じないし、ソリトンというのは系の非線型性をもっとも具現化しているということに気づけば、この結論はむしろ大変、自然なことであることがわかる。我々が調べたのは限られた例であったが、しかし一般に無限自由度系、特に空間依存性のあるような物理量におけるカオスを問題にするとき、空間的な不均一構造、特に欠陥、渦等の役割を見落としてはならないだろうということはこの経験からすぐに気付くことである。カオスの発生における空間の不均一性や非線型励起の役割についての研究はこれからの課題であると思われる。以上、短い紙数で書き落とした点、不明な点については文献 1 を参照されたい。

参考文献

- 1) M. Imada: submitted to J. Phys. Soc. Jpn.

ソリトンを持つ非線形分散波動のカオス

名大・理 野 崎 一 洋

§ 1. はじめに

無限自由度のソリトン系が可積分だということは驚くべきことではあるが、一般にそのような系は特別な場合である。従って、その可積分性が摂動によって破れた場合、ソリトンが