

8の字結び目の surgery で出来る homology spheres

筑波大学 高橋 元男

[6]において、私は、8の字結び目の surgery で出来る Bing の空間([1]参照)が、2つの相異なる結び目の 2-fold branched covering として表されることを示した。同様の例は Birman, González-Acuña, Montesinos [2] によって、また Akbulut によっても得られているという。本稿では上の結果を拡張して、8の字結び目の surgery で得られる すべての homology spheres が相異なる2つの結び目の 2-fold branched covering として表されることを示す。

8の字結び目の surgery で homology sphere が出来るのは、8の字結び目の regular neighbourhood をくりぬいて、その meridian を図1の様な loop になるように貼りかえた時である。

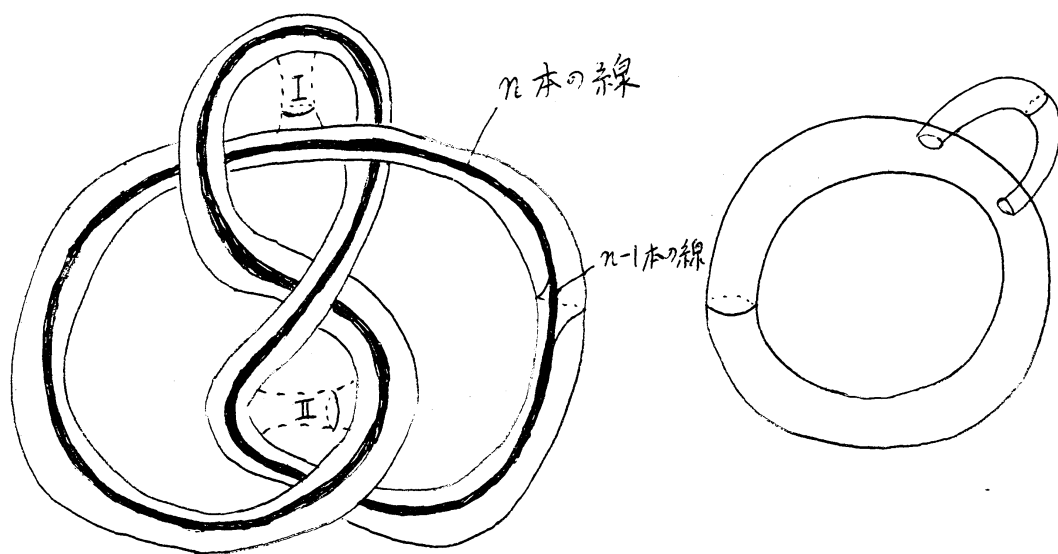


図 1

そこで、この様にして得られる空間 M の genus 2 の Heegaard 分解を作ろう。それは 2 通りの方法で出来る。

一つは、図 1 の I の handle をくりぬき、既にくりぬいた、8 の字結び目の regular neighbourhood につけ加えることによって、もう一つは I の handle の代りに II の handle をつけ加えることによってである。

この時、図の様にもう一つの meridian が出来る。先ず $n=1$ の場合について、2 つの meridian がどのような様になるか調べて見よう。

I の handle をくりぬいたことにより (S^3 から) の補集合は ~~図~~ 図 2 の様になる。それを更に変形していくと図 3 になる。図 3 の下方の twist をとると図 4 の様になる。

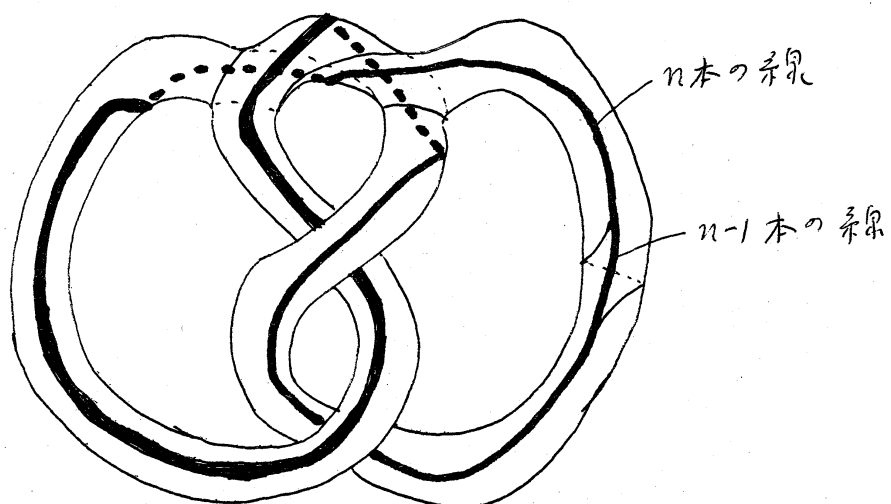


図 2

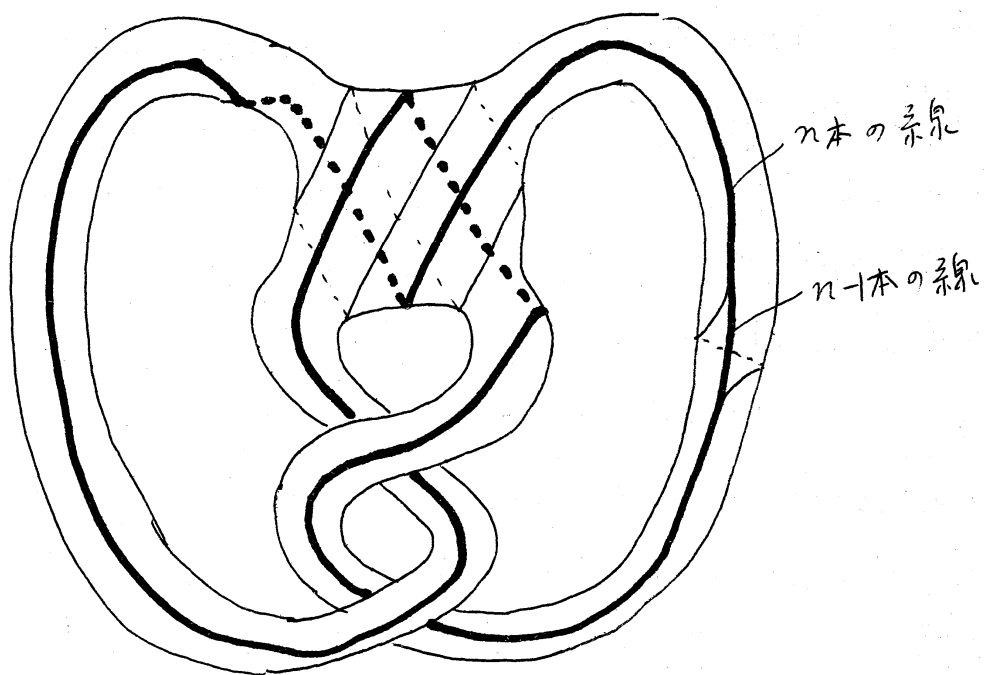


図 3

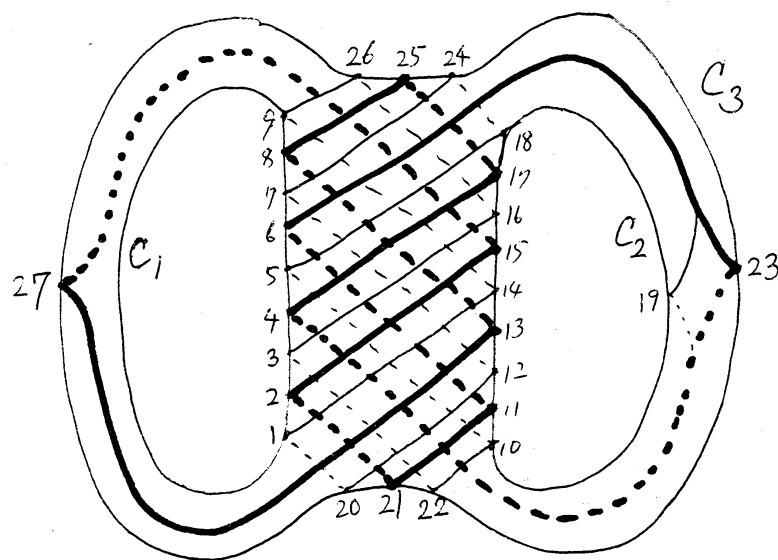


図 4

図4の handle body の complement も handle body であるからこれが実際に Heegaard 分解を与えている。そこで、この Heegaard 分解から S^3 の 2-fold branched covering を作る。

それには 図4の3つの ~~軸~~ meridian disks C_1, C_2, C_3 で切って 2つの部分(即ち表~~と~~裏)に分け対称^軸性を見つけなければならぬ。 C_1, C_2, C_3 で切ると 図5(表)と 図6(裏)の様になり対称軸が点線として見つかる。

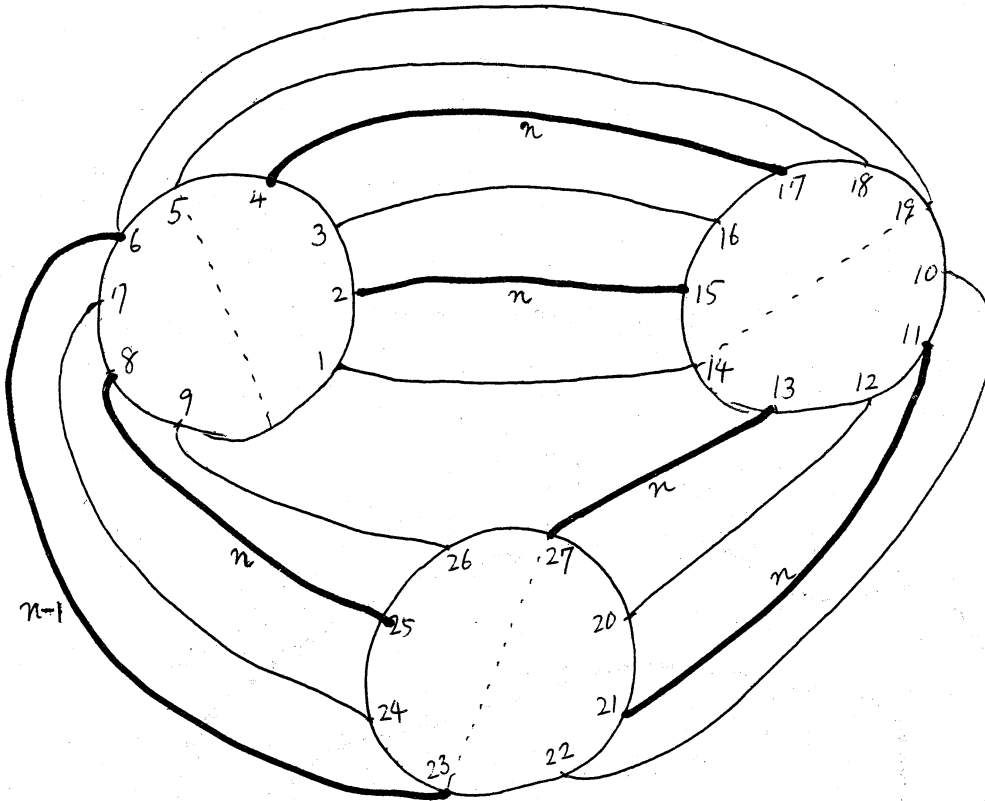


图 5

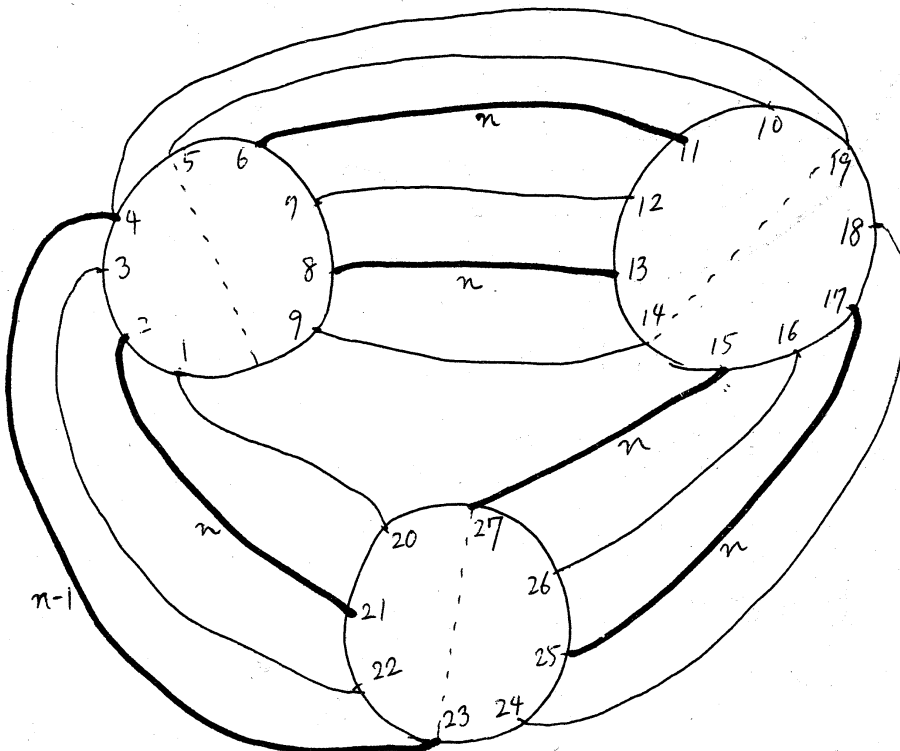


图 6

これから 3-bridge knot を作ると図 7 の様になる。ただし meridian を 2 つしかとっていいから完全な knot にはなっていないが、残りの 2 つの頂点を下道で結べば完全な knot になる。(結び方は色々あるが出来る knot は同じである。)

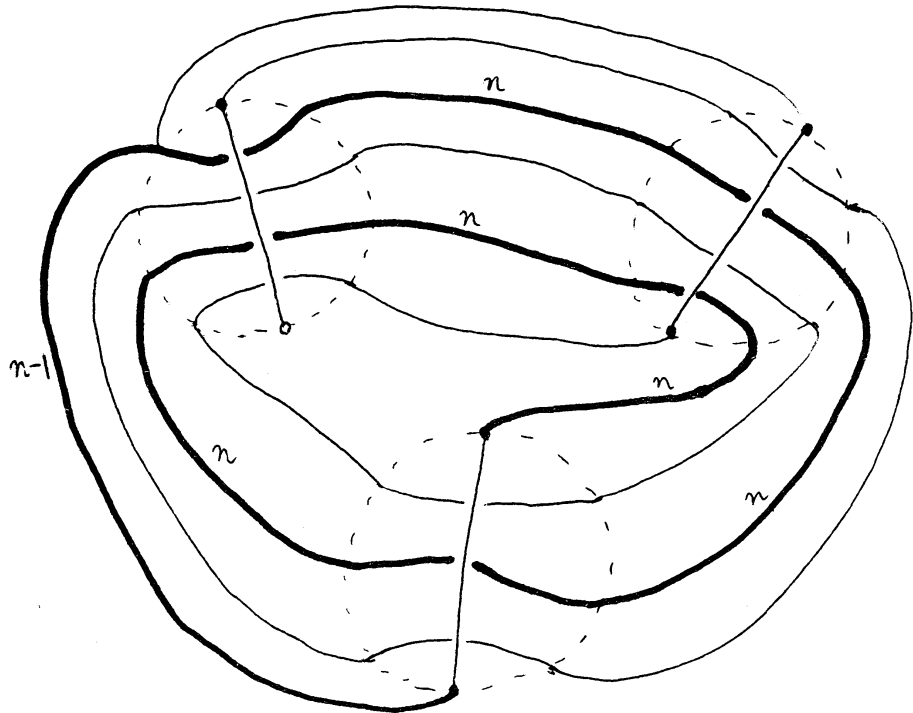
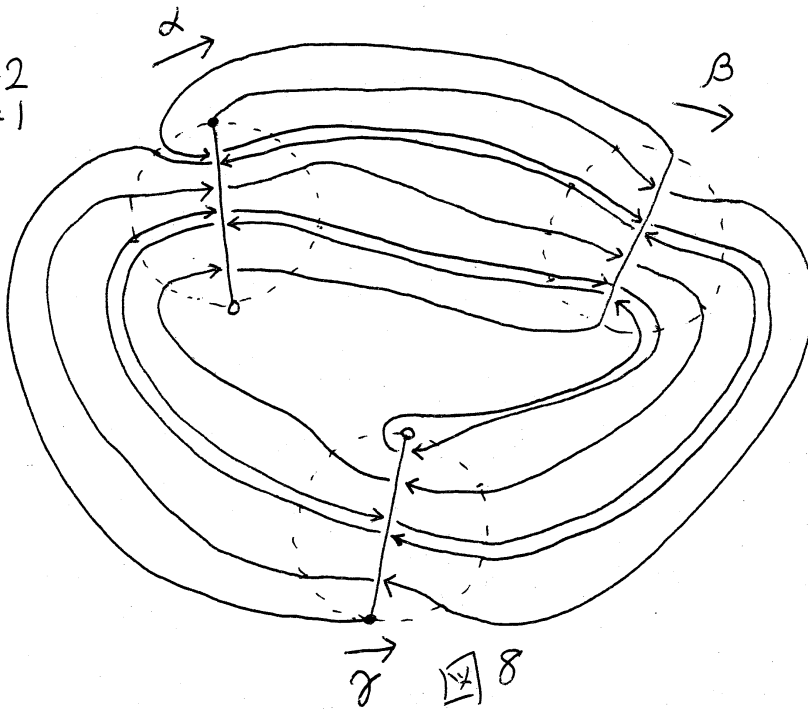


図 7

今度は、出来た knot の knot group の関係式を出し、それから Alexander 多項式を計算する。

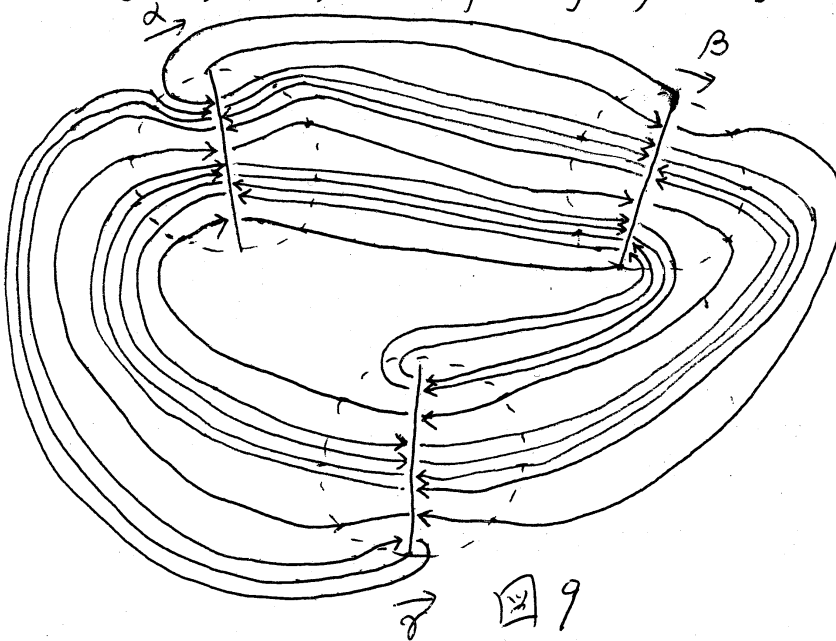
n が偶数の場合と奇数の場合を分けて行なう。最初に $n=2$ の場合を行なう。 $n=2, 4$ の場合の図を示しておこう。(図 8, 9)

($n=2$
 $k=1$)



$$\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha = \beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta$$

$$\beta\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1} = \alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma$$



$$\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha = \beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta$$

$$\begin{aligned} & \beta(\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1})\gamma(\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}) \\ &= (\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma)(\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma) \end{aligned}$$

Knot group の generators を図の α, β, γ と
して knot group の relations を計算すると, それ
ぞれ図の下に書いているようになる.

一般の $n=2k$ の場合 relations は次の様になる。

$$I: \quad \overset{1}{\alpha} \overset{2}{\beta} \overset{1}{\gamma^{-1}} \overset{2}{\alpha} \overset{3}{\beta} \overset{2}{\gamma^{-1}} \overset{3}{\alpha} = \overset{1}{\beta} \overset{0}{\gamma^{-1}} \overset{1}{\alpha} \overset{2}{\beta} \overset{1}{\gamma^{-1}} \overset{2}{\alpha} \overset{3}{\beta}$$

$$\text{II: } \beta(\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma)^{k-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1} \\ = (\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma)^k$$

これから Fox [5] の方法を使って Alexander 多項式を計算すると 次の様になる.

アーベル化を $*$ で表し $\alpha^* = \beta^* = \gamma^* = x$ とおくと

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)^* = (1+x+x^2) - (1+x) = x^2$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \beta}\right)^* = (x+x^2) - (1+x+x^2) = -1$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha}\right)^* &= k(x+x^2-x-1) - k(1+x-1-x^{-1}) \\ &= k(x^{-1}-1-x+x^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathbb{I}}{\partial \beta}\right)^* &= (1+k(x^2+x^3-x^2-x)) - k(x+x^2-x-1) \\ &= (k+1) - kx - kx^2 + kx^3\end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} \left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)^* & \left(\frac{\partial II}{\partial \alpha}\right)^* \\ \left(\frac{\partial I}{\partial \beta}\right)^* & \left(\frac{\partial II}{\partial \beta}\right)^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & kx^{-1} - k - kx + kx^2 \\ -1 & (k+1) - kx - kx^2 + kx^3 \end{vmatrix}$$

第一行に x を掛けると

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x^3 & kx - k - kx^2 + kx^3 \\ -1 & (k+1) - kx - kx^2 + kx^3 \end{vmatrix}$$

$$= k - kx - kx^2 + (2k+1)x^3 - kx^4 - kx^5 + kx^6$$

これが求める Alexander 多項式である。

次に $n=2k+1$ の場合を行なう。 $n=3$ $k=1$ の場合

を図示すると

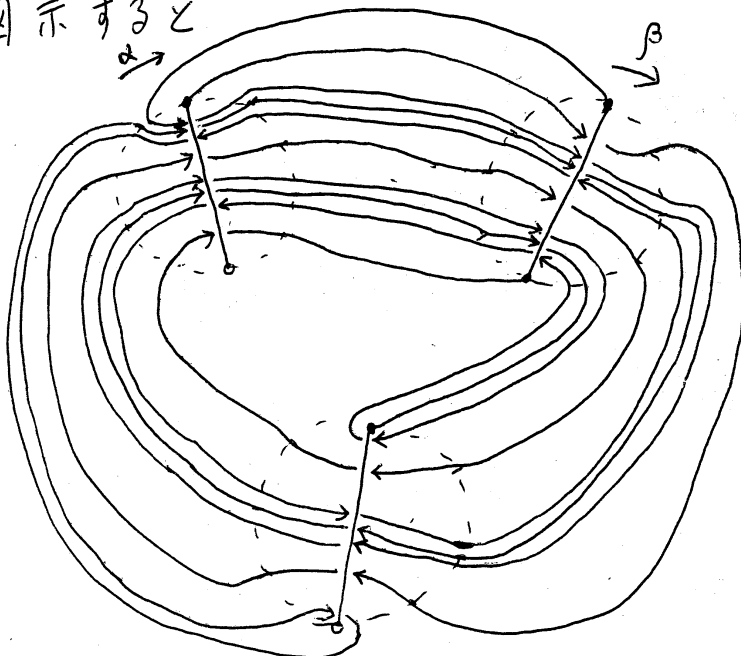


図 10

$$\begin{aligned}
 \alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma &= \beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta \\
 \beta\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma\alpha\beta \\
 &= \alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma
 \end{aligned}$$

一般の場合には knot group の relations は

$$I: \alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha = \beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta$$

$$\begin{aligned}
 II: \beta(\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1})^k \alpha\beta\gamma\alpha\beta \\
 = (\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1})^k \alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma
 \end{aligned}$$

Alexander 多項式を計算すると

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)^* = (1+x^3+x^6) - (x^2+x^5) = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6$$

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \beta}\right)^* = (x+x^4) - (1+x^3+x^6) = -1 + x - x^3 + x^4 - x^6$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial II}{\partial \alpha}\right)^* &= \{k(x+x^4-x^5-x^2) + x+x^4\} \\
 &\quad - \{k(1+x^3-x^4-x) + 1+x^3\} \\
 &= -(k+1) + (2k+1)x - kx^2 - (k+1)x^3 + (2k+1)x^4 - kx^5
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial II}{\partial \beta}\right)^* &= \{1+k(x^2+x^5-x^6-x^3) + x^2+x^5\} \\
 &\quad - \{k(x+x^4-x^5-x^2) + x+x^4\} \\
 &= 1 - (k+1)x + (2k+1)x^2 - kx^3 - (k+1)x^4 + (2k+1)x^5 - kx^6
 \end{aligned}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)^* & \left(\frac{\partial II}{\partial \alpha}\right)^* \\ \left(\frac{\partial I}{\partial \beta}\right)^* & \left(\frac{\partial II}{\partial \beta}\right)^* \end{vmatrix}$$

$$= -k + (2k+1)x - (k+1)x^2 - kx^3 + (2k+1)x^4 - (k+1)x^5 + x^6 \\ - (k+1)x^7 + (2k+1)x^8 - kx^9 - (k+1)x^{10} + (2k+1)x^{11} - kx^{12}$$

これがこの場合の Alexander 多項式である。

次に handle II をくりぬいた場合について調べて見よう。説明は不要と思うので図のみを掲げる。

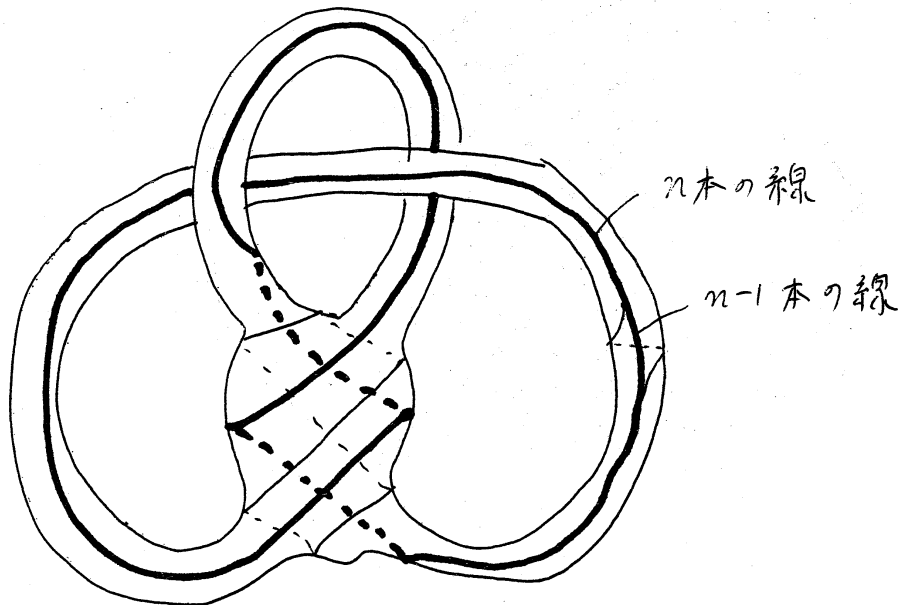


図 11

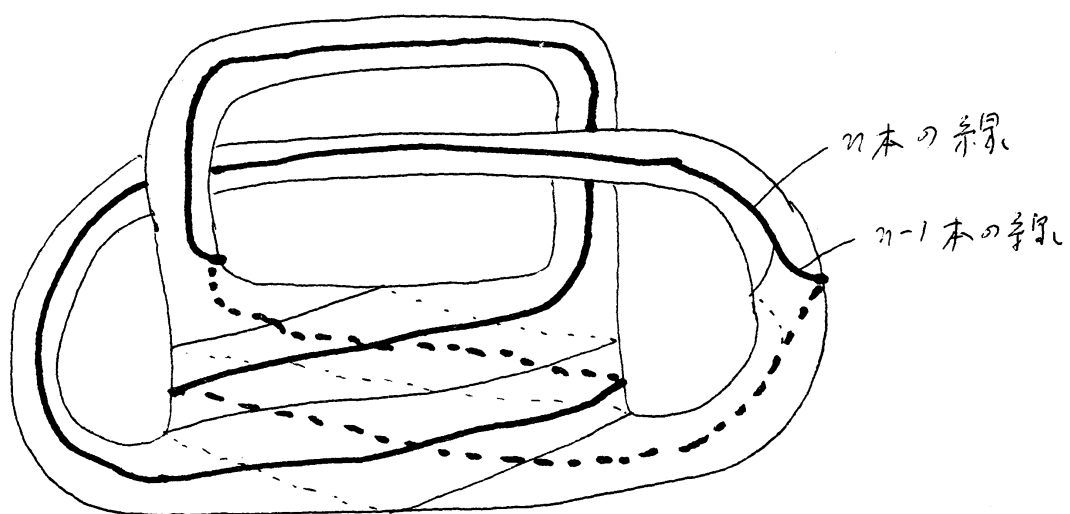


図 12

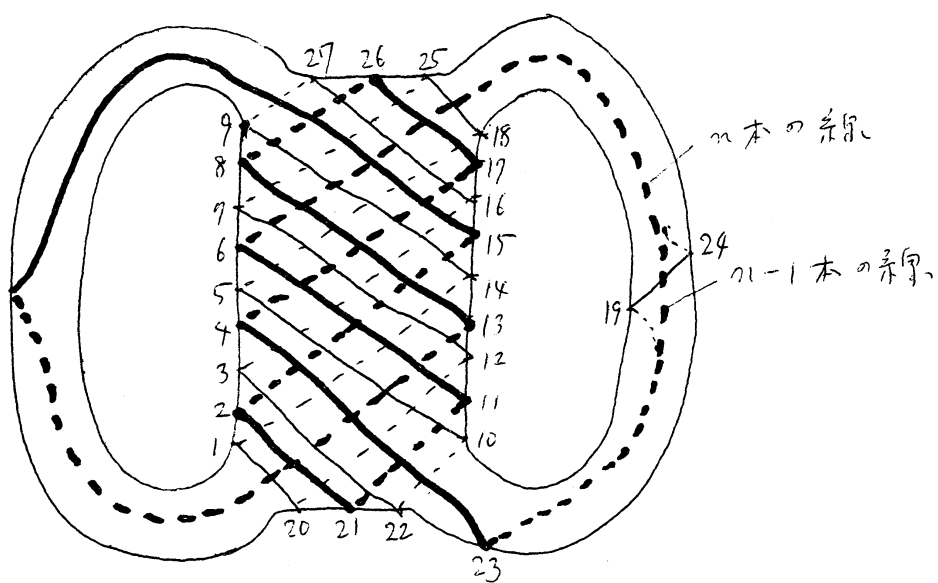


図 13

これから 2-fold branched covering を
作ると

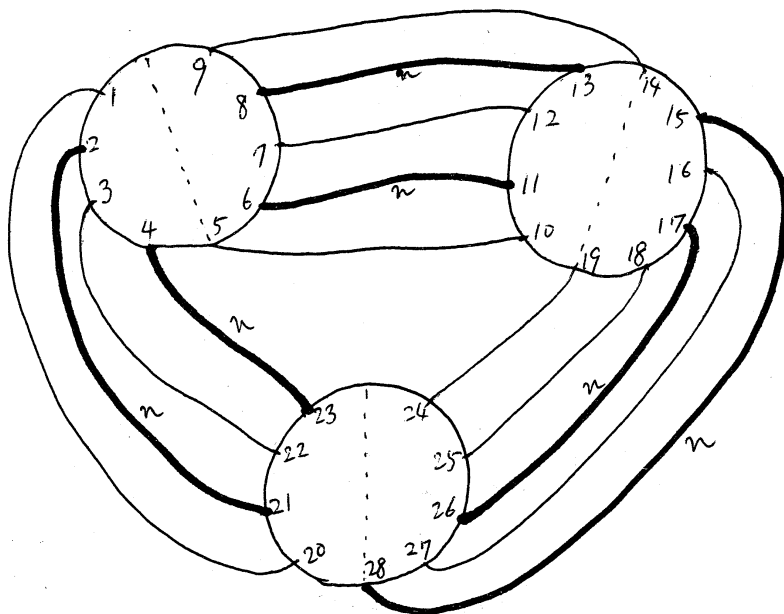


图 14

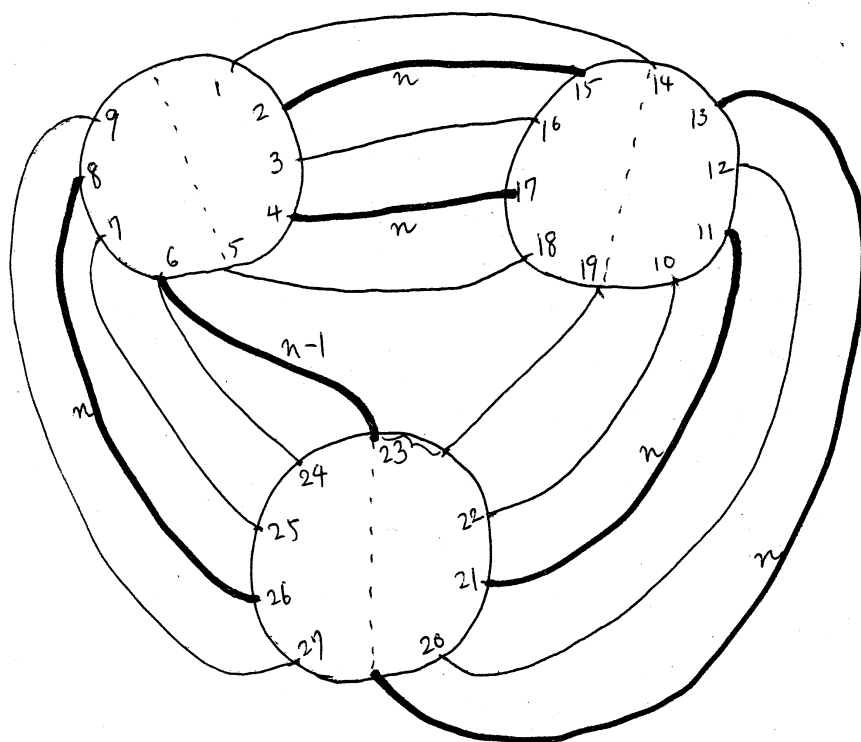


图 15

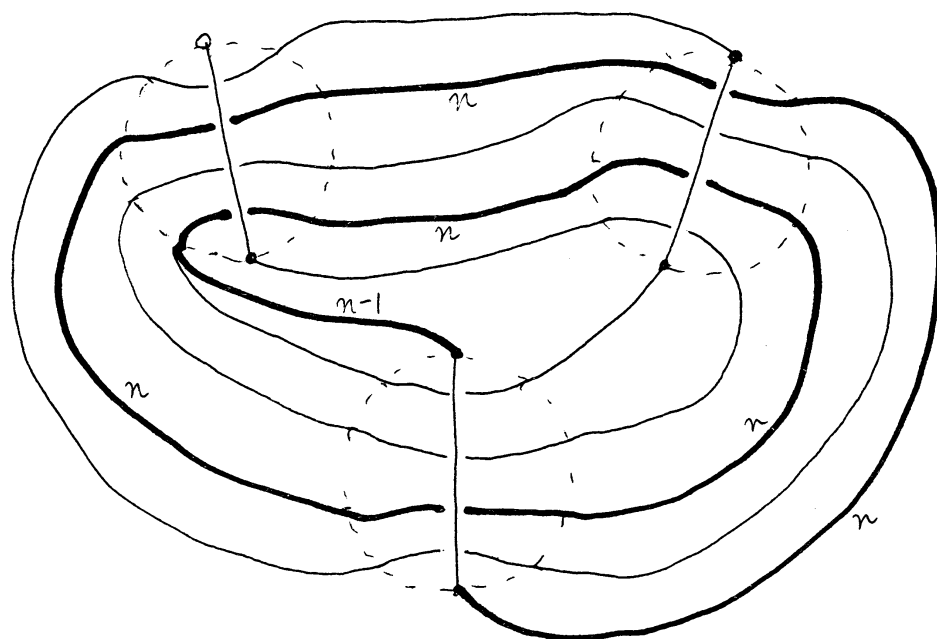


図 16

これがこの場合の knot である. $n=2$ の場合は図 17 となる

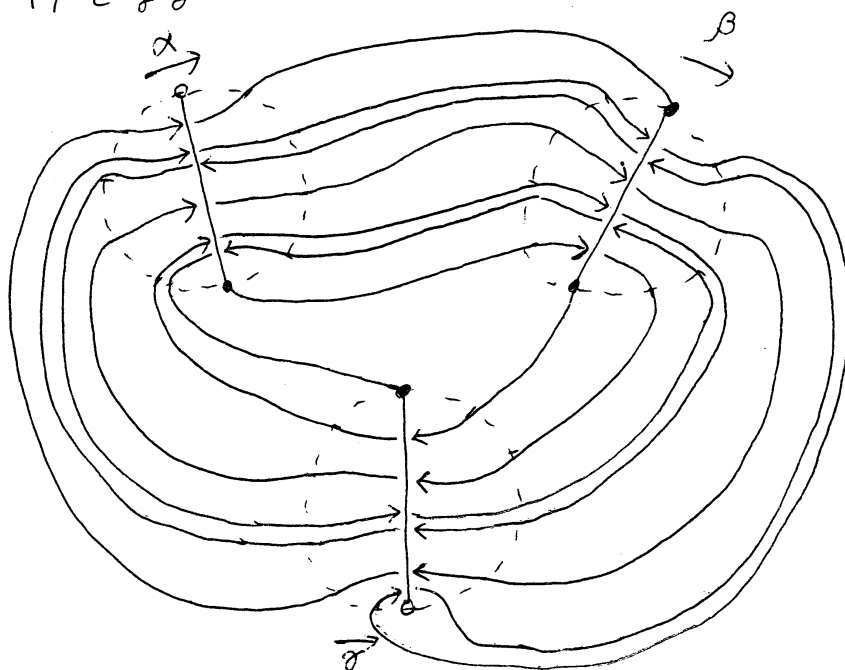


図 17

$$\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha = \beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta$$

$$\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1} = \gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma$$

一般の $n=2k$ の場合は knot group の relations は

$$I: \alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha = \beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta$$

$$II: \beta(\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1})^k \\ = (\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma^{-1}\alpha\beta\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\beta^{-1}\alpha^{-1})^k\gamma$$

Alexander 多項式を計算すると

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)^* = x^2 \quad \left(\frac{\partial I}{\partial \beta}\right)^* = -1$$

$$\left(\frac{\partial II}{\partial \alpha}\right)^* = k(1+x-x^2-x) - k(x^{-1}+1-x-1) \\ = -kx^{-1} + k + kx - kx^2$$

$$\left(\frac{\partial II}{\partial \beta}\right)^* = (1+k(x+x^2-x^3-x^2)) - k(1+x-x^2-x) \\ = (1-k) + kx + kx^2 - kx^3$$

$$\Delta_2 = x \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)^* & \left(\frac{\partial II}{\partial \alpha}\right)^* \\ \left(\frac{\partial I}{\partial \beta}\right)^* & \left(\frac{\partial II}{\partial \beta}\right)^* \end{vmatrix}$$

$$= -k + kx + kx^2 + (1-2k)x^3 + kx^4 + kx^5 - kx^6$$

k の任意の値に対し $\Delta_1 \neq \Delta_2$. 故に 2つの knots は異なる. 従って M はこれらの相異なる

2つの knots の 2-fold branched covering と
なる。

$n=3$ の場合の knot は

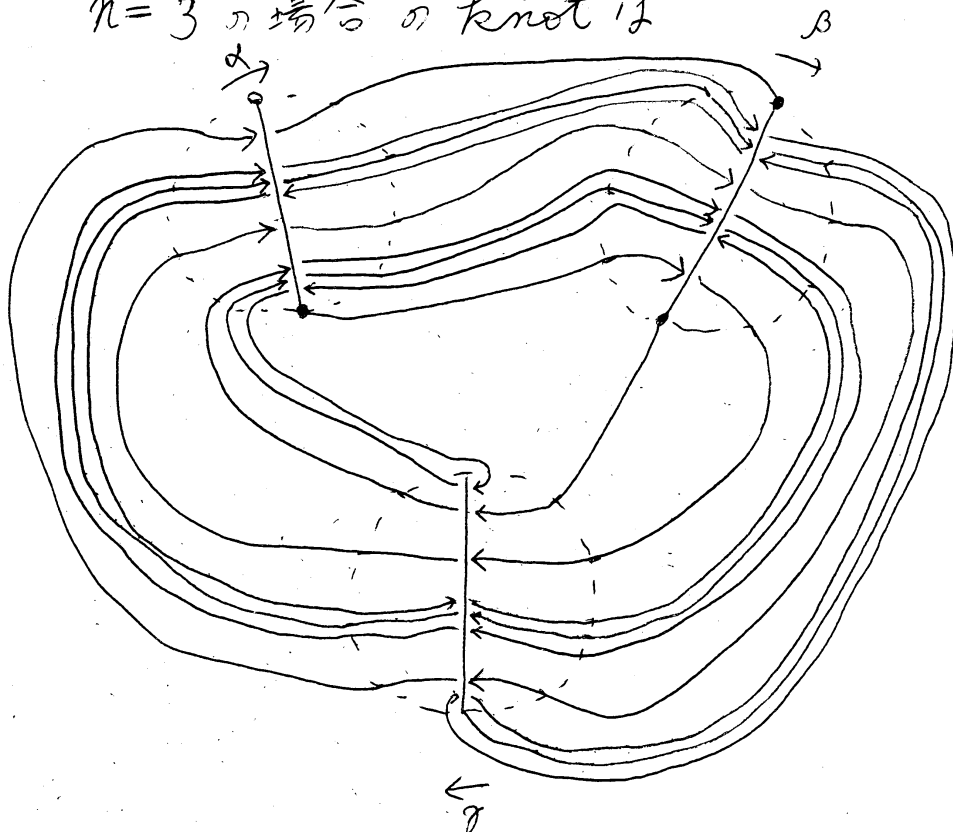


図 18

$$\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha = \beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta$$

$$\beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta$$

$$= \gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha^{-1}\beta^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma$$

となる。一般の $n=2k+1$ の場合には knot
group の relations は

$$I: \alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha = \beta\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta$$

$$\begin{aligned} II: & \beta(\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1})^k\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta \\ & = (\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1})^k\gamma\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

これから Alexander 多項式を計算すると

$$\left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)^* = 1 - x^2 + x^3 - x^5 + x^6, \quad \left(\frac{\partial I}{\partial \beta}\right)^* = -1 + x - x^3 + x^4 - x^6$$

$$\left(\frac{\partial II}{\partial \alpha}\right)^* = \{k(x^2 + x^5 - x^4 - x) + x^2 + x^5\}$$

$$- \{k(x + x^4 - x^3 - 1) + x + x^4\}$$

$$= k - (2k+1)x + (k+1)x^2 + kx^3 - (2k+1)x^4 + (k+1)x^5$$

$$\left(\frac{\partial II}{\partial \beta}\right)^* = \{1 + k(x^3 + x^6 - x^5 - x^2) + x^3 + x^6\}$$

$$- \{k(x^2 + x^5 - x^4 - x) + x^2 + x^5\}$$

$$= 1 + kx - (2k+1)x^2 + (k+1)x^3 + kx^4 - (2k+1)x^5 + (k+1)x^6$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial I}{\partial \alpha}\right)^* & \left(\frac{\partial II}{\partial \alpha}\right)^* \\ \left(\frac{\partial I}{\partial \beta}\right)^* & \left(\frac{\partial II}{\partial \beta}\right)^* \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} & = (k+1) - (2k+1)x + kx^2 + (k+1)x^3 - (2k+1)x^4 + kx^5 + x^6 \\ & + kx^7 - (2k+1)x^8 + (k+1)x^9 + kx^{10} - (2k+1)x^{11} + (k+1)x^{12} \end{aligned}$$

この場合も $\Delta_1 \neq \Delta_2$.

故にすべての場合 M は相異なる2つの knots

の 2-fold branched covering となることを示した。

参考文献

[1] R. H. Bing : Poincaré 予想に関連した 3次元多様体のトポロジーの諸相, 現代の数学 II, 130-176.

[2] J. S. Birman, F. González-Acuña, and J. M. Montesinos : Heegaard splittings of prime 3-manifolds are not unique, Michigan Math. J. 23 (1976), 97-103.

[3] J. S. Birman and H. M. Hilden : The homeomorphism problem for S^3 . Bull. Amer. Math. Soc, 79 (1973), 1006-1010.

[4] J. S. Birman and H. M. Hilden : Heegaard splittings of branched coverings of S^3 . Trans. Amer. Math. Soc. 213 (1975), 315-352.

[5] R. H. Crowell and R. H. Fox : Introduction to knot theory. 1963 Boston.

[6] M. Takahashi : Two knots with the same 2-fold branched covering space. to appear in Yokohama Math. J.

[7] M. Takahashi : An alternative proof of Birman-Hilden-Viro's theorem. to appear in Tsukuba J. of Math.