

トーラス上の保測変換

京大数理研 十時 東生

エルゴード理論におけるトピックスの中で, 2次元トーラス $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上に典型的な例をもつ重要な話題として, 微分方程式から定まる flow と群同型をとりあげたい。

§1. 微分方程式から定まる flow

2次元トーラス $\mathbb{T}^2$ 上の微分方程式

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = g(x, y),$$

(f, g は滑らかで $f^2 + g^2 > 0$) から定まる flow $\{R_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ で, 不変(確率)測度

$$(1') \quad dm(x, y) = M(x, y) dx dy$$

を持つものは, 標準形

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha, & \frac{dy}{dt} = 1 \\ d\nu(x, y) = dx dy \end{cases}$$

に同型かという問題を考える。(2)から定まる flow を $\{\hat{T}_t\}$ とする。 $\{R_t\}$ と $\{\hat{T}_t\}$ が同型というのは, bijection φ があって, $\varphi \circ R_t = \hat{T}_t \circ \varphi$ ($\forall t \in \mathbb{R}$) かつ $m \circ \varphi^{-1} = \nu$ が成り立つことをいう。

系 (1) に対し rotation number γ が定まり (γ は無理数と仮定する), (1) は次の系に同型である (Poincaré, Kolmogorov).

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma}{F(x, y)}, & \frac{dy}{dt} = \frac{1}{F(x, y)}, \\ d\mu(x, y) = \frac{1}{c} F(x, y) dx dy, & c = \iint F(x, y) dx dy. \end{cases}$$

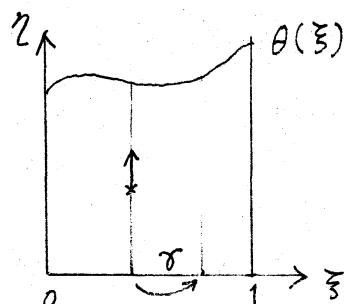
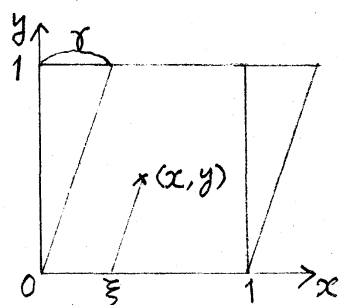
系 (3) によって定まる flow を $\{T_t\}$ で表わす。 (2) と (3) は時間のつけ方が異なるだけで, 軌道は全く同じである。

(3) の方の時間を τ で表わせば, 時間変更の関係

$$d\tau = F(x, y) dt, \quad T_\tau(x, y) = \hat{T}_t(x, y)$$

が成り立つ。われわれの問題は, (2) とその時間変更 (3) が同型であるかということである。系 $\{T_t\}$ に変換

$$\xi = x - \gamma y, \quad \eta = \frac{1}{c} \int_0^y F(\xi + \gamma t, t) dt$$



をほどかせば, special flow $\{S_t\} = (A_\tau, \theta)$ になる:

$$A_\tau \xi = \xi + \gamma \pmod{1}, \quad \xi \in [0, 1)$$

$$(4) \quad \theta(\xi) = \frac{1}{c} \int_0^1 F(\xi + \gamma t, t) dt,$$

$$S_t(\xi, \eta) = \begin{cases} (\xi, \eta + t), & -\eta \leq t < \theta(\xi) - \eta, \\ (A_\gamma \xi, \eta + t - \theta(\xi)), & \theta(\xi) - \eta \leq t < \theta(\xi) + \theta(A_\gamma \xi) - \eta. \end{cases}$$

系 (2) は special flow $\{\hat{S}_t\} = (A_\gamma, 1)$ に同型である。

さて Gurevic [4] によれば, homologous equation

$$(5) \quad h(\xi + \gamma) - h(\xi) = \theta(\xi) - 1 \quad \text{a.e.}$$

の可測な解 h があれば, $\{S_t\}$ と $\{\hat{S}_t\}$ は同型である。方程式 (5) を Fourier 級数で解こうとすると, 良く知られているように “小さい分母” が現われる。

$$\theta(\xi) - 1 = \sum_{n \neq 0} a_n e^{2\pi i n \xi}, \quad h(\xi) = \sum_n b_n e^{2\pi i n \xi},$$

と展開すれば (5) により

$$b_n = \frac{a_n}{e^{2\pi i n \gamma} - 1}, \quad n \neq 0,$$

だから, もし級数

$$(6) \quad h(\xi) = b_0 + \sum_{n \neq 0} \frac{a_n}{e^{2\pi i n \gamma} - 1} e^{2\pi i n \xi}$$

が収束すれば, (6) は (5) の解である。

さて, 与えられる関数を実解析関数に限ろう。

$$\hat{\mathcal{E}} = \{F(x, y) \mid \text{real analytic, positive, period 1}\}$$

$$\mathcal{E} = \{\theta(\xi) \mid \text{real analytic, positive, period 1}\}$$

$$\mathcal{E}_1 = \{\theta \in \mathcal{E} \mid 2 \sum_{n \neq 0} |a_n| < 1, \int \theta(\xi) d\xi = 1\}$$

$$\mathcal{E}_2 = \{\theta \in \mathcal{E} \mid a_n \neq 0, \forall n, \int \theta(\xi) d\xi = 1\}$$

とおく。Arnold [2] によれば, γ が有理数で "not too well" に近似される, 即ち

$$(7) \exists c > 0, \exists d > 1 : \left| \frac{m}{n} - \gamma \right| \geq c |n|^{-d} \text{ for } \forall m, n \in \mathbb{Z}$$

であれば, (5) は任意の $\theta \in \mathcal{E}$ に対し, 実解析的な解 h を持つ。したがって, rotation number γ が (7) をみたせば, 任意の $F \in \hat{\mathcal{E}}$ に対し系 (4) は系 (2) に同型である。

Skllover [5] によれば,

i) 任意の $\theta \in \mathcal{E}_2$ に対し, 無理数 γ があって, $\{S_t\} = (A_\gamma, \theta)$ は連続スペクトルをもつ (即ち, 固有関数は定数のみ)。

ii) 任意の $\theta \in \mathcal{E}_1$ に対し, 方程式 (4) は解 $F \in \hat{\mathcal{E}}$ をもつ。一方系 (2) の $\{\hat{T}_t\}$ は純点スペクトルをもつので, 標準系 (2) に同型ではない系 (1) の存在がわかる。

§2. 群同型

2次元トーラス $\mathbb{T}^2$ の群同型は行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}, \quad \det A = \pm 1,$$

で与えられる。それは Haar 測度 $dm(x, y) = dx dy$ を保つので, $(\mathbb{T}^2, m, A)$ は保測変換である。変換 A のエルゴード性を仮定する。それは行列 A の固有値が 1 の中根

でない(したがって実数)であることと同値である。 A の固有値を λ_1, λ_2 , $|\lambda_2| < 1 < |\lambda_1|$ とし, $(\alpha_i, 1)$ を λ_i に属する A の左固有ベクトルとする:

$$(\alpha_i, 1) A = \lambda_i (\alpha_i, 1), \quad i = 1, 2.$$

そうすると, 直線族

$$(1) \quad \alpha_1 dx_1 + dx_2 = 0 \quad (A \text{ の } \lambda_2\text{-固有方向})$$

$$(2) \quad \alpha_2 dx_1 + dx_2 = 0 \quad (A \text{ の } \lambda_1\text{-固有方向})$$

に対し, つぎのことが成り立つ。

i) 各族 (1) と (2) は A によって不変: $\Gamma \in (j) \Rightarrow A\Gamma \in (j), j=1, 2$.

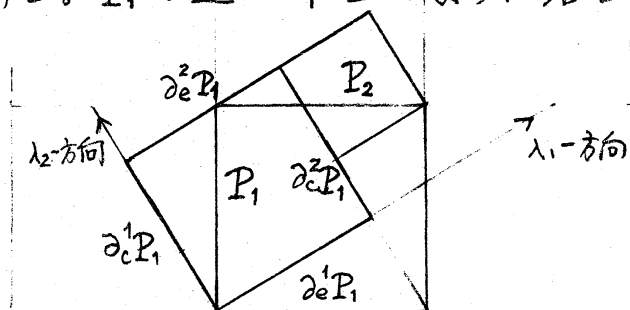
ii) Γ 上の線分 l に対し

$$\Gamma \in (1) \Rightarrow |Al| = |\lambda_2| |l|,$$

$$\Gamma \in (2) \Rightarrow |Al| = |\lambda_1| |l|.$$

つまり A は $Annoy$ 系である。

上のことが A の保測変換としての性質に反映する様子を見よう。 Π^2 の分割 $\alpha = \{P_1, P_2\}$ でつぎのようなものを考える。 P_1 と P_2 は平行四辺形で, 各辺は原点を通る A の固有方向の線分である。 P_1 の辺に下図のように名をつけ (P_2 にも同様),



$$\Gamma_e(\alpha) = \bigcup_{i=1}^2 (\partial_e^1 P_i \cup \partial_e^2 P_i), \quad \Gamma_c(\alpha) = \bigcup_{i=1}^2 (\partial_c^1 P_i \cup \partial_c^2 P_i)$$

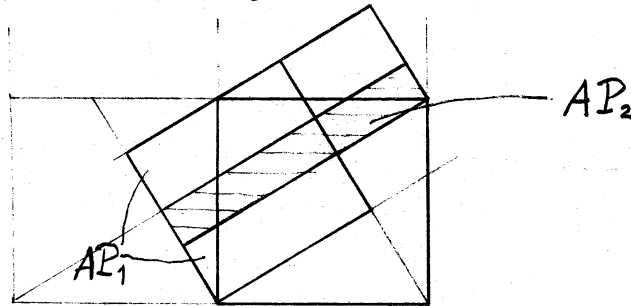
とおく。辺の長さを

$$r_e^i = |\partial_e^1 P_i| = |\partial_e^2 P_i|, \quad r_c^i = |\partial_c^1 P_i| = |\partial_c^2 P_i|, \quad i=1, 2,$$

とする。ii) により

$$\Gamma_e(A^{-1}\alpha) \subset \Gamma_e(\alpha), \quad \Gamma_c(A\alpha) \subset \Gamma_c(\alpha)$$

をみたす $\alpha = \{P_1, P_2\}$ の存在が分る。つまり α は order 1 の Markov 分割である。Markov 分割に特



徴的なことは

iii) $\forall n > 0, \forall P_{i_n} \in \alpha \ (0 \leq n \leq \infty)$ に対し

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} A^n P_{i_n} \neq \emptyset \iff P_{i_n} \cap A P_{i_{n+1}} \neq \emptyset, \quad 0 \leq n < \infty.$$

この性質を用いて, A を記号力学系で表現することを考える。

分割 α は A の generator ($\bigcup_{n=0}^{\infty} A^n \alpha = \mathbb{E}$: 各点への分割)

ではないので, 分割をとりかえる。 $\alpha \vee A\alpha$ の元 $P_i \cap A P_j$ の連結成分 (正確には $\dot{P}_i \cap A \dot{P}_j$ の連結成分に適当に境界をつけたもの) は, 長さ r_e^i の expanding な線分と長さ $|\lambda_2| r_c^i$ の contracting な線分を辺とする小平行四辺形である (これらの線分は原点を通る固有方向にある)。その

恒数を k_{ij} とするとつぎの関係が成り立つ:

$$(3) \begin{cases} |\lambda_1| r_e^1 = k_{11} r_e^1 + k_{21} r_e^2, & |\lambda_1| r_c^1 = k_{11} r_c^1 + k_{12} r_c^2, \\ |\lambda_1| r_e^2 = k_{12} r_e^1 + k_{22} r_e^2, & |\lambda_1| r_c^2 = k_{21} r_c^1 + k_{22} r_c^2. \end{cases}$$

これらの $k = \sum_{i,j} k_{ij}$ 個の小平行四辺形への $\mathbb{T}^2$ の分割を $\beta = \{Q_1, \dots, Q_k\}$ とすると, β は Markov 分割で, $\beta^v T \beta$ の各元は連結であり, したがって β は A の generator になる。各点 $z \in \mathbb{T}^2$ は $z = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} A^n Q_{i_n}$, $Q_{i_n} \in \beta$ と表わされる。

さて, $1 \leq i, j \leq k$ に対し

$$m(i, j) = \begin{cases} 1, & Q_i \cap A Q_j \neq \emptyset, \\ 0, & \text{その他,} \end{cases}$$

とおき, $k \times k$ 行列 $M = (m(i, j))$ を定める。 $\Omega_n = \{1, \dots, k\}$

とし, $\Omega = \prod_{n=-\infty}^{\infty} \Omega_n$ の肉部分集合

$$\Omega_M = \{\omega \in \Omega \mid m(\omega_n, \omega_{n+1}) = 1, \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

を定めれば, Ω の shift T

$$(T\omega)_n = \omega_{n-1}$$

に関して不変である。 Ω_M を Markov subset, M をその構造行列, T の Ω_M への制限 (それを再び T と書く) を Markov subshift と呼ぶ。 mapping

$$\varphi: \Omega_M \rightarrow \mathbb{T}^2, \quad \varphi(\omega) = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} A^n Q_{\omega_n}$$

を定めると, β が iii) をみたすことより, φ は bijection に

なる。明らかに,

$$(4) \quad \varphi \circ T = A \circ \varphi$$

が成り立つ。容易に分るように

$$M = \begin{pmatrix} \overbrace{1 \cdots 1}^{k_{11}} & \overbrace{0 \cdots 0}^{k_{12}} & \overbrace{1 \cdots 1}^{k_{21}} & \overbrace{0 \cdots 0}^{k_{22}} \\ 1 \cdots 1 & 0 \cdots 0 & 1 \cdots 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 \cdots 0 & 1 \cdots 1 & 0 \cdots 0 & 1 \cdots 1 \\ 0 \cdots 0 & 1 \cdots 1 & 0 \cdots 0 & 1 \cdots 1 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} k_{11} + k_{12} \\ k_{21} + k_{22} \end{array} \right.$$

である。この形と(3)により, M の固有値は $|\lambda_1|, |\lambda_2|, 0$ であることが分る。最大固有値 $|\lambda_1|$ は simple で, 右と左の固有ベクトル $(x_1, \dots, x_k), (y_1, \dots, y_k)$ の成分はすべて正であることが Frobenius の定理から分る。
 $\sum_i x_i y_i = 1$ と規格化して

$$p_{ij} = \frac{m(i,j) x_j}{|\lambda_1| x_i}, \quad \pi_i = x_i y_i, \quad 1 \leq i, j \leq k,$$

とあけば, 推移確率とその定常分布

$$\sum_j p_{ij} = 1, \quad \sum_i \pi_i = 1, \quad \sum_i \pi_i p_{ij} = \pi_j$$

になっている。したがって, $\{p_{ij}\}$ と $\{\pi_i\}$ によって Ω_M に定まる Markov 測度を μ とすれば, μ は T -不変でエルゴード的である。 Ω_M 上の T -不変な確率測度 μ' に対し, T の μ' によるエントロピーを $h(T; \mu')$ と書けば, つぎのことが成り立つ ([1])。

iv) 上の μ に対し $h(T; \mu) = \log |\lambda_1|$ であり, $\mu' \neq \mu$ ならば $h(T; \mu') < \log |\lambda_1|$ である。

つまり μ は topological entropy $\log |\lambda_1|$ を attain する唯一の不変測度である。

一方, Sinai [6] によれば

$$v) \quad h(A; m) = \log |\lambda_1|$$

である。 $h(T; m \circ \varphi) = h(A; m) = \log |\lambda_1|$ だから, iv) により, $m \circ \varphi = \mu$ である。(4) と合わせると

vi) $(\mathbb{T}^2, m, A)$ は Markov 変換 (Ω_M, μ, T) と同型であることが分る。Markov 変換の間の同型を直接作ることによって, vi) の系としてつぎの Adler-Weiss [1] の結果が得られる。

vii) $\mathbb{T}^2$ の 2 つのエルゴード的な群同型において, エントロピーが等しい (固有値の絶対値が等しい) ならば, それらは同型である。

また (Ω_M, μ, T) は混合的でもあるので, Friedman-Ernestin [3] の結果を使えば,

viii) $\mathbb{T}^2$ のエルゴード的な群同型は Bernoulli 変換であることも vi) の系として得られる。

付記 討論の中で、「時間変更によってエントロピーはどうなるか」という質問が江川氏から出された。測度によるエントロピーについては知られていて、エントロピーが0であること(したがって正であること)また有限であること(したがって無限大であること)は時間変更によって保存される、ということはどの時にお答えした。その後、位相的なエントロピーについても、同じことが成りたつことが大野泰治郎氏によって示された。

文 献

- [1] R.L.Adler and B.Weiss: Entropy, a complete metric invariant for automorphisms of the torus, Proc.Nat.Acad.U.S.A. 57 (1967), 1573-1576.
- [2] V.I.Arnold: Small denominators.I, Amer.Math.Soc.Translations Ser.2, 46(1965), 213-284.
- [3] N.A.Friedman and D.S.Ornstein: On isomorphism of weak Bernoulli transformations, Adv.in Math. 5(1970), 365-394.
- [4] B.M.Gurevich: Construction of increasing partitions for special flows, Theory Prob.Appl. 10(1965), 627-645.
- [5] M.D.Sklover: Classical dynamical systems on the torus with continuous spectrum, Izv.Vysš.Učebn.Matematika 1967, no.10 (65), 113-124.
- [6] Ya.G.Sinai: On the notion of the entropy of dynamical systems, Dokl.Akad.Nauk SSSR 124(1959), 768-771.
- [7] A.N.Kolmogorov: General theory of dynamical systems and classical mechanics, Proc.International Congress Math. in Amsterdam, VI(1954), 315-333. (R.Abraham: Foundations of mechanics, Appendix D, Benjamin(1967).)
- [7] -----: On dynamical systems with an integral invariant on the torus, Dokl.Akad.Nauk SSSR 93(1953), 763-766.
- [8] V.I.Arnold and Ya.G.Sinai: Small perturbations of the automorphisms of a torus, Sov.Math.Dokl. 3(1962), 783-786.
- [9] M.I.Grabar': On time transformations in dynamical systems, Dokl.Akad.Nauk SSSR 109(1956), 250-252.