

非定常 Navier-Stokes 方程式の外部領域 での減衰について

東京電機大・理工 高橋 秀慈

(Shuji Takahashi)

本研究は H. Sohr 氏 (Paderborn Univ.) との共同研究である。

$\Omega \in C^{2+\mu}$ 境界 $\partial\Omega$ ($0 < \mu < 1$) を持つ $\mathbb{R}^3$ の外部領域とする。このとき次のような非定常非圧縮 Navier-Stokes 流の解の無限遠方での減衰の異方性について考える。

$$(NS) \begin{cases} u_t - \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = f & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ u|_{\partial\Omega} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad |u| \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

ここでベクトル $u = u(x, t)$ は未知の流速を表わし、スカラー $p = p(x, t)$ は未知の圧力とする。ベクトル $f = f(x, t)$ は与えられた外力であり、簡単のため初期流速は 0 とする。

これまでにならぬ関数空間を考えることにより、2 等方的な減衰の様子が調べられている。しかしこの手法で異方性

を得るために関数空間に異方性を与えねばならない。そこでこの方程式に異方性のあふ重み関数をかけることにより減衰の異方性を得る。(注: 定常の Navier-Stokes 方程式に対して減衰の異方性が Farwig [F] により、異方性のあふ Sobolev 空間上で調べられている。)

$L^{r,g} := L^r(0, T; L^r(\Omega))$ とし、そのノルムを $\|\cdot\|_{r,g}$ で表す。

又、 $\|f\|_{H^{2,g}} := \|f\|_{L^g(0, T; H^{2,g}(\Omega))} = \|f\|_{g,g} + \|\nabla f\|_{g,g} + \|\nabla^2 f\|_{g,g}$ とする。

定理 1 $g \in (5/3, \infty)$ とし、 $r \in (1, \infty)$ は $1/r = 1/g + 1/3$ を満たすものとする。 $M \in C^2(\bar{\Omega})$ は

$$(1) \quad \|\nabla M\|_{\infty} + \|\nabla^2 M\|_{\infty} < \infty$$

を満たすものとする。 $f \in L^{r,g} \cap L^{g,g}$ は $Mf \in L^{g,g}$ とするものとする。このとき (NS) の弱解 u が

$$(2) \quad u \in L^{q,\beta} \quad , \quad \text{for } \forall \alpha, \beta \in (1, \infty) \text{ with } 3/\alpha + 2/\beta \leq 1$$

を満たすならば

$$(3) \quad \begin{aligned} & \|Mu_t\|_{g,g} + \|Mu\|_{H^{2,g}} + \|\nabla(Mp)\|_{g,g} \\ & \leq C(\|f\|_{g,g} + \|f\|_{r,g} + \|Mf\|_{g,g}), \\ & C = C(g, T, \Omega) \end{aligned}$$

を満たす。

次の埋め込み定理により定理 1 から decay property を得る。

記号: $\mathfrak{s}(p, g) := 3/p + 2/g$

補題 2 (Solonnikov) $u_t \in L^{q, q}$, $u \in L^q(0, T; H^{2q}(\Omega))$ とする。

(i) $\alpha, \beta \in [q, \infty)$ with $\frac{1}{q}(\frac{1}{q} + \frac{1}{q}) - \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} \geq 2$ に対して

$$(4) \quad \|u\|_{\alpha, \beta} \leq C (\|u_t\|_{q, q} + \|u\|_{H^{2q}})$$

が成立する。

(ii) $q > 5/2$ のとき (4) with $\alpha = \beta = \infty$ が成立し, $u \in C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ とする。

(iii) $\gamma, \delta \in [q, \infty)$ with $\frac{1}{q}(\frac{1}{q} + \frac{1}{q}) - \frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\delta} \leq 1$ に対して

$$(5) \quad \|\nabla u\|_{\gamma, \delta} \leq C (\|u_t\|_{q, q} + \|u\|_{H^{2q}})$$

が成立する。

(iv) $q > 5$ のとき (5) with $\gamma = \delta = \infty$ が成立して $u \in C(\bar{\Omega} \times [0, T])$ とする。

そして $q > 5/2$ のとき

$$|M(x)| |u(x, t)| \leq \|M u\|_{\infty, \infty} \leq C = C(\Omega, q, T, M)$$

すなわち

$$|u(x, t)| \leq \frac{C}{|M(x)|}$$

を得る。ここで C は x に依らないので M の異方性か u の減衰の異方性を与える。同様に $q > 5$ のとき

$$|\nabla u(x, t)| \leq \frac{C}{|M(x)|}$$

を得る。

今回の報告は最終的なものでなく、今後 M の条件 (1) を弱

くして、より増大度を許すようにしたいと考えている。そこで
以下簡単のために (NS) のかわりに次の Stokes 方程式に対して
(3) の評価を示すことにとめる。

$$(S) \begin{cases} u_t - \Delta u + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T) \\ u|_{\partial\Omega} = 0; \quad u|_{t=0} = 0, \quad |u| \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

まず (S) に重み関数 M をかけ (Mu に関する方程式に書きか
えろと

$$(b) \begin{cases} (Mu)_t - \Delta(Mu) + \nabla(Mp) = F, \\ \operatorname{div}(Mu) = u \cdot \nabla M \neq 0, \\ Mu|_{\partial\Omega} = 0, \quad Mu|_{t=0} = 0, \quad |Mu| \rightarrow 0 \text{ as } |x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$F = Mf - 2(\nabla u) \cdot (\nabla M) - (\Delta M)u + (\nabla M)p$$

次の補題は divergence free を回復する。

補題 3 (Bogovski) $m = 0, 1, 2, \dots, 1 < r < \infty$ とする。

このとき $\exists R = R(m, r, \Omega); H_0^{m,r}(\Omega) \rightarrow H_0^{m+1,r}(\Omega)^3_{s,z}$

$$\operatorname{div} Rf = f$$

$$\|\nabla^{m+1} Rf\|_r \leq C \|\nabla^m f\|_r, \quad \forall f \in H_0^{m,r}(\Omega)$$

$$C = C(\Omega, m, r).$$

次に (S) の a priori estimate を用いる。

補題 4

(i) (Solennikov) (S) に ∇u , $1 < q < \infty$ に対して

$$(1) \quad \|u_t\|_{q,q} + \|u\|_{H^{2,q}} + \|\nabla p\|_{q,q} \leq C \|f\|_{q,q}$$

with $C = C(\Omega, g, T)$

が成立する。

(II) (Giga-Sohr) (5) に対して $1 < g, g' < \infty$ に対して

$$(8) \quad \|u_t\|_{g, g'} + \|A_g u\|_{g, g'} + \|Dp\|_{g, g'} \leq C \|f\|_{g, g'}$$

with $C = C(\Omega, g, g')$.

が成立する。ここで A_g は Stokes 作用素である。

(注: $1 < g < 3/2$ だと $\|D^2 u\|_{g, g'} \leq C \|A_g u\|_{g, g'}$

と存在する。ここでは $g > 5/2$ としているのを、便えることに

注意した。

そこで $v = R(u, Dp)$, $\hat{u} = Mu - v$ とおくと $\hat{u}$ の方程式

$$(9) \quad \begin{cases} \hat{u}_t - \Delta \hat{u} + D(Mp) = F + v_t - \Delta v \\ \operatorname{div} \hat{u} = 0 \\ \hat{u}|_{t=0} = 0, \quad \hat{u}|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

と存在。補題 4(i) により

$$\begin{aligned} & \|Mu_t\|_{g, g} + \|Mu\|_{H^2, g} + \|D(Mp)\|_{g, g} \\ & \leq C (\|F\|_{g, g} + \|v_t\|_{g, g} + \|D^2 v\|_{g, g}) \end{aligned}$$

(ここで低階の埋め込み定理を使った。)

以下、 $\|F\|_{g, g}$, $\|v_t\|_{g, g}$, $\|D^2 v\|_{g, g}$ を評価する。

$$\begin{aligned} \|F\|_{g, g} & \leq \|Mf\|_{g, g} + 2 \|M\|_{\infty} \|Du\|_{g, g} + \|\Delta M\|_{\infty} \|u\|_{g, g} \\ & \quad + \|DM\|_{\infty} \|p\|_{g, g} \end{aligned}$$

(ここで $p \in L^{g, g}$ の存在性問題と存在が、ここでは形式的に

致うことである). Sobolevの不等式と, 補題4(ii)により

$$\|P\|_{q,\Omega} \leq C \|DP\|_{r,\Omega} \leq C \|f\|_{r,\Omega}$$

補題4(i)により

$$\|u\|_{q,\Omega}, \|Du\|_{q,\Omega} \leq \|u\|_{H^2,\Omega} \leq C \|f\|_{q,\Omega}$$

f, φ .

$$\|F\|_{q,\Omega} \leq \|Mf\|_{q,\Omega} + C (\|f\|_{q,\Omega} + \|f\|_{r,\Omega}),$$

$$C = C(\Omega, q, T, M)$$

次に v_t の評価。形式的に

$$v_t = \partial_t R(u \cdot \nabla M) = R(u_t \cdot \nabla M)$$

とあるから Sobolevの不等式と Bogovskiの補題により

$$\|v_t\|_{q,\Omega} \leq C \|Dv_t\|_{r,\Omega}$$

$$\leq C \|u_t \cdot \nabla M\|_{r,\Omega}$$

$$\leq C \|\nabla M\|_{\infty} \|f\|_{r,\Omega} \quad (\text{Giga-Sohrの評価})$$

同様に

$$\|D^2 u\|_{q,\Omega} \leq C \|f\|_{q,\Omega}$$

Q. E. D.