

EXAMPLE OF ZERO VISCOSITY LIMIT FOR TWO DIMENSIONAL
NONSTATIONARY NAVIER-STOKES FLOWS WITH BOUNDARY

北海道情報大学 松井伸也 (Shin'ya MATSUI)

有界領域 $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ with smooth boundary に対して、

$(u^\nu(t, x), p^\nu(t, x))$: Navier-Stokes flow with initial data u_0^ν in Ω ,

$(\bar{u}(t, x), \bar{p}(t, x))$: Euler flow with initial data $\bar{u}_0(x)$ in Ω ,

ただし、外力は、ゼロとしておく。このとき次が成立する。

THEOREM 0. $u_0^\nu \rightarrow \bar{u}_0$ as $\nu \rightarrow 0$ in $L^2(\Omega)$ を仮定する。このとき次の命題は同値である。

- (a) $\|u^\nu(t) - \bar{u}(t)\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ as $\nu \rightarrow 0$ uniformly in $t \in [0, T]$,
- (b) $\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \int_0^t \int_{\partial\Omega} \bar{u}(\tau) \cdot n \times \text{rot } u^\nu(\tau) dS d\tau = 0$ uniformly in $t \in [0, T]$,
- (c) $\nu \int_0^T \|\text{grad } u^\nu(\tau)\|_{L^2(\Gamma_{c\nu})}^2 d\tau \rightarrow 0$ as $\nu \rightarrow 0$ (by T. Kato).

ここで $n = n(x)$ は、 Ω の外向き単位法線とし $\Gamma_{c\nu} = \{x \in \Omega; \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq c\nu\}$ である。

この命題を成立させる例を与えるのが、目的である。そこで $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^2; |x| < 1\}$ とし Navier-Stokes flow, Euler flow として次のようなタイプのものを考える。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \bar{u}(x) &= \bar{u}_0 = \frac{\bar{\varphi}(r)}{r} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \\
 \bar{p}(x) &= - \int_r^1 \frac{\bar{\varphi}^2(\rho)}{\rho^3} d\rho + \text{constant}, \\
 u^\nu(x, t) &= \frac{\varphi^\nu(r, t)}{r} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \\
 p^\nu(r, t) &= - \int_r^1 \frac{(\varphi^\nu)^2(\rho, t)}{\rho^3} d\rho + \text{constant}.
 \end{aligned}$$

ここで (r, θ) は、 x の極座標表示とし、 $\bar{\varphi} = \bar{\varphi}(r)$ は、つぎを満たすものとする。

$$(2) \quad \bar{\varphi}(r) = \int_0^r \rho \bar{\omega}(\rho) d\rho,$$

here $\bar{\omega} \in C((0, 1])$ with $\bar{E} = (\int_0^1 \rho \bar{\omega}^2(\rho) d\rho)^{1/2} < \infty$. すると簡単な計算により

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \bar{u} &= 0 \quad \text{in } \bar{\Omega}, \\ \bar{u} \cdot n &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \\ \operatorname{rot} \bar{u} &= \bar{\omega}_0 \quad \text{in } \bar{\Omega}, \\ (\bar{u}, \nabla) \bar{u} &= - \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \frac{\bar{\varphi}^2}{r^3} = -\nabla \bar{p} \quad \text{in } \bar{\Omega}, \end{aligned}$$

尚,

$$|\bar{\varphi}(s)|^2 \leq \int_0^s \rho^2 d\rho \cdot \int_0^s \bar{\omega}^2(\rho) d\rho = \frac{1}{3} s^3 \|\bar{\omega}\|_{L^2(0,1)}^2.$$

である. 故に (1) で定義された $(\bar{u}(t, x), \bar{p}(t, x))$ は、Euler flow である. 更に

$$\begin{aligned} u_t^\nu - \nu \Delta u^\nu + (u^\nu, \nabla) u^\nu + \nabla p^\nu \\ = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \frac{1}{r} (\varphi_t^\nu - \nu \varphi_{rr}^\nu + \frac{\nu}{r} \varphi_r^\nu) + \nabla(-p^\nu + p^\nu) \end{aligned}$$

であるから $\psi(r, t)$ を方程式

$$\begin{aligned} (3) \quad \psi_t &= r \left(\frac{\psi_r}{r} \right), \quad \text{for } 0 < r < 1, 0 < t < \infty, \\ \psi_r|_{r=0} &= 0, \quad \psi|_{r=1} = 0 \quad \text{for } 0 < t < \infty, \\ \psi|_{t=0} &= \varphi_0^\nu(r) \quad \text{for } 0 < r < 1. \end{aligned}$$

の解とし

$$(4) \quad \varphi^\nu(r, t) = \psi(r, \nu t)$$

と置くと (1) で定義された $(u^\nu(t, x), p^\nu(t, x))$ は、Navier-Stokes flow である. ただし φ_0^ν は

$$\begin{aligned} u_0^\nu(x) &= \frac{\varphi_0^\nu(r)}{r} \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \varphi_0^\nu(0) = (\varphi_\nu)'(0) = 0, \\ \omega_0^\nu(r) &\equiv \frac{(\varphi_0^\nu)'(r)}{r} \quad \text{with } E^\nu = \left(\int_0^1 \rho \omega_\nu^2(\rho) d\rho \right)^{1/2} < \infty. \end{aligned}$$

尚, $\operatorname{rot} u_0^\nu = \omega_\nu$, $\varphi_0^\nu(r) = \int_0^r \rho \omega_\nu(\rho) d\rho$ となるが、 $u_0|_{\partial\Omega} = 0$ は必ずしも満たさない事に、注意して欲しい.

方程式 (3) の解の存在については

THEOREM 1 ([1]). $\varphi_0^\nu \in C^{2+\alpha}([0,1])$ for $0 < \alpha < 1$. Then there exists an unique solution $\psi \in C^{2,1}(Q)$ of (3), which satisfies $\psi(0,t) = 0$ and

$$|\psi(r,t)| + \left| \int_0^t \psi_r(1,\tau) d\tau \right| + t|\psi_r(1,t)| \leq C(\|\omega_\nu\|_{L^2(0,1)}, T)$$

in $Q = \{(r,t) \in [0,1] \times [0,\infty); (r,t) \neq (1,0)\}$.

Theorem 1 より次の存在定理を得る.

THEOREM 2. For the solution ψ in Theorem 1, we define u^ν and p^ν by (1) and (4). Then (u^ν, p^ν) is an unique solution such that

$$\begin{aligned} u^\nu &\in C^{2,1}(D) \quad \text{and} \quad p^\nu \in C^{3,1}(D), \\ u_t^\nu, \quad \Delta u^\nu, \quad \nabla(\operatorname{rot} u^\nu) &\in L^\infty((0,\infty); L^2(\Omega)), \\ t|\nabla u^\nu| &\leq C(\|\omega_\nu\|_{L^2(0,1)}, T) \quad \text{for} \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \end{aligned}$$

here $D = \{0 < |x| \leq 1, 0 < t < \infty\}$.

以上で与えられた Flow を使うと Zero viscosity limit の例は次で与えられる.

THEOREM 3 (M. - 川島). $\|u_0^\nu - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0, \nu^{3/4} \|\operatorname{rot} u_0^\nu\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ as $\nu \rightarrow 0$ を仮定する. このとき $T > 0$: fixed に対して次が成立する.

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|u^\nu(t) - \bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad \nu \rightarrow 0.$$

この証明は, 次のエネルギー不等式により成される.

LEMMA (川島). ψ を Theorem 1 の解とする. このとき次を得る.

$$\begin{aligned} e^{4t} \int_0^1 \frac{\psi^2(t)}{r^3} + \frac{\psi_r^2(t)}{r} dr + \int_0^t e^{4\tau} \int_0^1 \frac{\psi^2(\tau)}{r^4} + \frac{\psi_r^2(\tau)}{r^2} + \psi_{rr}^2(\tau) dr d\tau + \\ + \int_0^t e^{4\tau} \int_0^1 r \left| \left(\frac{\psi_r(\tau)}{r} \right)_r \right|^2 dr d\tau \leq CE_\nu \end{aligned}$$

ここで、 C は、粘性に無関係な定数。更にこの評価を使って次を得る。

$$\int_0^1 \frac{1}{r} (\psi(t) - \bar{\varphi})^2 dr \leq \int_0^1 \frac{1}{r} (\varphi_0^\nu - \bar{\varphi})^2 dr + C\bar{E}E_\nu\eta(t) + C|\bar{\varphi}(1)|E_\nu\eta(t)^{3/4}.$$

ここで $\eta(t) = \frac{1}{2}(1 - e^{-2t})$ である。

Reference

- [1] Matsui, S: Example of zero viscosity limit for two dimensional nonstationary Navier-Stokes flows with boundary, to appear.