

強弱非線形性の共存する弾性波動の乱流的性質

横山 直人¹, 高岡 正憲²

¹京大工, ²同大理工

Turbulent Characteristics in Coexistence of Weak and Strong Turbulence in Elastic Waves

Naoto Yokoyama¹, Masanori Takaoka²

¹Faculty of Engineering, Kyoto Univ., ²Faculty of Science & Engineering, Doshisha Univ.

1 はじめに

Düring らによる弾性波動乱流の先駆的な論文 [1] は, 非常に興味深いサブタイトル “Can one hear a Kolmogorov spectrum?” がつけられている. 彼らは, 弱乱流理論の定常解として $\varepsilon(k) \propto k[\log(k_*/k)]^{1/3}$ を得, また, 直接数値計算によってその存在を確認した. 一方で, 鉄板による実験では, $\varepsilon(k) \propto k^{-1/5}$ などの弱乱流理論の定常解とは異なるエネルギースペクトルが得られた. [2–4] さらに, Nazarenko は弱乱流理論と次元解析を用いて, エネルギーカスケードに対しては $\varepsilon(k) \propto k^{-1}$, アクションカスケードに対しては $\varepsilon(k) \propto k^{-1/3}$ が存在しうることを示した. [5]

Nazarenko の教科書に多くの例が挙げられているように [5], 強弱非線形性が共存するときのエネルギー輸送の機構では, critical balance と呼ばれる描像が予想されている. critical balance の描像では, 強弱乱流のそれぞれのカスケード機構で輸送されたエネルギーが, 強弱非線形の境界をなす波数上を輸送されと考えられている. このエネルギー輸送機構の同定のために, エネルギー保存則と矛盾しないエネルギー輸送率の表現を得る必要がある.

本研究では, 金属薄板を伝播する弾性波動の直接数値計算を行うことにより, 統計的定常状態においてエネルギースペクトルが系のエネルギーレベルに依存して遷移し, あるエネルギーレベル領域において強弱乱流の共存状態が得られることを示す. また, この系では, 適切な要素波を用いることで非線形エネルギーの 1 波数表現が得られることも示す. この表現を利用して, これまで波動乱流系では困難とされていたエネルギーの輸送機構を同定する.

2 定式化および数値計算法

薄い弾性板を伝播する波動を考える. 変位の勾配が小さく, 厚み方向の応力分布が無視できるとき, 波動の支配方程式は横 (面外) 変位 ζ と運動量 p に対する Föppl-von Kármán (FvK) 方程式:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)}\Delta^2\zeta + \{\zeta, \chi\}, \quad (1a)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{p}{\rho}, \quad (1b)$$

$$\Delta^2\chi = -\frac{E}{2}\{\zeta, \zeta\}. \quad (1c)$$

で与えられる.[6, 7] 式 (1a) の第 1 項と第 2 項は, それぞれ, 曲げ応力と面内応力を表す. また, Airy 応力ポテンシャル χ は, 応力テンソル σ_{ij} と $\sigma_{xx} = \partial^2\chi/\partial y^2$, $\sigma_{xy} = -\partial^2\chi/\partial x\partial y$, $\sigma_{yy} = \partial^2\chi/\partial x^2$ の関係にある面内応力に対するポテンシャルである. さらに, $\{f, g\} = \partial^2 f/\partial x^2\partial^2 g/\partial y^2 + \partial^2 f/\partial y^2\partial^2 g/\partial x^2 - 2\partial^2 f/\partial x\partial y\partial^2 g/\partial x\partial y$ と Δ は, それぞれ, Monge-Ampère 演算子と Laplace 演算子である. 密度 ρ , Young 率 E , Poisson 比 ν は金属板の物性値であり, h は板厚である.

弱乱流理論における要素波に対応する複素振幅 a_k は, η と p の Fourier 級数 η_k と p_k の線形結合 $a_k = (\rho\omega_k\zeta_k + ip_k)/\sqrt{2\rho\omega_k}$ によって定義される. ここで, $\omega_k = \sqrt{Eh^3/(12(1-\nu^2)\rho)}k^2$ は線形分散関係を与える. FvK 方程式 (1) は, 複素振幅 a_k に対する方程式

$$\frac{da_k}{dt} = -i\omega_k a_k - \frac{iE}{8\rho^2} \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \frac{|k \times k_1|^2 |k_2 \times k_3|^2}{\sqrt{\omega_k \omega_{k_1} \omega_{k_2} \omega_{k_3}} |k_2 + k_3|^4} (a_{k_1} + a_{-k_1}^*)(a_{k_2} + a_{-k_2}^*)(a_{k_3} + a_{-k_3}^*) \quad (2)$$

と書き換えられる. ここで, 波数間相互作用は 4 波相互作用によって生じる.

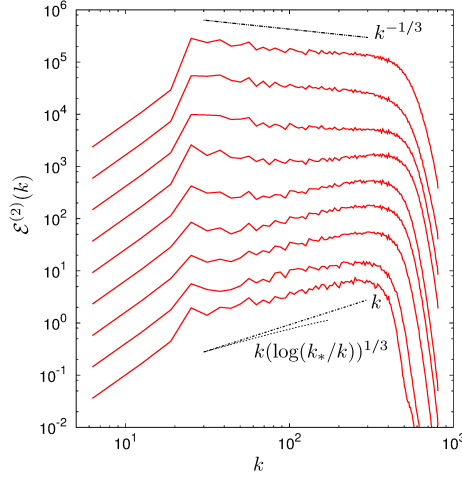


図 1: 外力の大きさを変えたときのエネルギースペクトルの変化. Ref. [8] より改変.

弱非線形性を仮定し、乱雑位相近似を適用する。波数間の相互作用がほとんどないことから $\langle a_k a_{k'}^* \rangle = n_k \delta_{kk'}$ となる。ここで、 n_k は wave action と呼ばれる量である。弱乱流理論は wave action の時間発展を記述する運動論的方程式:

$$\begin{aligned} \partial_t n_k = & \sum_{k_1+k_2+k_3=k} U_{k_1 k_2 k_3}^k n_k n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} \left(\frac{1}{n_k} - \frac{1}{n_{k_1}} - \frac{1}{n_{k_2}} - \frac{1}{n_{k_3}} \right) \delta_{\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3}} \\ & + \sum_{-k_1+k_2+k_3=k} V_{k_2 k_3}^{k k_1} n_k n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} \left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_{k_1}} - \frac{1}{n_{k_2}} - \frac{1}{n_{k_3}} \right) \delta_{\omega_k + \omega_{k_1}} \\ & + \sum_{-k_1-k_2+k_3=k} W_{k_3}^{k k_1 k_2} n_k n_{k_1} n_{k_2} n_{k_3} \left(\frac{1}{n_k} + \frac{1}{n_{k_1}} + \frac{1}{n_{k_2}} - \frac{1}{n_{k_3}} \right) \delta_{\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2}} \end{aligned} \quad (3)$$

を与える。運動論的方程式 (3) は、非線形相互作用が 4 波共鳴相互作用によることを示している。Düring らが Ref. [1] で得た解は、運動論的方程式 (3) の定常解である。また、運動論的方程式 (3) は、 $2 \leftrightarrow 2$ 型の 4 波共鳴相互作用のみではなく、 $1 \leftrightarrow 3$ 型、 $3 \leftrightarrow 1$ 型の 4 波共鳴相互作用を持つことから、wave action が保存量でないことがわかる。

本研究では、非平衡状態を作るために、式 (2) に外力と散逸を加えた

$$da_k/dt = -i\omega_k a_k + \mathcal{N}_k + \mathcal{F}_k - \mathcal{D}_k \quad (4)$$

の直接数値計算を行う。ここで、 $\mathcal{N}_k$ は式 (2) の非線形項の簡略表現である。外力 $\mathcal{F}_k$ は、 $|k| \leq 8\pi$ の低波数領域で $|a_k| = \text{const.}$ となるように与え、散逸 $\mathcal{D}_k$ は高波数領域で有効となるように $\mathcal{D}_k = \Gamma|k|^4 a_k$ と与える。非線形項の畳み込みには 4/2 法によるエイリアス除去を行う擬スペクトル法を用いる。時間発展に 4 次精度 Runge-Kutta 法を用いて時間積分して統計的定常状態を得る。

薄板の材質は Ref. [2] の実験に対応して鉄を想定し、密度 $\rho = 7.8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、Young 率 $E = 2.0 \times 10^{11}$ 、Poisson 比 $\nu = 0.30$ である。また、 $1.0\text{m} \times 1.0\text{m}$ の周期境界を仮定し、板厚は $h = 5.0 \times 10^{-4} \text{ m}$ とする。

3 結果

$|k| \leq 8\pi$ に作用する外力の大きさを変えたエネルギーレベルの異なる 9 つの数値計算を行い、得られたエネルギースペクトルを図 1 に示す。エネルギーレベルが低いとき、または高波数領域において、系は弱乱流 (弱非線形) であり、運動論的方程式の定常解 $\mathcal{E} \propto k[\log(k_*/k)]^{1/3}$ が得られた。一方で、エネルギーレベルが高いとき、または低波数領域において、系は強乱流 (強非線形) であり、エネルギースペクトル $\mathcal{E} \propto k^{-1/3}$ が得られた。このエネルギースペクトルは、Nazarenko の予想した wave action カスケードに対するエネルギースペクトルと同じ冪指数を持つが、彼の導出は弱乱

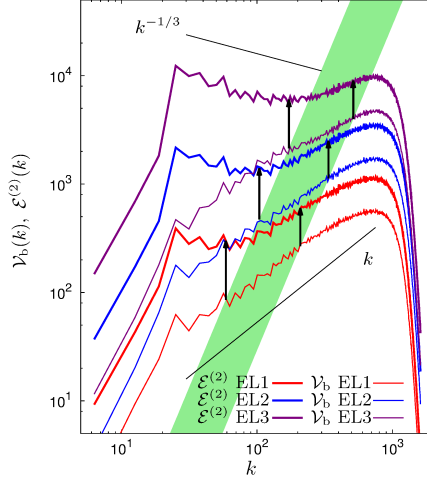


図 2: エネルギースペクトルと曲げエネルギースペクトル。網かけ領域は $0.1 < \epsilon < 1$ の領域を示す。Ref. [9] より改変。

流を仮定したものであり、運動論的方程式 (3) において wave action が保存量でないことから、その主張を支持するものではない。これらの結果を踏まえると、Düring らの論文における疑問 “Can one hear a Kolmogorov spectrum?” への回答は、“小さい音であれば高音で聞こえる” である。

重要なことは、低波数領域に強乱流スペクトルが現れ、高波数領域に弱乱流スペクトルが現れる、強弱乱流の共存状態があることである。ここで、強弱乱流スペクトルの境界となる波数 (分離波数) は、エネルギーレベルが高くなるにつれて、高波数側に移動する。この分離波数を見積もることを考える。

天下りのであるが、FvK 方程式の非線形 4 波相互作用 $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3$ を構成する波数の中で、 $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ のいずれかが $\mathbf{k}$ となる自己相互作用を考える。[9] 相互作用の大きさが外積 $|\mathbf{k} \times \mathbf{k}_1| |\mathbf{k}_2 \times \mathbf{k}_3|$ によることから、自己相互作用は $(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = (\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{k}, -\mathbf{k}')$ または $(\mathbf{k}, \mathbf{k}', -\mathbf{k}', \mathbf{k})$ に限られる。このとき、FvK 方程式 (2) の非線形相互作用項を (共役モードも含む) 自己相互作用項と非自己相互作用項に分解すると、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}} \\ a_{-\mathbf{k}}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i(\omega_{\mathbf{k}} + \omega_{\mathbf{k}}^s) & -i\omega_{\mathbf{k}}^s \\ i\omega_{-\mathbf{k}}^s & i(\omega_{-\mathbf{k}} + \omega_{-\mathbf{k}}^s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\mathbf{k}} \\ a_{-\mathbf{k}}^* \end{pmatrix} + \text{non-self interaction terms} \quad (5)$$

とかける。ここで、

$$\omega_{\mathbf{k}}^s = \frac{E}{4\rho^2} \sum_{\mathbf{k}'} \frac{|\mathbf{k} \times \mathbf{k}'|^4 |a_{\mathbf{k}'}|^2 + |a_{-\mathbf{k}'}|^2 + a_{\mathbf{k}'} a_{-\mathbf{k}'}^* + a_{\mathbf{k}'}^* a_{-\mathbf{k}'}^*}{\omega_{\mathbf{k}} \omega_{\mathbf{k}'}} \quad (6)$$

である。また、式 (5) に現れる行列の固有値は $\pm \omega_{\mathbf{k}}^{\text{NL}} = \pm \omega_{\mathbf{k}} \sqrt{1 + 2\omega_{\mathbf{k}}^s / \omega_{\mathbf{k}}}$ であり、これが線形分散関係に自己相互作用を繰り込んだ、非線形分散関係である。非線形分散関係の右辺は、曲げエネルギースペクトル $\mathcal{V}_b(k)$ を用いて記述できる。曲げエネルギースペクトルが自己相似的 $\mathcal{V}_b(k) = Ck^\alpha$ とすると、 $-1 < \alpha < 3$ のとき、非線形分散関係の右辺にある和は収束し、

$$\omega_{\mathbf{k}}^s = \frac{18}{(\alpha+1)(3-\alpha)} \frac{1}{h^3} \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)^3}{\rho E}} \frac{\mathcal{V}(k)}{k} \quad (7)$$

となる。後述する図 3 より $\mathcal{V}_b(k) \propto k^\alpha$ なので、 $\omega_{\mathbf{k}}^s = \text{const.}$ である。自己相互作用による振動数シフト $\Delta\omega_{\mathbf{k}} = \omega_{\mathbf{k}}^{\text{NL}} - \omega_{\mathbf{k}}$ を考えると、この振動数シフトと線形分散関係が与える振動数が同程度になると、弱非線形性の仮定が破れるものと考えられる。すなわち、 $0.1 < \epsilon < 1$ として、 $\Delta\omega_{\mathbf{k}} = \epsilon\omega_{\mathbf{k}}$ となる波数 k が分離波数であると考えられる。実際、スペクトルの折れ目となる分離波数はこの関係がよく近似され (図 2)、弱乱流理論における線形と非線形時間スケールの分離の重要性を示している。

これまでの弱乱流理論では、要素波 $a_{\mathbf{k}}$ の 2 次相関量 $E_{\mathbf{k}}^{(2)} = \omega_{\mathbf{k}} |a_{\mathbf{k}}|^2$ をエネルギーと見なしてきた。これは非線形エネルギーの Fourier 表現が $a_{\mathbf{k}}$ の畳み込みになってしまうからである。しかしながら、系の保存量としてのエネルギー

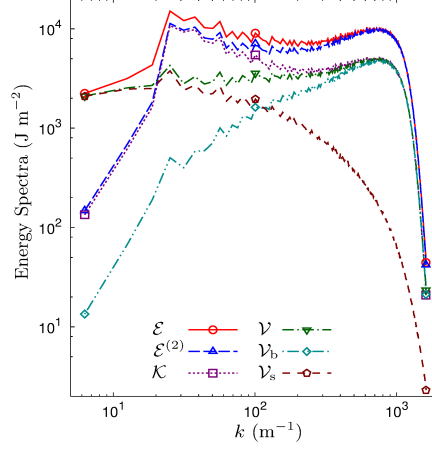


図 3: 各種エネルギースペクトル. Ref. [10] より.

は Hamiltonian

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \sum_k \omega_k |a_k|^2 + \sum_{k+k_1-k_2-k_3=0} W_{k_2 k_3}^{k k_1} a_k a_{k_1} a_{k_2}^* a_{k_3}^* \\ & + \sum_{k-k_1-k_2-k_3=0} (G_{k_1 k_2 k_3}^k a_k a_{k_1}^* a_{k_2}^* a_{k_3}^* + \text{c.c.}) + \sum_{k+k_1+k_2+k_3=0} (R_{k k_1 k_2 k_3} a_k a_{k_1} a_{k_2} a_{k_3} + \text{c.c.}) \end{aligned} \quad (8)$$

であり, a_k に関して 4 次の項を含んでいる. ここで, η , p および χ の Fourier 級数を用いると Hamiltonian は

$$\mathcal{H} = \sum_k \left(\frac{1}{2\rho} |p_k|^2 + \frac{\rho\omega_k^2}{2} |\zeta_k|^2 \right) + \sum_{k-k_1-k_2-k_3=0} \frac{E |k \times k_1|^2 |k_2 \times k_3|^2}{8 |k_2 + k_3|^2} \zeta_k \zeta_{k_1} \zeta_{k_2} \zeta_{k_3} \quad (9)$$

$$= \sum_k \left(\frac{1}{2\rho} |p_k|^2 + \frac{\rho\omega_k^2}{2} |\zeta_k|^2 + \frac{k^4}{2E} |\chi_k|^2 \right) \quad (10)$$

と書きかえられる. すなわち, エネルギー保存則に対応する, 1 波数 k のエネルギーは, 運動エネルギー K_k , 曲げエネルギー V_{bk} , 伸縮エネルギー V_{sk} の 3 種であり, それぞれ,

$$K_k = \frac{1}{2\rho} |p_k|^2, \quad V_{bk} = \frac{\rho\omega_k^2}{2} |\zeta_k|^2, \quad V_{sk} = \frac{k^4}{2E} |\chi_k|^2 \quad (11)$$

である. 全エネルギーはこれら 3 種のエネルギーの和で与えられ, 線形エネルギーは $E_k^{(2)} = K_k + V_{bk}$, ポテンシャルエネルギーは $V_k = V_{bk} + V_{sk}$ である.

図 1 に示したエネルギースペクトルの中で中程度のものに対して, 各種エネルギースペクトルを図 3 に示す. 高波数領域では, $K_k \approx V_{bk} \gg V_{sk}$ であり, 非線形エネルギーと比較して線形エネルギーが非常に大きく, 弱乱流状態であることが確認される. 一方, 低波数では, $K_k \gg V_{sk} \gg V_{bk}$ であり, 強乱流状態にあることがわかる.

1 波数 k に対するエネルギーが保存則と矛盾なく定義できたので, エネルギー輸送を整合性のとれるかたちで考えることができる. エネルギー輸送率 T_k は波数 k の持つエネルギーの時間変化率で与えられる. すなわち, $T_k = dE_k/dt$ である. ここでエネルギーの時間変化率では, 外力と散逸は無視する. このとき, エネルギー輸送率は, その由来によって 4 種のエネルギー輸送率に分解でき, $T_k = T_{Kk}^{(2)} + T_{Kk}^{(4)} + T_{V_{bk}} + T_{V_{sk}}$ と書ける. ここで, $T_{Kk}^{(2)} = -\frac{\omega_k^2}{2} p_k^* \zeta_k + \text{c.c.}$, $T_{Kk}^{(4)} = \frac{p_k^2}{2\rho} \sum_{k_1+k_2=k} |k_1 \times k_2|^2 \chi_{k_1} \zeta_{k_2} + \text{c.c.}$, $T_{V_{bk}} = \frac{\omega_k^2}{2} p_k^* \zeta_k + \text{c.c.}$, $T_{V_{sk}} = -\frac{\chi_k^2}{2\rho} \sum_{k_1+k_2=k} |k_1 \times k_2|^2 \zeta_{k_1} p_{k_2} + \text{c.c.}$ はそれぞれ, dK_k/dt の 2 次の項である 2 次運動エネルギー輸送, 同じく 4 次の項である 4 次運動エネルギー輸送, 曲げエネルギー輸送 dV_{bk}/dt , 伸縮エネルギー輸送 dV_{sk}/dt である. $T_{Kk}^{(2)} = -T_{V_{bk}}$ は波数 k の運動エネルギーと曲げエネルギーの交換を表す. 非線形相互作用によるエネルギー輸送は, $T_{Kk}^{(4)}$ と $T_{V_{sk}}$ によって生じ, 両者を考えることによって, エネルギー保存則 $\sum_k T_k = 0$ が成立する. これまでの弱乱流理論で行われてきたように, 線形エネルギーのみを考

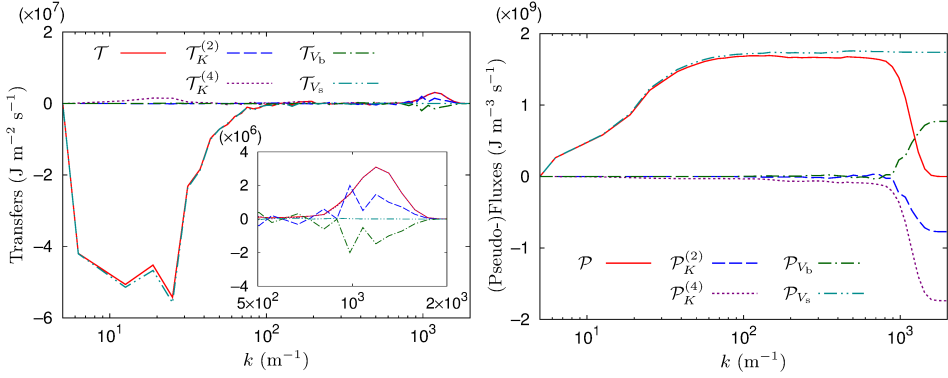


図 4: エネルギー輸送率 (左) とエネルギーフラックス (右). Ref. [10] より.

えると、非線形エネルギー輸送は $T_{Kk}^{(4)}$ のみで与えられるので、これはエネルギー保存則を満足しない。ここで、 $T_{Kk}^{(4)}$ と T_{V_bk} の両者がともに、 a_k の 3 次量となっており、摂動展開の観点からも $T_{Kk}^{(4)}$ のみを考慮することは不適切である。

さらに、3 成分相互作用関数を

$$\begin{aligned} T_{kk_1k_2} &= T_{Kk_1k_2}^{(4)} + T_{V_bk_1k_2} \\ &= \left(\frac{|k_1 \times k_2|^2}{2\rho} p_k \chi_{k_1} \zeta_{k_2} - \frac{|k_1 \times k_2|^2}{2\rho} \chi_k \zeta_{k_1} p_{k_2} \right) \delta_{k+k_1+k_2,0} + \text{c.c.} \end{aligned}$$

と定義すると、エネルギー詳細釣り合い $T_{kk_1k_2} + T_{k_1k_2k} + T_{k_2kk_1} = 0$ が成立する。これは、正準変数 ζ_k と p_k 、あるいは a_k によるエネルギー表現では畳み込み和が現れ、保存則を満足する相互作用の表現に困難があったのを、Airy 応力ポテンシャル χ_k を用いて伸縮エネルギーの 1 波数表現を得ることで、非線形相互作用によるエネルギー輸送の見通しをよくしたことに対応している。

図 4(左) にエネルギー輸送率を示す。外力領域で、外力から伸縮エネルギーへエネルギーが注入され、慣性小領域をカスケードし、散逸領域で運動エネルギーを通じて散逸されていることがわかる。同様にエネルギーフラックス (図 4(右)) でも、全エネルギーフラックス

$$P(k) \equiv - \int_0^k T(k') dk' = \int_k^\infty T(k') dk' \quad (12)$$

より、順方向にエネルギーカスケードしていることが確認される。このとき、系の定常性から、低波数の強乱流領域と高波数の弱乱流領域との間で、フラックスに差はない。このことから、弾性波動乱流における強弱乱流の共存状態は、強弱乱流領域でエネルギーフラックスに基づく時間スケールが異なることに立脚する critical balance の描像とは異なる。

それぞれのエネルギー輸送率について、エネルギーフラックスを

$$P_i(k) \equiv - \int_0^k T_i(k') dk' \quad (13)$$

のように定義することは可能ではあるが、これは最小波数と最大波数で同時に 0 となることができず、ill-defined である。これまでの弱乱流理論で考えられてきたように線形エネルギーに対するフラックスのみを考えると、図 4(右) の $P_K^{(4)}$ のように、符号すら全エネルギーフラックスとは異なることがあるので、非線形エネルギーを考慮することが必要である。

4 まとめ

本研究では、弾性板中を伝播する波動の乱流的性質を調べるために、直接数値計算を行った。エネルギースペクトルにおいては、高波数領域に弱乱流の運動論的方程式の定常解に対応するスペクトルが得られ、低波数領域にそれとは異なる強乱流スペクトルが得られ、これらが共存することがわかった。また二つの領域を分離する波数は自己相互作用に

よる非線形振動数シフトが線形振動数と同程度になる波数であり、弱乱流理論における線形と非線形時間スケールの分離の重要性に呼応している。

Airy 応力ポテンシャルを用いることで、非線形エネルギーである伸縮エネルギーの1波数表現を得た。これによってエネルギー保存則を満足するエネルギー輸送率を定義することが可能となり、エネルギー詳細釣り合いを示すことができた。さらに、得られたエネルギー輸送率の表現によって、外力から伸縮エネルギーへのエネルギーが注入され、慣性小領域を順方向にカスケードし、運動エネルギーとして散逸されるという統計的定常状態を維持する機構が明らかになった。これまでの弱乱流理論に基づく解析では、要素波として複素振幅 a_k 及びそれから派生する n_k に頼ってきたのに対して、エネルギー保存則と矛盾しない非線形相互作用を考える際には、物理変数を用いることが優位であることを示した。

参考文献

- [1] Düring, G., Josserand, C., and Rica, S., “Weak turbulence for a vibrating plate: Can one hear a Kolmogorov spectrum?” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 97, 2006, pp. 025503.
- [2] Boudaoud, A., Cadot, O., Odille, B., and Touzé, C., “Observation of wave turbulence in vibrating plates,” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 100, 2008, pp. 234504.
- [3] Mordant, N., “Are there waves in elastic wave turbulence?” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 100, 2008, pp. 234505.
- [4] Miquel, B. and Mordant, N., “Nonstationary Wave Turbulence in an Elastic Plate,” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 107, 2011, pp. 034501.
- [5] Nazarenko, S., *Wave Turbulence*, Springer, Heidelberg, 2011.
- [6] Landau, L. D. and Lifshitz, E. M., *Theory of Elasticity*, Butterworth-Heinemann, Oxford, 1986.
- [7] Audoly, B. and Pomeau, Y., *Elasticity and geometry*, Oxford University Press, Oxford, 2010.
- [8] Yokoyama, N. and Takaoka, M., “Weak and Strong Wave Turbulence Spectra for Elastic Thin Plate,” *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 110, 2013, pp. 105501.
- [9] Yokoyama, N. and Takaoka, M., “Identification of a separation wave number between weak and strong turbulence spectra for a vibrating plate,” *Phys. Rev. E*, Vol. 89, 2014, pp. 012909.
- [10] Yokoyama, N. and Takaoka, M., “Single-wave-number representation of nonlinear energy spectrum in elastic-wave turbulence of the Föppl–von Kármán equation: Energy decomposition analysis and energy budget,” *Phys. Rev. E*, Vol. 90, 2014, pp. 063004.