

Global asymptotic stability of the zero solution on non-autonomous Liénard systems

島根大学 総合理工学部 杉江 実郎 (Jitsuro Sugie)
島根大学 総合理工学研究科 天野 裕介 (Yusuke Amano)
Department of Mathematics
Shimane University

1. 序論

本論文の目的は非自励な Liénard 方程式系

$$\begin{cases} x' = y - F(x), \\ y' = -p(t)g_1(x) - q(t)g_2(x) \end{cases} \quad (E)$$

の零解が大域的漸近安定になるための十分条件を与えることである。ただし、 $' = d/dt$ とする。方程式系 (E) の零解が大域的漸近安定であるとは、方程式系 (E) の零解が局所的に安定であり、方程式系 (E) のすべての解が零解に漸近することをいう。

方程式系 (E) は自励系

$$\begin{cases} x' = y - F(x), \\ y' = -g(x) \end{cases} \quad (P)$$

を含んでいる。これは Liénard 方程式系と呼ばれており、非線形振動論においては重要な方程式系である van der Pol 方程式系を一般化したものである。方程式系 (P) やそれを一般化した方程式系の零解の大域的漸近安定性について、Liapunov の直接法や LaSalle の不変性原理などを用いて、以前から非常に多くの研究が行われてきた (e.g., [1, 4–12])。

一方、非自励な Liénard 型方程式系についての研究も数多く行われてきたが、零解の大域的漸近安定性に関する結果は乏しい。その理由の一つは LaSalle の不変性原理が非自励系には使えないためである。また、非自励系のベクトル場は変数 t とともに変化するため、自励系の場合と比べて、正の半解軌道は非常に複雑なふるまいをするからである。例えば、非自励系の正の半解軌道は自分自身と交わる可能性がある。また、平衡点以外の内点に収束する可能性もある。以上の理由から、非自励系の解の漸近挙動は扱いにくいといえる。

定義からわかるように、零解が大域的漸近安定になるためには少なくとも局所的に安定でなければならない。本研究を進めるため、零解の局所的安定性に関する研究を 2 つ紹介する。

Hatvani [3] は非自励な非線形微分方程式

$$x'' + a(t)f(x, x')x' + b(t)g(x) = 0 \quad (1)$$

について研究した。ここで、関数 $a : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $b : [0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$, $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \infty)$, $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は連続であり

$$xg(x) > 0 \quad \text{if } x \neq 0 \quad (2)$$

を満たしているとする。彼は, Liapunov 関数

$$V(t, x, x') = \frac{(x')^2}{b(t)} + 2 \int_0^x g(\xi) d\xi$$

を用いることで, 方程式 (1) の平衡点が安定になるための十分条件を与えた。

Theorem A. 条件 (2) を仮定する。また, 次の条件を満たす正の定数 ρ が存在しているとする。

任意の v_0 ($v_0 \neq 0, |v_0| \leq \rho$) に対して $|u| \leq \eta$ ならば
 $f(u, v_0) \neq 0$ を満たすような定数 $\eta = \eta(v_0) > 0$ が存在する, (3)

$$2a(t)b(t)f(u, v) + b'(t) \geq 0 \quad \text{for } t \geq 0, |u| \leq \rho, |v| \leq \rho. \quad (4)$$

さらに

$$\text{任意の } t \geq 0 \text{ に対して } a(t) \geq \gamma b(t) \text{ を満たすような正の定数 } \gamma \text{ が存在する} \quad (5)$$

と仮定する。このとき, 方程式 (1) の平衡点 $x = x' = 0$ は安定である。

また, Cantarelli [2] は方程式 (1) の特別な場合である Liénard 方程式

$$x'' + f(x)x' + b(t)g(x) = 0 \quad (6)$$

について考えた。ここで, $b: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ は C^1 -級関数であり, $f(x)$ と $g(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数である。また, 関数 $g(x)$ は $g(0) = 0$ を満たすものとする。さらに

$$G(x) = \int_0^x g(\xi) d\xi$$

と定義する。Cantarelli [2] は, それぞれ異なった Liapunov 関数を用いることで, 方程式 (6) の平衡点の安定性に関するいくつかの結果を得た。次の結果はそれらの中のひとつである。

Theorem B. 次の条件を満たしていると仮定する。

$$\int_0^\infty \sqrt{b(t)} dt < \infty, \quad (7)$$

$$\inf_{|x| < r} 2f(x) \geq \sup_{t \geq 0} \left(-\frac{b'(t)}{b(t)} \right) \text{ を満たすような正の定数 } r \text{ が存在する}, \quad (8)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{G(x)}{|x|^c} = K \text{ を満たすような定数 } c \geq 2 \text{ と定数 } K \text{ が存在する}, \quad (9)$$

$$\text{任意の } t \geq 0 \text{ に対して } b(t) \leq \bar{b} \text{ を満たすような正の定数 } \bar{b} \text{ が存在する}. \quad (10)$$

このとき, 方程式 (6) の平衡点 $x = x' = 0$ は安定である。

さて, 方程式

$$x'' + x' + (5e^{-4t} + \sin t + \cos t + 3)x = 0 \quad (11)$$

の平衡点 $x = x' = 0$ の安定性について考える. 方程式 (11) は, 方程式 (1) において

$$a(t) = 1, \quad b(t) = 5e^{-4t} + \sin t + \cos t + 3, \quad f(x, x') = 1, \quad g(x) = x$$

のときに対応している. 条件 (3) と条件 (5) は満たされる. しかし

$$\begin{aligned} 2b(t) + b'(t) &= 2(5e^{-4t} + \sin t + \cos t + 3) + (-20e^{-4t} + \cos t - \sin t) \\ &= -10e^{-4t} + \sin t + 3\cos t + 6 \end{aligned}$$

より

$$2b(0) + b'(0) = -1$$

であるから, 条件 (4) は満たされない. 従って, Theorem A では方程式 (11) の平衡点が安定であることは示せない. 一方, 方程式 (11) は, 方程式 (6) において

$$b(t) = 5e^{-4t} + \sin t + \cos t + 3, \quad f(x) = 1, \quad g(x) = x$$

のときに対応しているとも考えられる. このとき, 条件 (9) と条件 (10) は満たされる. しかし

$$\int_{t_0}^{\infty} \sqrt{5e^{-4t} + \sin t + \cos t + 3} dt \geq \int_{t_0}^{\infty} \sqrt{3 - \sqrt{2}} dt = \infty$$

となるので, 条件 (7) は満たされない. また

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} 2f(x) = 2,$$

$$\sup_{t \geq 0} \left(-\frac{b'(t)}{b(t)} \right) = \sup_{t \geq 0} \left(-\frac{-20e^{-4t} + \cos t - \sin t}{5e^{-4t} + \sin t + \cos t + 3} \right) \geq -\frac{b'(0)}{b(0)} = \frac{19}{9} > 2$$

であるので, 条件 (8) も満たされない. ゆえに, Theorem B でも方程式 (11) の平衡点が安定であることを示すことができない. しかし, 2 節で与える Theorem 1 を用いることによって, 方程式 (11) の平衡点は大域的漸近安定であることがわかる.

2. 標準形

まず, 本研究で用いるアイデアを明白にするために, 方程式系 (E) の標準形である非自励な Liénard 方程式系

$$\begin{cases} x' = y - x, \\ y' = -p(t)g_1(x) - q(t)g_2(x) \end{cases} \quad (E^*)$$

について考察する. ただし, $g_1(x), g_2(x)$ は

$$xg_i(x) > 0 \quad \text{if } x \neq 0 \quad (i = 1, 2) \quad (A_1)$$

を満たしている $\mathbb{R}$ 上の連続関数とする. また, $p(t), q(t)$ はある非負の定数 α に対して区間 $[\alpha, \infty)$ 上で微分可能な非負の関数とする. このとき, 原点は方程式系 (E*) の唯一の平衡点であり, 方程式系 (E*) は零解 $(x(t), y(t)) \equiv (0, 0)$ が唯一の自明解である. さらに, 初期値に関する方程式系 (E*) の解の一意性が保証されたとする. ここで

$$G_i(x) = \int_0^x g_i(\xi) d\xi \quad (i = 1, 2)$$

と定義する.

方程式系 (E^*) の零解の大域的漸近安定性について次の結果を導くことができた.

Theorem 1. 条件 (A_1) を仮定する. さらに, 次の条件

$$p(t)xg_1(x) \geq \frac{1}{4}x^2 \quad \text{for } t \geq \alpha, x \in \mathbb{R}, \quad (A_2^*)$$

$$p'(t) \leq 0 \quad \text{for } t \geq \alpha, \quad (A_3)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t) > 0, \quad (A_4)$$

$$q(t)xg_2(x) \geq q'(t)G_2(x) \quad \text{for } t \geq \alpha, x \in \mathbb{R}, \quad (A_5^*)$$

$$0 \leq q(t) < \infty \quad \text{for } t \geq \alpha, \quad (A_6)$$

を満たすとする. このとき, 方程式系 (E^*) の零解は大域的漸近安定である.

Remark. 条件 (A_2^*) , (A_3) から

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} G_1(x) = \infty$$

が導ける.

Theorem 1 の証明の概略 方程式系 (E^*) に極座標変換を行うことにより, 方程式系 (E^*) と同値な方程式系を得る. この方程式系を用いて, 方程式系 (E^*) の正の半解軌道の漸近挙動を調べると, 方程式系 (E^*) の正の半解軌道が

(a) 原点のまわりを時計回りに無限回まわる

(b) 直線 $y = x/2$ に漸近する

の 2 つの場合に分類することができる. 証明は以下の手順で行う. まず, 方程式系 (E^*) の正の半解軌道は原点を除く任意の内点に収束しないことを示す. 次に, Liapunov 関数を用いて, 方程式系 (E^*) の零解が安定であることを示す. 最後に, 方程式系 (E^*) のすべての解が零解に漸近することを上記の 2 つの場合に分けて証明する. Case(a) では, Liapunov 関数を用いるとともに相平面解析を行って, 方程式系 (E^*) の正の半解軌道が原点に漸近することを示す. Case(b) では, 方程式系 (E^*) の正の半解軌道が領域 $R_1 = \{(x, y): x > 0 \text{ and } x/2 < y < x\}$ または $R_2 = \{(x, y): x < 0 \text{ and } x < y < x/2\}$ の内部を通過しながら原点に漸近していくことを示す. $\square$

上述したように, Theorem A と Theorem B では, 方程式

$$x'' + x' + (5e^{-4t} + \sin t + \cos t + 3)x = 0 \quad (11)$$

の平衡点 $x = x' = 0$ が安定であることさえ示すことができなかった. しかし, Theorem 1 を用いると, 方程式 (11) の平衡点が大域的漸近安定であることがわかる. まず, 方程式 (11) を

$$\begin{cases} x' = y - x, \\ y' = -(5e^{-4t} + 1)x - (\sin t + \cos t + 2)x \end{cases} \quad (12)$$

に同値変換する．このとき，明らかに，条件 (A_1) , (A_3) , (A_4) , (A_6) は満たされる．また，条件 (A_2^*) と (A_5^*) も

$$p(t)xg_1(x) = (5e^{-4t} + 1)x^2 > \frac{1}{4}x^2 \quad \text{for } t \geq 0, x \in \mathbb{R}$$

と

$$q(t)xg_2(x) - q'(t)G_2(x) = \left(\frac{3}{2} \sin t + \frac{1}{2} \cos t + 2 \right) x^2 \geq 0 \quad \text{for } t \geq 0, x \in \mathbb{R}$$

より満たされる．ゆえに，方程式系 (12) の零解は大域的漸近安定である．よって，方程式 (11) の平衡点は大域的漸近安定である．方程式系 (12) の解軌道図は次のようになる．

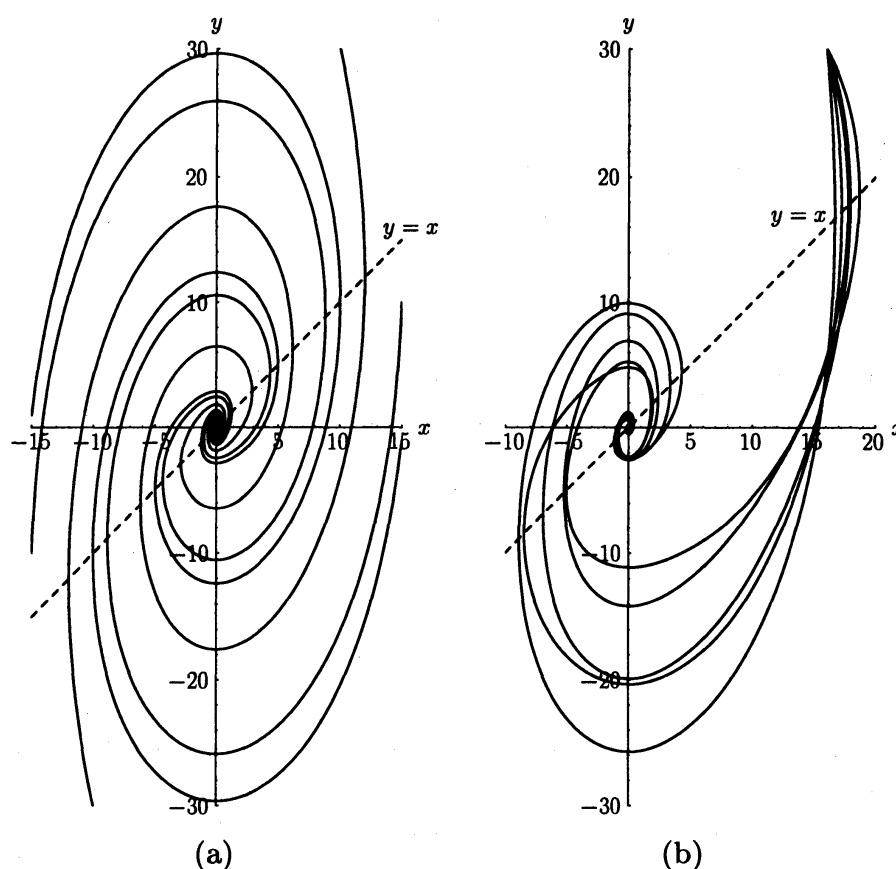


Figure 1

Figure 1 から，方程式系 (12) の零解が大域的漸近安定であることが見てとれる．Figure 1(a) では，初期条件 $(x(0), y(0)) = (10, 30), (15, 10), (15, -1), (-10, -30), (-15, 1), (-15, -10)$ を与えたときの正の半解軌道を表している．Figure 1(b) の正の半解軌道の初期値は $(16, 30)$ で，初期時刻はそれぞれ， $t_0 = 0, 5, 10, 15, 20$ である．

また，Theorem A と Theorem B では，方程式系 (E^*) の関数 $g_1(x)$ と $g_2(x)$ が異なる場合には適用されないが，Theorem 1 はそのような場合でさえも適用できる．実際，Liénard 方程式系

$$\begin{cases} x' = y - x, \\ y' = -\left(\frac{1}{t+1} + \frac{1}{4}\right)x - \left(\frac{t}{t+1} \sin t + \sqrt{2}\right)x(\sin x + 2) \end{cases} \quad (13)$$

の零解が大域的漸近安定であることを示すことができる．方程式系 (13) の解軌道図は次のようになる．

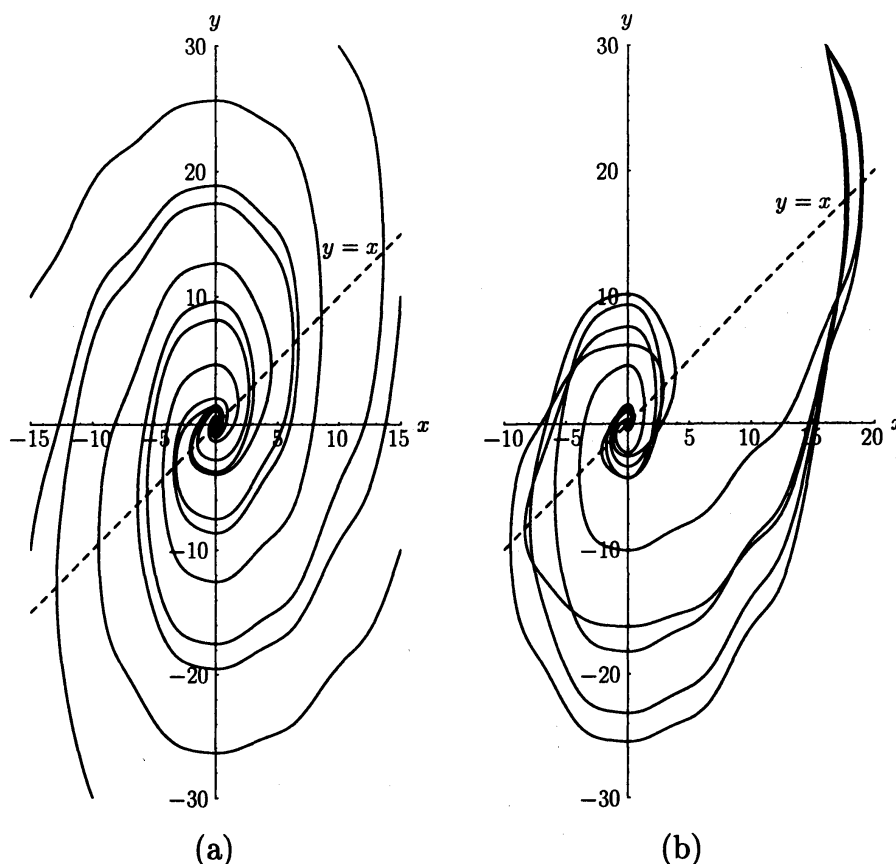


Figure 2

Figure 2 は，方程式系 (13) の零解が大域的漸近安定であることを示している．Figure 2(a) では，初期条件 $(x(0), y(0)) = (10, 30), (15, 10), (15, -10), (-10, -30), (-15, -10), (-15, 10)$ を満たす正の半解軌道が描かれている．Figure 2(b) の曲線は，初期値 $(16, 30)$ で，初期時刻をそれぞれ， $t_0 = 0, 5, 10, 15, 20$ としたときの正の半解軌道である．

3. 一般形

方程式系 (E^*) を含む方程式系

$$\begin{cases} x' = y - F(x), \\ y' = -p(t)g_1(x) - q(t)g_2(x) \end{cases} \quad (E)$$

の零解が大域的漸近安定になるための十分条件を与えるため Theorem 1 を拡張する．ここで， $F(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の連続関数であり，初期値に関する解の一意性が保証されるぐらい十分滑らかであるとする．以下では，条件 $(A_1), (A_3), (A_4), (A_6)$ に加えて

$$xF(x) > 0 \quad \text{if } x \neq 0 \quad (A_7)$$

を仮定する．このとき， $|x| \rightarrow \infty$ のとき $|F(x)| \rightarrow \infty$ であるとは限らない．もし，領域 $D^+ = \{(x, y) : x > 0 \text{ and } y > F(x)\}$ または $D^- = \{(x, y) : x < 0 \text{ and } y < F(x)\}$ に初期値をもつ方程式系 (E) の正の半解軌道が特性曲線 $y = F(x)$ に交わずに無限遠点に流

れば, 方程式系 (E) の零解は大域的漸近安定ではない. 従って, 領域 D^+ または D^- に初期値をもつ正の半解軌道が特性曲線に交わることを保証する条件

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{G_1(x) + F(x)\} = \infty \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \{G_1(x) - F(x)\} = \infty \quad (A_8)$$

を仮定する. また, 条件 (A_2^*) と (A_5^*) の代わりに

$$p(t)xg_1(x) \geq \frac{1}{4}F^2(x) \quad \text{for } t \geq \alpha, x \in \mathbb{R} \quad (A_2)$$

と

$$q(t)F(x)g_2(x) \geq q'(t)G_2(x) \quad \text{for } t \geq \alpha, x \in \mathbb{R}, \quad (A_5)$$

を仮定する. このとき, 方程式系 (E) の零解の大域的漸近安定性について次の結果を導くことができた.

Theorem 2. 条件 $(A_1)-(A_8)$ を仮定する. このとき, 方程式系 (E) の零解は大域的漸近安定である.

Remark. 条件 (A_2) , (A_3) , (A_8) から

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} G_1(x) = \infty$$

が導ける.

Theorem 2 の証明の概略 方程式系 (E) に極座標変換を行うことにより, 方程式系 (E) と同値な方程式系を得る. この方程式系から, 方程式系 (E) の正の半解軌道が

(a) 原点のまわりを時計回りに無限回まわる

(b) 直線 $y = (\tan \hat{\theta})x$ に漸近する

の 2 つの場合が起きることがわかる. ただし, $\hat{\theta}$ は

$$\theta(t) \searrow \hat{\theta} \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

を満たす定数である. Theorem 1 のときと同様に, まず, 方程式系 (E) の正の半解軌道は原点を除く任意の内点に収束しないことを示す. 次に, Liapunov 関数を用いて, 方程式系 (E) の零解が安定であることを示す. 最後に, 方程式系 (E) のすべての解が零解に漸近することを上述の 2 つの場合に分けて証明する. Case(a) では, Theorem 1 と同様の相平面解析を用いて, 方程式系 (E) の正の半解軌道が原点に漸近することを示す. Case(b) では, 方程式系 (E) の正の半解軌道が領域 $R_3 = \{(x, y): x > 0 \text{ and } \tan \hat{\theta} < y/x < \tan(\hat{\theta} + \varepsilon)\}$ または $R_4 = \{(x, y): x < 0 \text{ and } \tan \hat{\theta} < y/x < \tan(\hat{\theta} + \varepsilon)\}$ の内部を通過しながら原点に漸近していくことを示す. $\square$

Theorem 1 は, 方程式系 (E) において $F(x) = x$ の場合のみ適用できるが, Theorem 2 は, $F(x)$ が有界の場合でも適用できる. 例えば, Liénard 方程式系

$$\begin{cases} x' = y - \frac{x}{|x| + 1}, \\ y' = -\left(\frac{1}{\log(t+2)} + \frac{1}{4}\right) \frac{x}{|x| + 1} - \frac{2x}{(t+1)(x+2)^2} \end{cases}$$

の零解は大域的漸近安定であることを示すことができる.

参考文献

- [1] T.A. Burton, On the equation $x'' + f(x)h(x')x' + g(x) = e(t)$, *Ann. Mat. Pura Appl.* 85 (1970) 277–285.
- [2] G. Cantarelli, On the stability of the origin of a non autonomous Liénard equation, *Boll. Un. Mat. Ital.* (7) 10-A (1996) 563–573.
- [3] L. Hatvani, On the stability of the zero solution of nonlinear second order differential equations, *Acta Sci. Math.* (Szeged) 57 (1993) 367–371.
- [4] J.W. Heidel, A Liapunov function for a generalized Liénard equation, *J. Math. Anal. Appl.* 39 (1972) 192–197.
- [5] J.-F. Jiang, The global stability of a class of second order differential equations, *Nonlinear Anal.* 28 (1997) 855–870.
- [6] J.P. LaSalle, S. Lefschetz, *Stability by Liapunov's Direct Method*, Academic Press, New York, 1961.
- [7] C. Qian, On global asymptotic stability of second order nonlinear differential systems, *Nonlinear Anal.* 22 (1994) 823–833.
- [8] G. Seifert, Global asymptotic behavior of solutions of positively damped Liénard equations, *Ann. Polon. Math.* 51 (1990) 283–288.
- [9] J. Sugie, D.-L. Chen, H. Matsunaga, On global asymptotic stability of systems of Liénard type, *J. Math. Anal. Appl.* 219 (1998) 140–164.
- [10] J. Sugie, Liénard dynamics with an open limit orbit, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 8 (2001) 83–97.
- [11] T. Wiandt, A counterexample to a conjecture on the global asymptotic stability for Liénard equation, *Appl. Anal.* 56 (1995) 207–212.
- [12] T. Yoshizawa, *Stability Theory by Liapunov's Second Method*, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1966.