

一般導分に付随した関手¹

岡山県立大学・情報工学部 小松 弘明 (Hiroaki Komatsu)
Faculty of Computer Science and System Engineering
Okayama Prefectural University

導分概念を一般化した一般導分をさらに一般化して、両側加群の間の一般導分を [5] で提案した。そして、分離環拡大との関連を調べた。本稿では分離環拡大を両側加群の一般導分によって特徴付ける。また、多元環の微分加群を両側加群の関手に拡張し、その性質を調べる。

本稿で扱う環はすべて単位元を有し、環上の加群はすべて単位元が恒等的に作用するものとする。常に R は可換環を表し、 K, L は R 多元環を表す。 A は K 環で B は L 環を表す。即ち、 R 多元環の準同型写像 $K \rightarrow A$ と $L \rightarrow B$ で単位元を単位元に移すものが与えられたとするのである。また、左 A 加群の圏を ${}_A M$ で表し、 (A, B) 両側加群で左右からの R の作用が等しいもの全体のなす圏を ${}_A M_B$ で表す。 $M, N \in {}_A M_B$ に対して、 M から N への (A, B) 準同型写像の全体を ${}_A \text{Hom}_B(M, N)$ で表す。

1. 両側加群の一般導分

$M \in {}_A M_A$ とする。 (K, K) 準同型写像 $f: A \rightarrow M$ で

$$f(xy) = f(x)y + xf(y) \quad (x, y \in A)$$

を満たすものを K 導分という。導分は微分演算子とも呼ばれ、古くから研究されてきた。20 世紀の終盤になって、導分の一般化が Brešar [2], Leger・Luks [6], Nakajima [8] によって提案された。それらは単位元を有する多元環に対してはすべて同じ概念である ([5, Theorem 6])。 (K, K) 準同型写像 $f: A \rightarrow M$ で

$$f(xy) = f(x)y + xf(y) - xf(1)y \quad (x, y \in A)$$

を満たすものが、 K 一般導分である。この関係式は

$$f(xyz) = f(xy)z + xf(yz) - xf(y)z \quad (x, y, z \in A)$$

と同値である。筆者はこの第二の関係式に着目することによって、両側加群の間の一般導分概念を提案した。

定義 1.1 ([5]). $M, N \in {}_A M_B$ とする。 (K, L) 準同型写像 $f: M \rightarrow N$ で

$$f(amb) = f(am)b + af(mb) - af(m)b \quad (a \in A, m \in M, b \in B)$$

を満たすものを (K, L) 一般導分という。 M から N への (K, L) 一般導分の全体がなす集合を ${}_{A/K} \text{GDer}_{B/L}(M, N)$ で表す。

¹ 本論文は投稿予定の論文の予報である。

再び $M \in {}_A\mathbf{M}_A$ とする. M の元 m が定める内部導分とは, R 導分

$$A \ni x \mapsto xm - mx \in M$$

のことである. この概念も一般化されており, M の元 m, n によって定まる R 一般導分

$$A \ni x \mapsto xm + nx \in M$$

は一般内部導分と呼ばれている. 本稿では, 両側加群の間の一般内部導分を提案する.

定義 1.2. 各 $M, N \in {}_A\mathbf{M}_B$ に対して,

$${}_{A/K}\mathrm{GInn}_{B/L}(M, N) = {}_A\mathrm{Hom}_L(M, N) + {}_K\mathrm{Hom}_B(M, N)$$

とおく. ${}_{A/K}\mathrm{GInn}_{B/L}(M, N)$ の元を (K, L) 一般内部導分という.

[5] でも一般内部導分を扱ったのだが, そこでは一般内部導分という呼称を用いていない. 明らかに, ${}_{A/K}\mathrm{GDer}_{L/B}$ は関手 ${}_K\mathrm{Hom}_L(-, -) : {}_A\mathbf{M}_B \rightarrow {}_R\mathbf{M}$ の部分関手となり, ${}_{A/K}\mathrm{GInn}_{B/L}$ は ${}_{A/K}\mathrm{GDer}_{B/L}$ の部分関手となる.

例 1.3. $A = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & w \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z, w \in R \right\}, B = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mid x, y, z \in R \right\}$ の

とき, 写像 $f : A \ni \begin{pmatrix} x & y & z \\ 0 & x & w \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \in A$ は ${}_{A/R}\mathrm{GDer}_{B/R}(A, A)$ に属するが, ${}_{A/R}\mathrm{GInn}_{B/R}(A, A)$ には属さない.

2. 普遍一般導分

両側加群の一般導分について普遍的なものが [5] において示されている. ここでは, それとは異なった構成方法を紹介する.

各 $M \in {}_A\mathbf{M}_B$ に対して, (K, L) 準同型写像

$$E_M : A \otimes_K M \otimes_L B \rightarrow A \otimes_K M \otimes_L B$$

を $E_M(a \otimes m \otimes b) = a \otimes m \otimes b - 1 \otimes am \otimes b - a \otimes mb \otimes 1 + 1 \otimes amb \otimes 1$ によって定め, その余核を

$$\pi_M : A \otimes_K M \otimes_L B \rightarrow \mathcal{U}(M)$$

とする. E_M の像は $A \otimes_K M \otimes_L B$ の (A, B) 部分加群であるから, 関手

$$\mathcal{U} : {}_A\mathbf{M}_B \rightarrow {}_A\mathbf{M}_B$$

を得る. また, π_M は (A, B) 準同型写像である. (K, L) 準同型写像

$$\eta_M : M \ni m \mapsto 1 \otimes m \otimes 1 \in A \otimes_K M \otimes_L B$$

を用いて

$$v_M = \pi_M \eta_M : M \rightarrow \mathcal{U}(M)$$

とおく. このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 2.1. 各 $M, N \in {}_A\mathbf{M}_B$ に対して, R 線形写像

$${}_A\mathrm{Hom}_B(\mathcal{U}(M), N) \ni \varphi \mapsto \varphi \nu_M \in {}_{A/K}\mathrm{GDer}_{B/L}(M, N)$$

は自然同型である.

ところで, [5, Corollary 14] では, ある $\mathcal{J} \in {}_A\mathbf{M}_B$ を用いて, $M, N \in {}_A\mathbf{M}_B$ に関する自然同型

$${}_A\mathrm{Hom}_B(\mathcal{J} \otimes_{A \otimes_R B^{\mathrm{op}}} M, N) \simeq {}_{A/K}\mathrm{GDer}_{B/L}(M, N)$$

が得られているから, 自然同型

$$\mathcal{U}(M) \simeq \mathcal{U}(A \otimes_R B) \otimes_{A \otimes_R B^{\mathrm{op}}} M$$

が導かれ,

$$\begin{aligned} {}_A\mathrm{Hom}_B(\mathcal{U}(M), N) &\simeq {}_A\mathrm{Hom}_B(\mathcal{U}(A \otimes_R B) \otimes_{A \otimes_R B^{\mathrm{op}}} M, N) \\ &\simeq {}_A\mathrm{Hom}_B(M, {}_A\mathrm{Hom}_B(\mathcal{U}(A \otimes_R B), N)) \\ &\simeq {}_A\mathrm{Hom}_B(M, {}_{A/K}\mathrm{GDer}_{B/L}(A \otimes_R B, N)) \end{aligned}$$

が成り立つ. よって, 次の結果を得る.

定理 2.2. 関手 $\mathcal{U}$ は関手 ${}_{A/K}\mathrm{GDer}_{B/L}(A \otimes_R B, -) : {}_A\mathbf{M}_B \rightarrow {}_A\mathbf{M}_B$ の左随伴関手である.

3. 分離環拡大の一般導分による特徴付け

Auslander・Goldman [1] によって導入された分離多元環の概念は, Hirata・Sugano [4], Miyashita [7] によって環拡大にまで拡張された. 写像 $A \otimes_K A \ni x \otimes y \mapsto xy \in A$ が (A, A) 準同型写像として分裂するとき, K 環 A は分離的であるという. R 多元環が分離的であるためにはすべての R 導分が内部導分であることが必要十分である. この事実は環拡大でも成り立つことが Elliger [3, Satz 4.2] で示された. 筆者は両側加群の一般導分について関連する結果を得た ([5, Theorems 16, 17, 18]). 次の定理はそれらを一般化するものである.

定理 3.1. K 環 A について, 次の条件は同値である.

- (1) A は分離 K 環である.
- (2) 任意の R 多元環 L , 任意の L 環 B に対して ${}_{A/K}\mathrm{GDer}_{B/L} = {}_{A/K}\mathrm{GInn}_{B/L}$ である.
- (3) 任意の $M \in {}_A\mathbf{M}_A$ に対して ${}_{A/K}\mathrm{GDer}_{A/K}(M, M) = {}_{A/K}\mathrm{GInn}_{A/K}(M, M)$ である.

4. 分離関手

分離環拡大と結び付きがある分離関手について考察する. 関手 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が分離関手であるとは, $X, Y \in \mathcal{C}$ に関する自然変換

$$\Phi_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

が存在して, すべての $f \in \text{Hom}_C(X, Y)$ に対して $\Phi_{X,Y}(F(f)) = f$ が成り立つことである ([9]). K 環 A が分離的であることと制限関手 ${}_A M \rightarrow {}_K M$ が分離的であることは同値である ([9, Proposition 1.3]).

次の結果を得る.

定理 4.1. A が分離 K 環で B が分離 L 環ならば, 関手 ${}_{A/K} \text{GDer}_{B/L}(A \otimes_R B, -)$ および関手 $\mathcal{U}$ は共に分離関手である.

REFERENCES

- [1] M. Auslander and O. Goldman, The Brauer group of a commutative ring, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **97** (1960), 367–409.
- [2] M. Brešar, On the distance of the composition of two derivations to the generalized derivations, *Glasgow Math. J.*, **33** (1991), 89–93.
- [3] S. Elliger, Über Automorphismen und Derivationen von Ringen, *J. Reine Angew. Math.*, **277** (1975), 155–177.
- [4] K. Hirata and K. Sugano, On semisimple extensions and separable extensions over noncommutative rings, *J. Math. Soc. Japan*, **18** (1966), 360–373.
- [5] H. Komatsu, Generalized derivations of bimodules, *Intern. J. Pure Appl. Math.*, **77** (2012), 579–593.
- [6] G. F. Leger and E. M. Luks, Generalized derivations of Lie algebras, *J. Algebra*, **228** (2000), 165–203.
- [7] Y. Miyashita, Finite outer Galois theory of non-commutative rings, *J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I*, **19** (1966), 114–134.
- [8] A. Nakajima, On categorical properties of generalized derivations, *Scientiae Math.*, **2** (1999), 345–352.
- [9] C. Năstăsescu, M. van den Bergh, and F. van Oystaeyen, Separable functors applied to graded rings, *J. Algebra*, **123** (1989), 397–413.