

非局所的な非線形シュレーディンガー方程式における暗いソリトンの発生

山口大工学部 松野好雅 (Yoshimasa Matsuno)

I. 概要

最近、有限深さの流体中を伝播する内部波の変調を記述するモデル方程式として次の発展方程式が導出された [1]:

$$iu_t = u_{xx} + u(i + T)(|u|^2)_x \quad (1.1a)$$

$$Tu(x, t) = \frac{1}{2\delta} P \int_{-\infty}^{\infty} \coth \left[\frac{\pi(y-x)}{2\delta} \right] u(y, t) dy. \quad (1.1b)$$

ここで $u = u(x, t)$ は波の包絡線を表す複素振幅、 T は積分演算子、 δ は流体の深さに比例した定数である。方程式 (1.1) の定数解は微小攪乱に対して安定であることが示される。その結果、(1.1) は次の暗いソリトン解を有する。

$$u = \rho \frac{1 + \frac{V-i\kappa}{V+i\kappa} e^{-\kappa(\xi-i\delta)}}{1 + e^{-\kappa(\xi-i\delta)}} \quad |u|^2 = \rho^2 - \frac{\kappa \sin(\kappa\delta)}{\cosh(\kappa\xi) + \cos(\kappa\delta)}. \quad (1.2)$$

ここで $\xi = x - Vt - x_0$ 。ソリトンの速さ V は 2 次方程式 $V^2 + 2\rho^2 V + \kappa^2 = 2\rho^2 \kappa \cot(\kappa\delta)$ によって決定される。

方程式 (1.1) の初期値問題は逆散乱法を適用することにより解くことができ [2]、任意の初期値はソリトンと分散波 (Tail) に分裂することが示される。ここで興味がある問題はいかなる初期値の下で新たなソリトンが発生するか、またこの場合、初期値の大きさに対する閾値は存在するか等である。本研究では初期値として、一定の背景に小さな摂動を加えた以下のものを考える。

$$u(x, 0) = \rho + \epsilon v(x). \quad (1.3)$$

ここで ρ は正の定数、 $v(x)$ は無限で零となるような複素関数、 ϵ は摂動の強さを表す小さな正のパラメータである。結論として条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} (v(x) + v^*(x)) dx < 0 \quad (1.4)$$

が満たされるとき、摂動により一組の暗いソリトンが発生し、さらに摂動に対する閾値は存在しないことを示す。なお、以下の議論の詳細に関しては文献 [3] を参照されたい。

II. 固有値問題

初期条件 (1.3) のもとでの方程式 (1.1) の固有値問題は以下の線形微分差分方程式系に帰着される：

$$i\phi_x - \frac{\mu}{2}\phi + \rho\psi^+ = -\epsilon v\psi^+ \quad (2.1a)$$

$$\psi^+ - \lambda\psi^- + \rho\phi = -\epsilon v^*\phi. \quad (2.1b)$$

ここで $\psi^\pm(x) = \psi(x \mp i\delta)$ 。Jost 関数の無限遠での漸近形を $\phi \sim e^{\pm ikx/2}$, $\psi \sim e^{\pm ikx/2}$ のように選ぶと、(2.1) に含まれるパラメータ μ 、および κ はスペクトルパラメータ k によって次のように表せる。

$$\mu^2 + 2\rho^2\mu = 2\rho^2k \coth(k\delta) + k^2 \quad (2.2a)$$

$$\lambda = \frac{k}{k \cosh(k\delta) - \mu \sinh(k\delta)}. \quad (2.2b)$$

逆散乱法によれば、散乱データの n 番目の零点 $k_n = i\kappa_n$ ($0 < \kappa_n < \kappa_c$) は n 番目のソリトンに対応している。ここで、 κ_c は方程式 $\kappa_c \tan(\kappa_c\delta/2) = \rho^2$ の最小の正の解である。そこで $\mu = \mu(i\kappa)$ 、 $\lambda = \lambda(i\kappa)$, ($0 < \kappa < 1$) とおき、固有値方程式 (2.1) を摂動論で解く。その為に ϕ 、および $\psi^\pm$ をフーリエ積分で以下のように表す。

$$\phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \alpha(k) e^{ikx/2} dk \quad (2.3a)$$

$$\psi^\pm(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \beta(k) e^{ik(x \mp i\delta)/2} dk. \quad (2.3b)$$

この式を (2.1) に代入し、逆フーリエ変換をとると、以下に示す α と β に関する連立線形積分方程式が導かれる。ここで簡単のため

$$-\frac{1}{2}\{k + \mu(i\kappa)\}\alpha(k) + \rho e^{k\delta/2}\beta(k) = -\frac{\epsilon}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(k, k') e^{k'\delta/2} \beta(k') dk' \quad (2.4a)$$

$$\rho\alpha(k) + \{e^{k\delta/2} - \lambda(i\kappa)e^{-k\delta/2}\}\beta(k) = -\frac{\epsilon}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^*(k', k) \alpha(k') dk' \quad (2.4b)$$

$$K(k, k') = \int_{-\infty}^{\infty} v(x) e^{-i(k-k')x/2} dx \quad (2.4c)$$

とおいた。さらに新たな変数 A 、 B および D を

$$A(k) = D(k, \kappa) \alpha(k) \quad (2.5a)$$

$$B(k) = D(k, \kappa) \beta(k) e^{k\delta/2} \quad (2.5b)$$

$$D(k, \kappa) = -\frac{1}{2} \{k + \mu(i\kappa)\} \{1 - \lambda(i\kappa) e^{-k\delta}\} - \rho^2 \quad (2.5c)$$

で定義すると、(2.4) は次のように書き換えられる。

$$A(k) = \frac{\epsilon\rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K^*(k', k)}{D(k', \kappa)} A(k') dk' - \frac{\epsilon}{4\pi} \{1 - \lambda(i\kappa) e^{-k\delta}\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(k, k')}{D(k', \kappa)} B(k') dk' \quad (2.6a)$$

$$B(k) = \frac{\epsilon}{8\pi} \{k + \mu(i\kappa)\} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K^*(k', k)}{D(k', \kappa)} A(k') dk' + \frac{\epsilon\rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(k, k')}{D(k', \kappa)} B(k') dk'. \quad (2.6b)$$

上式が以下の解析の出発点となる基礎方程式である。

最初に、(2.6) の被積分関数の中に現われる関数 $D(k', \kappa)$ は $k' = \pm i\kappa$ において零となることに注意する。これを見るために (2.1) で $|x| \rightarrow \infty$ とし、 ϕ 、および ψ の漸近形を代入して導かれる関係式

$$1 - \lambda(k) e^{-k\delta} = -\frac{2\rho^2}{k + \mu(k)} \quad (2.7)$$

に注意する。(2.7) を (2.5c) に代入すると以下の式

$$D(k, \kappa) = -\frac{1}{2} \{k + \mu(i\kappa)\} \{\lambda(k) - \lambda(i\kappa)\} e^{-k\delta} - \rho^2 \frac{\mu(k) - \mu(i\kappa)}{k + \mu(k)} \quad (2.8)$$

が得られるが、関係式、 $\mu(k) = \mu(-k)$ 、 $\lambda(k) = \lambda(-k)$ により $D(\pm i\kappa, \kappa) = 0$ が従う。それゆえ、(2.6) は $\kappa \rightarrow 0$ の極限において特異性を示す。これが新たな固有値発生の原因である。そこでこの特異点を除去するために、これを含む被積分関数を以下のように変形する。

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K^*(k', k)}{D(k', \kappa)} A(k') dk' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k'^2 + \kappa^2} \left[\frac{k'^2 + \kappa^2}{D(k', \kappa)} K^*(k', k) A(k') - \{C_R(\kappa) k' + C_I(\kappa) \kappa\} K^*(0, k) A(0) \right] dk' \end{aligned}$$

$$+\pi C_I(\kappa)K^*(0, k)A(0) \quad (2.9a)$$

$$C_R(\kappa) = \frac{1}{D_k(i\kappa, \kappa)} + \frac{1}{D_k(-i\kappa, \kappa)} \quad (2.9b)$$

$$C_I(\kappa) = i \left[\frac{1}{D_k(i\kappa, \kappa)} - \frac{1}{D_k(-i\kappa, \kappa)} \right]. \quad (2.9c)$$

(2.9)、および類似の関係式を (2.6) へ代入すると A 、および B に関する次の方程式系が得られる：

$$\begin{aligned} A(k) = & \frac{\epsilon}{4} C_I(\kappa) \left[\rho K^*(0, k) A(0) - \{1 - \lambda(i\kappa)e^{-k\delta}\} K(k, 0) B(0) \right] \\ & + \frac{\epsilon\rho}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k'^2 + \kappa^2} \left\{ \frac{k'^2 + \kappa^2}{D(k', \kappa)} K^*(k', k) A(k') - (C_R(\kappa)k' + C_I(\kappa)\kappa) K^*(0, k) A(0) \right\} dk' \right] \\ & - \frac{\epsilon}{4\pi} \{1 - \lambda(i\kappa)e^{-k\delta}\} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k'^2 + \kappa^2} \left\{ \frac{k'^2 + \kappa^2}{D(k', \kappa)} K(k, k') B(k') \right. \right. \\ & \left. \left. - (C_R(\kappa)k' + C_I(\kappa)\kappa) K(k, 0) B(0) \right\} dk' \right] \end{aligned} \quad (2.10a)$$

$$\begin{aligned} B(k) = & \frac{\epsilon}{4} C_I(\kappa) \left[\frac{1}{2} \{k + \mu(i\kappa)\} K^*(0, k) A(0) + \rho K(k, 0) B(0) \right] \\ & + \frac{\epsilon}{8\pi} \{k + \mu(i\kappa)\} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k'^2 + \kappa^2} \left\{ \frac{k'^2 + \kappa^2}{D(k', \kappa)} K^*(k', k) A(k') \right. \right. \\ & \left. \left. - (C_R(\kappa)k' + C_I(\kappa)\kappa) K^*(0, k) A(0) \right\} dk' \right] \\ & + \frac{\epsilon\rho}{4\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k'^2 + \kappa^2} \left\{ \frac{k'^2 + \kappa^2}{D(k', \kappa)} K(k, k') B(k') - (C_R(\kappa)k' + C_I(\kappa)\kappa) K(k, 0) B(0) \right\} dk' \right]. \end{aligned} \quad (2.10b)$$

III. 摂動解析

ここでは (2.10) を摂動法で解く。その為に、 A 、 B 、および κ を ϵ の冪で以下のように展開する。

$$A(k) = A_0(k) + \epsilon A_1(k) + \cdots \quad (3.1a)$$

$$B(k) = B_0(k) + \epsilon B_1(k) + \cdots \quad (3.1b)$$

$$\kappa = \epsilon \kappa_1 + \epsilon^2 \kappa_2 + \cdots. \quad (3.1c)$$

(3.1) を (2.10) に代入すると ϵ^0 のオーダーで

$$A_0(k) = -\frac{1}{2\kappa_1\lambda_0\delta(1-(\delta\mu_0/2))} [\rho K^*(0, k)A_0(0) - (1 - \lambda_0 e^{-k\delta})K(k, 0)B_0(0)] \quad (3.2a)$$

$$B_0(k) = -\frac{1}{2\kappa_1\lambda_0\delta(1-(\delta\mu_0/2))} \left[\frac{1}{2}(k + \mu_0)K^*(0, k)A_0(0) + \rho K(k, 0)B_0(0) \right]. \quad (3.2b)$$

が得られる。ここで

$$\mu_0^2 + 2\rho^2\mu_0 - \frac{2\rho^2}{\delta} = 0 \quad \lambda_0 = \frac{1}{1 - \delta\mu_0}. \quad (3.2c)$$

(3.2) において $k = 0$ とおくと、

$$(z + \rho K^*(0, 0))A_0(0) - (1 - \lambda_0)K(0, 0)B_0(0) = 0 \quad (3.3a)$$

$$\frac{1}{2}\mu_0 K^*(0, 0)A_0(0) + (z + \rho K(0, 0))B_0(0) = 0 \quad (3.3b)$$

$$z \equiv 2\kappa_1\lambda_0\delta \left(1 - \frac{1}{2}\delta\mu_0 \right). \quad (3.3c)$$

(3.3) は $A_0(0)$ 、 $B_0(0)$ に関する同次線形方程式であり、これの可解条件より

$$(z + \rho K^*(0, 0))(z + \rho K(0, 0)) + \frac{1}{2}\mu_0(1 - \lambda_0)K^*(0, 0)K(0, 0) = 0 \quad (3.4)$$

が導かれるが、 $z \neq 0$ を考慮すると (3.4) の解として

$$z = -\rho(K(0, 0) + K^*(0, 0)) \quad (3.5)$$

を得ることができる。これは次のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= -\frac{\rho}{2\delta} \frac{1 - \delta\mu_0}{1 - (\delta\mu_0/2)} (K(0, 0) + K^*(0, 0)) \\ &= -\frac{\rho}{2\delta} \left(1 \mp \frac{1}{\sqrt{1 + (2/\delta\rho^2)}} \right) (K(0, 0) + K^*(0, 0)). \end{aligned} \quad (3.6)$$

条件 $\kappa > 0$ は $\kappa_1 > 0$ を意味し、後者は

$$K(0, 0) + K^*(0, 0) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (v(x) + v^*(x))dx < 0 \quad (3.7)$$

と同値となる。この条件下において、一定の背景に加えられた小さな摂動は常に一組の暗いソリトンが発生する。これらのソリトンの振幅、及び速さは各々

$$\kappa \sim \epsilon \kappa_1 \quad V = \mu(i\kappa) \sim \mu_0 + \mu_1(\epsilon \kappa_1)^2 = -\rho^2 \pm \sqrt{\rho^4 + \frac{2\rho^2}{\delta}} \mp \frac{2(1 + \frac{2}{3}\rho^2\delta)}{\sqrt{\rho^4 + (2\rho^2/\delta)}}(\epsilon \kappa_1)^2 \quad (3.8)$$

によって与えられる。ただし、上式中の $\pm$ の符号は複号同順とする。

(3.3)、および (3.5) より

$$A_0(0) = -\frac{1}{\rho}(1 - \lambda_0)B_0(0) \quad (3.9)$$

が得られ、これを (3.2) へ代入すると

$$A_0(k) = -\frac{1}{z} \left[\rho K^*(0, k) + \rho \frac{1 - \lambda_0 e^{-k\delta}}{1 - \lambda_0} K(k, 0) \right] A_0(0) \quad (3.10a)$$

$$B_0(k) = -\frac{1}{z} \left[\rho K(k, 0) - \frac{1}{2\rho}(1 - \lambda_0)(k + \mu_0)K^*(0, k) \right] B_0(0). \quad (3.10b)$$

(3.3)、(3.5)、および (3.10) より固有値 $\kappa \sim \epsilon \kappa_1$ に対応する固有関数として

$$\phi(x) = -\frac{A_0(0)}{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho K^*(0, k) + \rho \frac{1 - \lambda_0 e^{-k\delta}}{1 - \lambda_0} K(k, 0)}{D(k, \kappa)} e^{ikx/2} dk + O(\epsilon) \quad (3.11a)$$

$$\begin{aligned} \psi^\pm(x) = & -\frac{B_0(0)}{z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho K(k, 0) - \frac{1}{2\rho}(1 - \lambda_0)(k + \mu_0)K^*(0, k)}{D(k, \kappa)} e^{-k\delta/2} e^{ik(x \mp i\delta)/2} dk \\ & + O(\epsilon). \end{aligned} \quad (3.11b)$$

が得られる。図 1 に摂動により発生した一組の暗いソリトンのプロファイルを、方程式 (1.1) の 2-ソリトン解で近似したものを示す。ソリトンの各パラメータの値は $\rho = \delta = 1$ 、 $\epsilon = 0.2$ 、 $k_1 = \kappa_+ = 0.2$ 、 $k_2 = \kappa_- = 0.746$ 、 $v_1 = V_+ = 0.655$ 、 $v_2 = V_- = -1.66$ 、 $x_{10} = x_{20} = 0$ 。

以上の摂動解析はさらに高次まで組織的に実行できる。また、 $\delta \rightarrow 0$ 、および $\delta \rightarrow \infty$ の両極限における固有値の振る舞いも詳しく調べられている [3]。

ここで行った解析はより一般の初期条件にも拡張できる。特に興味があるのは非対称な初期条件下でのソリトンの発生問題である。具体例としては、 $u(x, 0) \rightarrow \rho e^{-i\phi} (x \rightarrow -\infty)$ 、 $u(x, 0) \rightarrow \rho (x \rightarrow \infty)$ が考えられる。ここで ϕ は位相を表すパラメータである。ソリトン解に小さな摂動を加えた初期条件はこれに相当する。しかしこの場合、固有値方程式 (2.1) は変数係数となり、フーリエ変換による扱いは困難となる。代わりに Jost 関数による固有関数展開を用いるのがひとつのアイデアであるが、これは今後の課題である。

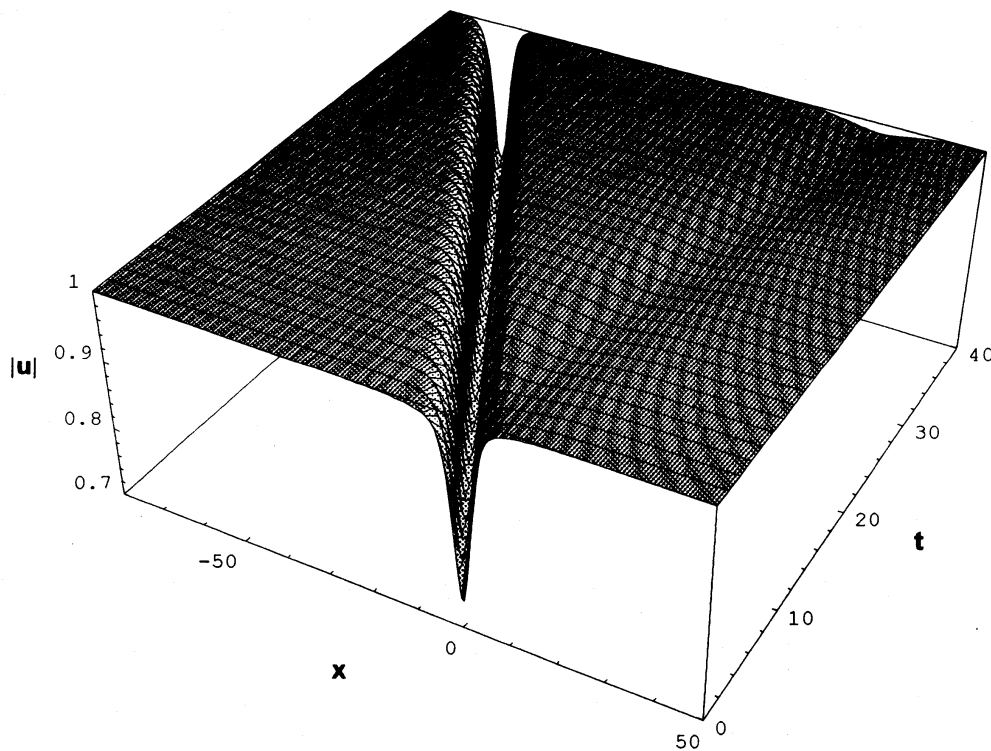


図 1: 摂動によって発生した一組の暗いソリトン

V. 参考文献

- [1] D. Pelinovsky, Phys. Lett. **A197**, 401 (1995).
- [2] D.E. Pelinovsky and R.H.J. Grimshaw, J. Math. Phys. **36**, 4203 (1995).
- [3] Y. Matsuno, J. Math. Phys. **43**, 984 (2002).