

Spitzer の方程式とその random modification.

京大 理 志 質 徳 造

無限粒子系の運動は、最近、Harris, Spitzer 等により定式化されつつある。それは Markov 過程論自体の問題として興味あるばかりではなく、平衡の統計力学、特に Gibbs ensemble とを密接に関連づけることができる。このことは Dobrushin や Spitzer の最近の仕事とみれば、この観点から問題を解めつつあることがわかる。

この報告では、特に、方程式によって構成される無限粒子系の運動について考察する。

§1. Spitzer の方程式

次の型の無限次元連立方程式を Spitzer の方程式という。

(Springer の Lecture note, "Probability & Information theory" の Spitzer の報告参照)

$$(1.1) \begin{cases} \frac{dx_k}{dt} = a(x_{k+1}(t) - x_k(t)) - a(x_k(t) - x_{k-1}(t)) \\ x_k(0) = x_k, & k \in \mathbb{Z}^1 \\ \dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \dots < x_n < \dots \end{cases}$$

そこで, $a(x)$: defined on R_+^1 を次のように仮定する。

(1.2) $a(x) \geq 0$, strictly increasing.

(1.3) $\exists m > 0, \exists M > 0, m|x-y| < |a(x)-a(y)| < M|x-y|$

(1.1) は解があれば order preserving である。

i.e. $\dots < x_{-1}(t) < x_0(t) < x_1(t) < \dots < x_n(t) < \dots \quad \forall t \geq 0.$

Probability space $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の stationary point process in R^1 を次のように定義する。

(i) $\alpha : (\Omega, \mathcal{B}, P) \longrightarrow \{R_+^1 \text{ の可算集合の集まり} \}$

$\# \{ \alpha(\omega) \cap [-n, n] \} < +\infty \quad \forall n \quad \text{a.s. } (P)$

(ii) $\alpha(\omega) = \{ x_n(\omega) \} \quad \dots < x_{-1}(\omega) < x_0(\omega) < x_1(\omega) < \dots < x_n(\omega)$

となるよう番号はけた時, $\xi_n(\omega) \equiv x_{n+1}(\omega) - x_n(\omega)$

とおけば, $\{ \xi_n(\omega) \}$ は positive stationary sequence である

一般論で (ii) によって関係づけられる $\{ \alpha \}$, $\{ x_n \}$, $\{ \xi_n \}$ は互いに 1:1 に対応している。

Proposition 1.

方程式 (1.1) に対し, 初期値を $E \xi_0^2 < +\infty$ とみたす

stationary point process にとれば, 解は Probability 1.

で unique に定まる。

pf

$$x_k^{(0)}(t) = x_k$$

$$x_k^{(n)}(t) = x_k + \int_0^t (a(x_{k+1}^{(n-1)} - x_k^{(n-1)}) - a(x_k^{(n-1)} - x_{k-1}^{(n-1)})) ds$$

とおけば, a の Lipschitz 条件から

$$|x_k^{(n+1)}(t) - x_k^{(n)}(t)| \leq M^n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} |a(x_{k+n+1-i} - x_{k+n-i}) - a(x_{k+n-i} - x_{k-i})|$$

が成立する。従って $\{x_k\}$ の stationarity と moment の収束より

$$\mathbb{E} \sum_n \sup_{0 \leq t \leq T} |x_k^{(n+1)}(t) - x_k^{(n)}(t)| < +\infty.$$

ゆえに, $x_k^{(n)}(t) \xrightarrow{\mathbb{P}} x_k(t)$.

この $\{x_k(t)\}$ が unique solution になる。

$\forall t \geq 0$ に対して (1.1) の解 $\{x_k(t)\}$ は stationary point process になっている。

従って, $\tilde{x}_k(t) = x_{k+1}(t) - x_k(t)$ とおけば, (1.1) は次の方程式と同等である。

$$(1.4) \begin{cases} \frac{d\tilde{x}_k}{dt} = a(\tilde{x}_{k+1}) + a(\tilde{x}_{k-1}) - 2a(\tilde{x}_k) \\ \tilde{x}_k(0) = \tilde{x}_k > 0 \end{cases}$$

すなわち $\{\tilde{x}_k\}$ は stationary sequence.

Prop. 1. により (1.4) は unique solution である。

$$(1.5) \quad \mathbb{E} \tilde{x}_k^2(t) < +\infty \quad \text{が明らかな。}$$

$\{\xi_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ の ergodic limit ξ^* とする。

$$\text{i.e. } \xi^*(\omega) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{i=-n}^n \xi_i$$

この収束は $L^2(\Omega)$ 上で P -a.s. 成立する。

Proposition 2.

(1.4) の解 $\{\xi_k(t)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ に対し

$$\xi_k(t) \longrightarrow \xi^* \quad \text{in } L^2(\Omega \otimes P) \quad \text{as } t \rightarrow \infty$$

特に 初期値 $\{\xi_k\}$ が ergodic ならば $\xi^* = E \xi_0$ (const.) になる。

pf

Step. 1° $X_k(t) = \frac{1}{2k+1} \sum_{i=-k}^k \xi_i(t)$ とおくと

$E(X_k(t) - \xi^*)^2$ は $t \rightarrow \infty$ で単調減少函数。

①

$$\frac{d}{dt} E[(X_k(t) - \xi^*)^2] = 2E[X_k(t) \frac{dX_k}{dt}] - 2E[\xi^* \frac{dX_k}{dt}]$$

$$\Rightarrow 2 \text{ 項}; -\frac{2}{2k+1} E\left[\xi^* \sum_{i=-k}^k [a(\xi_{i+1}(t)) + a(\xi_{i-1}(t)) - 2a(\xi_i(t))]\right]$$

初期値 $\xi = (\xi_k)$ に対する解 $\xi(t) = (\xi_k(t))$ を $T_t \xi$ と書き

$\xi = (\xi_k)$ に対する shift operator を S と表わすと

$$T_t S = S T_t, \quad \text{そこで } \xi^* = S \xi^* \text{ 従って定常性}$$

$$\text{より } E[\xi^* a(\xi_{i+1}(t))] = E[\xi^* a(\xi_i(t))] \quad \text{ゆえに 2 項} = 0$$

が 1 項 < 0 を示そう。

$$E\left[\sum_{i=-k}^k \xi_i(t) \sum_{j=-k}^k (a(\xi_{j+1}(t)) + a(\xi_{j-1}(t)) - 2a(\xi_j(t)))\right]$$

$$\begin{aligned}
&= E \left[\sum_{i=-k}^k \xi_i(t) \left(\sum_{j=-k+1}^{k+1} a(\xi_j(t)) + \sum_{j=-k+1}^{k-1} a(\xi_j(t)) - 2 \sum_{j=-k}^k a(\xi_j(t)) \right) \right] \\
&= E \left[\sum_{i=-k}^k \xi_i(t) (a(\xi_{k+1}(t)) - a(\xi_k(t))) - (a(\xi_{-k}(t)) - a(\xi_{-k-1}(t))) \right] \\
&= E \left[\left(\sum_{i=-k}^k \xi_{i-1}(t) - \sum_{i=-k}^k \xi_i(t) \right) a(\xi_k(t)) \right] - E \left[\left(\sum_{i=k}^k (\xi_i(t) - \xi_{i+1}(t)) \right) a(\xi_{-k}(t)) \right] \\
&= E[(\xi_{-k-1}(t) - \xi_k(t)) a(\xi_k(t))] - E[(\xi_{-k}(t) - \xi_{k+1}(t)) a(\xi_{-k}(t))] \\
&= -E[(\xi_k(t) - \xi_{k+1}(t)) (a(\xi_{-k}(t)) - a(\xi_{k+1}(t)))] \\
&< 0 \quad (\because \text{定常性と } a \text{ が単調増加より})
\end{aligned}$$

Step. 2°

$$\forall i, \forall j, i \neq j, \quad E[(\xi_i(t) - \xi_j(t))^2] \longrightarrow 0 \text{ as } t \rightarrow \infty$$

$$\begin{aligned}
\textcircled{\smile} \quad E[(\xi_i(t) - \xi_j(t))^2] &= 4 E[(\xi_i(t) - \xi^*)^2] \\
&\quad - E[(\xi_i(t) + \xi_j(t) - 2\xi^*)^2]
\end{aligned}$$

Step. 1° の証明から、第1項、第2項 は共に単調減少。
従って $\exists \lim_{t \rightarrow \infty} E[(\xi_i(t) - \xi_j(t))^2] \equiv C$

$C = 0$ といえはよい。今 $C > 0$ と仮定する。

Step. 1° の計算から $k=0$ として考えよと。

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} E[(\xi_i(t) - \xi^*)^2] &= -E[(\xi_i(t) - \xi_{j+1}(t)) (a(\xi_i(t)) - a(\xi_{j+1}(t)))] \\
&\leq -m E[(\xi_i(t) - \xi_{j+1}(t))^2] \leq -m C/2 < 0.
\end{aligned}$$

for $\forall t \geq \exists t_0$.

しかし これは $\lim_{t \rightarrow \infty} E[(\xi_i(t) - \xi^*)^2] = \infty$ となり矛盾。

$\therefore C = 0$.

Step. 3°

Step. 2° により $\forall k, \forall \varepsilon, \exists t_0(k, \varepsilon)$

$$E[(\xi_i(t) - \xi^*) - (\xi_j(t) - \xi^*)]^2 < \varepsilon, \text{ for } \forall t > t_0, -k \leq i, j \leq k.$$

$$\therefore E[(\xi_i(t) - \xi^*)^2] - E[(\xi_i(t) - \xi^*)(\xi_j(t) - \xi^*)] < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\begin{aligned} E[(X_k(t) - \xi^*)^2] &= \frac{1}{(2k+1)^2} \sum_{i=-k}^k \sum_{j=-k}^k E[(\xi_i(t) - \xi^*)(\xi_j(t) - \xi^*)] \\ &\geq \frac{1}{(2k+1)^2} \sum_{i=-k}^k \left(E[(\xi_i(t) - \xi^*)^2] - \frac{\varepsilon}{2} \right) \\ &= E[(\xi_0(t) - \xi^*)^2] - \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Step. 1° より、左辺は t について単調減少。

$$E[(\xi_0(t) - \xi^*)^2] \leq E[(X_k(t) - \xi^*)^2] + \frac{\varepsilon}{2} \leq E[(X_k(t_0) - \xi^*)^2] + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$k \rightarrow \infty \text{ とし } \therefore E[(\xi_0(t) - \xi^*)^2] < \frac{\varepsilon}{2} \text{ for } \forall t > t_0.$$

§. 2 Spitzer の方程式の random modification.

方程式 (1.1) は無限粒子系が相隣り合う粒子とのみ interact して、その interaction により互いに衝突することなく、順序を保存する現象をもつ。この意味での random modification は次の形の確率微分方程式と考えられる。

$\{B_t^n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上の可算無限個の独立な Brown 運動とする。

$$(2.1) \begin{cases} dx_t^n = dB_t^n + a(x_t^n - x_t^{n-1}) - a(x_t^{n+1} - x_t^n) dt \\ \dots < x_0^{(-1)} < x_0^0 < x_0^1 < x_0^2 < \dots < x_0^n < \dots \end{cases}$$

この方程式が order preserving であるためには, Brown 運動
に対抗しう子程, drift 係数が作用しなければならない。

そのためには, $a(x)$ は $x=0$ で singular にならねばを得ぬ。

(2.1) を有限粒子系で考えてみよう。

$$(2.2) \quad \begin{cases} dX_t^1 = dB_t^1 - a(X_t^2 - X_t^1) dt \\ dX_t^2 = dB_t^2 + a(X_t^2 - X_t^1) dt - a(X_t^3 - X_t^2) dt \\ \vdots \\ dX_t^{n+1} = dB_t^n + a(X_t^{n+1} - X_t^n) dt \end{cases}$$

まず, $X_t^1 < X_t^2 < \dots < X_t^n < X_t^{n+1} \quad \forall t, \quad P\text{-a.s.}$ が

成り立つためには, $a(x)$ にどの程度の singularity が必要か?

これは, 2個の場合の考察から, ほぼ $a(x) \sim x^{-\alpha} (x \downarrow 0)$ $\alpha \geq 1$ になることがわかる。

簡単のために, $a(x) \equiv C \cdot |x|^{-\alpha} \quad (\alpha > 1)$ と仮定する。

$\tilde{z}_i(t) = X_{i+1}(t) - X_i(t)$ とおいて, (2.2) を変形すると

$$(2.3) \quad \begin{cases} d\tilde{z}_t^1 = d(B_t^2 - B_t^1) + (2a(\tilde{z}_t^1) - a(\tilde{z}_t^2)) dt \\ d\tilde{z}_t^2 = d(B_t^3 - B_t^2) + (2a(\tilde{z}_t^2) - a(\tilde{z}_t^1) - a(\tilde{z}_t^3)) dt \\ \vdots \\ d\tilde{z}_t^n = d(B_t^{n+1} - B_t^n) + (2a(\tilde{z}_t^n) - a(\tilde{z}_t^{n-1})) dt \\ \tilde{z}_0^i > 0, \quad i=1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Proposition 3

確率微分方程式 (2.3) は 初期値 $\{\xi_0^i\}$, $\xi_0^i > 0, i=1, \dots, n$ に對して unique solution をもつ。

Lemma

$$A \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_{i+1}} + \sum_{i=1}^n [2a(x_i) - a(x_{i-1}) - a(x_{i+1})] \frac{\partial}{\partial x_i}$$

に對して 次の条件をみたす函数 f が存在する。 $f \geq 0$.

(i) f は $D \equiv \{(x_1, \dots, x_n) : x_i > 0, \forall i=1, \dots, n\}$ 上の smooth function,

(ii) $f = +\infty$ on $\partial D \equiv \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \geq 0, \forall i=1, \dots, n, x_j = 0, \exists j\}$

(iii) $\exists \{\varepsilon_i\} : \varepsilon_i > 0$.

$$Af(x) \leq 0 \text{ on } G \equiv \bigcup_{i=1}^n \{(x_1, \dots, x_n) \in D, 0 < x_i < \varepsilon_i\}$$

pf of Lemma.

$$f(x) \equiv \sum_{i=1}^n x_i^{-(\alpha-1)}$$

は上の条件をみたす。(計算は少しめんどう。)

Prop. 3 の pf

∂D に達するまでは unique solⁿ が存在するので

D から出た解は ∂D に達しないことを示せば十分。

$$G_m \equiv \{(x_1, \dots, x_n) \in G : \frac{1}{m} < x_i, \forall i=1, \dots, n\}$$

$$\tau = \inf\{t > 0, \xi_t \notin G\} \quad \tau_m = \inf\{t > 0, \xi_t \notin G_m\}$$

$\xi_0 \in G$ とする。 A は (2.3) の generator T から

Lemma の f に對して

$$E[f(\xi_{t \wedge \tau_m})] \leq f(\xi_0) < +\infty$$

$$m \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty \text{ とすれば } P[\xi_\tau \in \partial D; \tau < +\infty] = 0$$

このことは、 G から出発した solution は決して ∂D に到達しないことを意味する。

問題 : 方程式 (2.1) がどのような初期値の class で order-preserving solution を持つか?

次にもう 1 つの無限次元確率微分方程式を考えよう。

$$(2.4) \quad \begin{cases} dx_t^n = dB_t^n + \sum_{j:j \neq n} F(x_s^j - x_s^n) ds \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

ここで F は compact supported かつ Lipschitz 連続とする。

この方程式の意味をもたせるためには、 R^1 の局所有限な可算集合のそのような sub-class をえらび、ことにより、 $\sum_{j:j \neq n}$ は実際は有限和の和となるように設定する必要がある。

問題 : 方程式 (2.4) が unique solution をもつために R^1 上の configuration の空間を定めよ。

この方程式は Gibbs ensemble との関係に非常に重要な意味をもつ。今 (2.4) を有限系の場合に考えよう。

$$(2.5) \quad \begin{cases} dx_t^{i'} = dB_t^{i'} + \sum_{j=1}^n \sum_{j \neq i'} F(x_t^j - x_t^{i'}) dt \\ i' = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

(2.5) は unique solution である。diffusion process に対して
 であることは明らかである。

U は binary potential function, i.e. $U(x)$ は even fun
 である。

Proposition. 4

$F \equiv U'$ の C^1 -class である。このとき (2.5) に対応する
 diffusion は U の 3 次元 Gibbs ensemble である。すなわち
 $Q(x_1, \dots, x_n) = \exp[-\sum_{i,j=1}^n U(x_i - x_j)]$ である。
 $Q(x)dx$ は diffusion の invariant measure である。

pf

(2.5) の generator $A = \frac{1}{2} \Delta + \sum_{i=1}^n \sum_{j \neq i} F(x_j - x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$ は
 に対して $A^*Q \equiv 0$ であることを示す。

$$\begin{aligned} A^*Q &= \frac{\Delta}{2} Q - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j:j \neq i} F(x_j - x_i) Q \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\left(- \sum_{j:j \neq i} U'(x_i - x_j) + \sum_{j:j \neq i} U'(x_j - x_i) \right) Q(x) \right] \\ &\quad - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\sum_{j:j \neq i} F(x_j - x_i) Q(x) \right] \\ &\quad - U'(x_i - x_j) = U'(x_j - x_i) = F(x_j - x_i) \quad \text{である} \\ A^*Q(x) &\equiv 0 \end{aligned}$$

(注) 方程式 (2.5) に対応する diffusion process は time -
 reversible である。