

偏心二円筒間の非定常流れにおける ラグランジアンカオス

九大総理工 跡部 隆 (ATOBE Takashi)

九大応力研 船越 満明 (FUNAKOSHI Mitsuaki)

1 はじめに

Aref¹⁾ は流れがたとえ層流状態でその流れ場が単純な時間, 空間依存性を持っていても, その流れ場での流体粒子の運動はカオス的になり得ることを指摘した. このカオス的挙動はラグランジアンカオス, あるいはラグランジ乱流と呼ばれる.

偏心した二円筒のゆっくりとした交互で周期的な回転運動によって引き起こされる, 二円筒間の流体粒子の示す運動も, カオス的になり得ることが知られている²⁾⁻⁹⁾. 図1は, あるパラメータのときの二円筒間の流体の運動の様子を数値計算によって調べたものである. これはポアンカレ断面と呼ばれるもので, 初期点を適当に選ばれた幾つかの流体粒子の周期毎の位置をある平面にプロットしたものである. これをみると二円筒間の領域が, 流体粒子が規則的に振る舞う部分 (幾つかの閉曲線で表わされる部分) と, カオス的に振る舞う部分 (多くの点が散らばっている部分) とにわけられることがわかる. 一般に前者は規則領域, 後者はカオス領域と呼ばれている.

本研究は '戻り実験' をとおして, これらの領域内の流体粒子の運動の軌道不安定性を調べるものである. ここでいう戻り実験とは, 二円筒の交互の周期的な回転を N 周期おこない, さらにこの動作の時間反転に相当する回転を N 周期だけおこなう実験を指す.

流れが二次元的でストークス近似が成り立つならば, 流体粒子の運動の支配方程式は可逆であり, 二円筒の回転の操作を逆にすれば速度場全体が逆になる. したがって戻り実験をおこなえば理論的には色素は初期位置へ戻るはずである. しかし実際の実験には何らかの誤差が含まれるため, 戻り実験の初期状態と最終状態の間に多少のずれが生ずる. しかもカオス的運動では粒子の軌道が初期値に敏感に依存するから, カオス領域から出発した色素と規則領域から出発した色素では初期状態と最終状態の間には大きなずれが生ずると予想される. 本研究の目的は, 流体粒子の運動の軌道不安定性を色素を用いた可視化によって明瞭に示そうというものである.

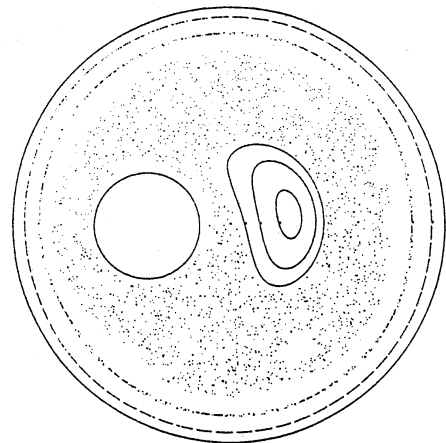


図1 ポアンカレ断面.

2 実験装置および実験方法

2.1 実験装置

実験装置の概要を図2に示す。外円筒は内径 20.62cm, 高さ 20cm のアクリル樹脂の透明容器である。内円筒は直径 5.00cm, 長さ 30cm のステンレス製の円柱で、外円筒の上部にある腕の先に据え付けられている。これら二つの円筒はそれぞれ独立に回転できるようになっており、その回転はパーソナルコンピュータによって制御される。

実験では 100% のグリセリンを流体として用いた。このグリセリンを二円筒間に 10cm の深さまで満たす。二円筒の回転にともなう流体の運動の様子は、自由表面から 5cm の深さに線状、あるいはスポット状に注入された色素（グリセリンにフルオレセインを溶かしたもの）によって可視化される。また実験に先立ち、この色素の流体中への拡散が、今回要する実験時間の間ではほとんどみられなかったことを確認した。

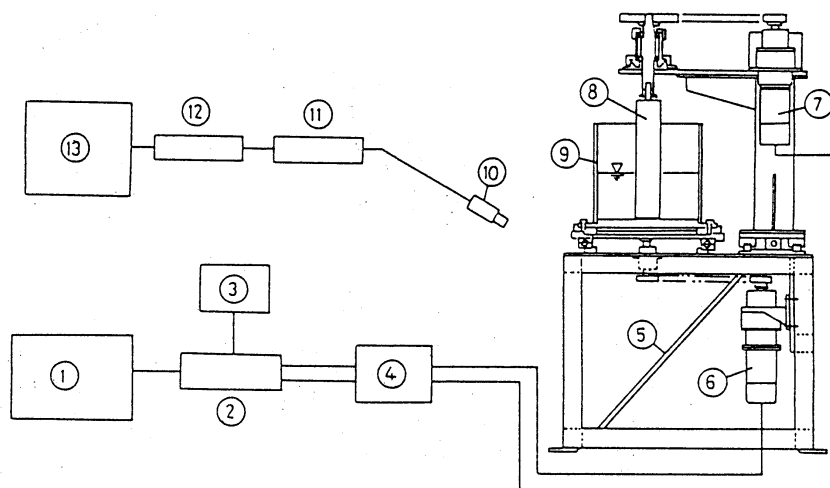


図2 実験装置の概要

- | | |
|----------------------|-----------------|
| ① パーソナルコンピュータ. | ⑨ 外円筒. |
| ② ファンクション・ジェネレータ. | ⑩ C C D ビデオカメラ. |
| ③ F F T アナライザー. | ⑪ ビデオタイマー. |
| ④ A C サーボモーター用ドライバー. | ⑫ V T R. |
| ⑤ 鏡. | ⑬ カラーテレビ. |
| ⑥ 100W A C サーボモーター. | |
| ⑦ 200W A C サーボモーター. | |
| ⑧ 内円筒. | |

2.2 実験方法

二円筒の回転は交互にゆっくりと周期的におこなった。このときの外円筒、内円筒の基本的な動作は、反時計回りを正にとったときのそれぞれの回転角速度 $\Omega_1(t)$, $\Omega_2(t)$ が時間 t の関数として図3に示されるようなものである。回転角速度の急激な時間変化を避けるため、加速、減速時間 t_s をとり、それ以外の時間は一定値 $\bar{\Omega}_1$, $\bar{\Omega}_2$ をとっている。この定速回転の時間をそれぞれ t_1 , t_2 とすると、外円筒、内円筒の一周期あたりの回転量 T_1 , T_2 は、

$$T_1 = \frac{\bar{\Omega}_1(t_1 + t_s)}{2\pi}, \quad T_2 = \frac{\bar{\Omega}_2(t_2 + t_s)}{2\pi}, \quad (2.1)$$

となり、その大きさが1のとき円筒が1回転することを表している。

本研究においては、半径比 $\alpha \equiv R_2/R_1 = 0.24$ 、偏心率 $\epsilon \equiv d/(R_1 - R_2) = 0.5$ のときの、 $T_1 = T_2 = 0.5$ の同方向回転の場合について戻り実験をおこなった。ここで R_1 , R_2 はそれぞれ外円筒、内円筒の半径、 d は軸間距離である。図1に示した数値計算の結果は、これらのパラメータに合せて計算したものである。またこの実験は非常にゆっくりとした流れを対象とするため、 $\bar{\Omega}_1 = 0.0504$ ラジアン毎秒（約2分間で1回転）、 $\bar{\Omega}_2 = 0.223$ ラジアン毎秒（約30秒間で1回転）、 $t_s = 10$ 秒とした。レイノルズ数 Re を次のように定義すると、このときのレイノルズ数は0.45である。

$$Re \equiv \frac{\max(R_1^2|\Omega_1(t)|, R_2^2|\Omega_2(t)|)}{\nu}. \quad (2.2)$$

なお今回の実験において、各円筒の1周期あたりの実際の回転量を測定したが、これには標準偏差で約0.17%の変動があった。

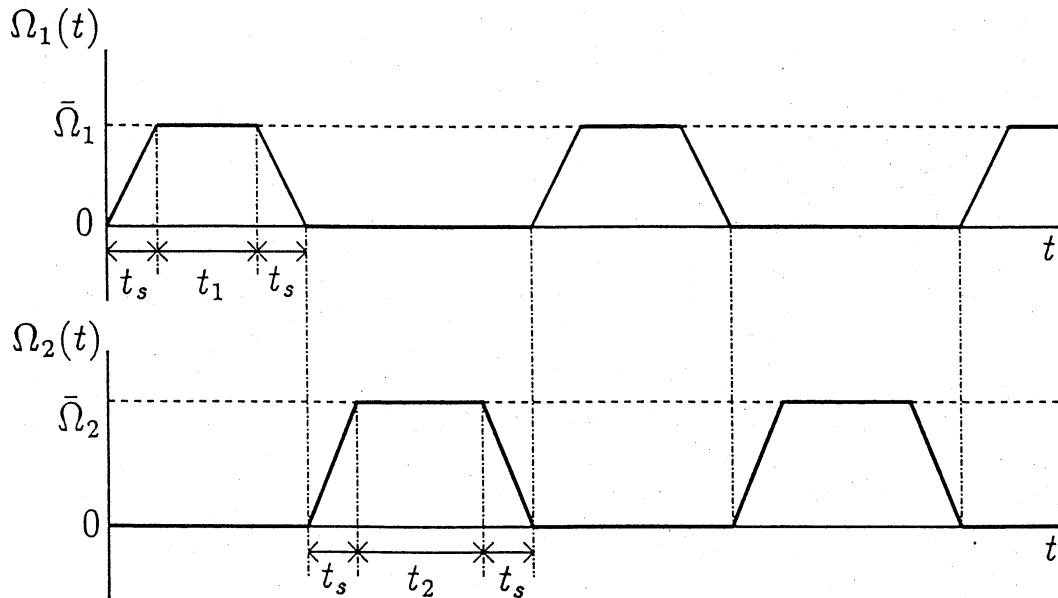


図3 外円筒の回転角速度 $\Omega_1(t)$, 内円筒の回転角速度 $\Omega_2(t)$ 。

3 実験結果および考察

3.1 戻り実験の結果

戻り実験の一連の結果を図4, 5に示す. それぞれ (a) が初期状態, それ以降 (b) $N = 1$, (c) $N = 2$, (d) $N = 3$, (e) $N = 5$, (f) $N = 20$ のときの結果である. これらの図をみると (b) の場合は色素がほぼ初期位置へ戻っているのに対し, それ以外の場合は初期位置によく戻る部分とそうでない部分とははっきりわかれている. 図1と比較するとそれらの部分はそれぞれ規則領域とカオス領域に対応していることがわかる. またカオス領域内の色素の初期位置への戻り方は N の増加とともに急激に悪くなっている. 特に (f) においては色素がカオス領域全体に広がっていて, その初期状態と最終状態とは全く様子が違っている.

図6は色素を閉曲線状に注入した場合の $N = 3$ のときの結果で, (a), (c) が初期状態, (b), (d) が最終状態である. ここで (a) は図1における島状の規則領域内に注入したもので, (a) と (b) を比べてもその差がほとんどみられない. 一方, (c), (d) を見比べると, 最終状態はわずか3周期の戻り実験でもかなり複雑な構造になっており, 初期の形を全く保っていない.

次に色素をスポット状に注入した $N = 3$ の場合の結果が図7である. (a) が初期状態, (b) が最終状態であり, 3点のうち左の2点が規則領域内, 右の1点がカオス領域内に注入されたものである. この図でも色素の戻り方は規則領域でよく, カオス領域で悪くなっている. そして特に注意すべき点は, カオス領域内の色素が初期位置へ戻らないことばかりでなく, それが線状に引き伸ばされていることである. このことは初期における微小なずれが, 軌道不安定性によって時間とともに急激に拡大するというカオスの特徴を顕著に表しているものと考えられる.

このようにカオス領域における流体粒子の運動は, 実際の実験に含まれる理想状態からのずれによってわずか数周期の間に本来の軌道から大きくはずれていくことがわかる.

3.2 数値計算による再現

これまでの戻り実験の結果は, 実験装置の誤差や, 温度などの外的条件のゆらぎに起因するものと考えられる. 事実, 二円筒の一周期あたりの回転量の誤差は 0.17% であり, わずかではあるが理想状態からのずれが存在している. そこでこの回転量のゆらぎを用いて戻り実験に対応する数値計算をおこなった. 数値計算は, Ballal と Rivlin¹⁰⁾ によってすでに求められている解析解を用いておこなわれた.

図8がその結果で, この図は戻り実験の結果の図4, 5に対応している. その対応関係は, この図の (a)-(c) が図4 (b)-(d), (d)-(f) が図5 (b)-(d) となっている. この数値計算で用いた二円筒の回転量のゆらぎは, それぞれ対応する実験において測った実際の値を使っている. 数値計算の結果は実験での結果と比較すると, 色素の初期位置からのずれが明らかに小さくなっている. しかし N の増加とともにずれの振幅が大きくなる点や, ずれが発生する場所は実験結果とよく合っている.

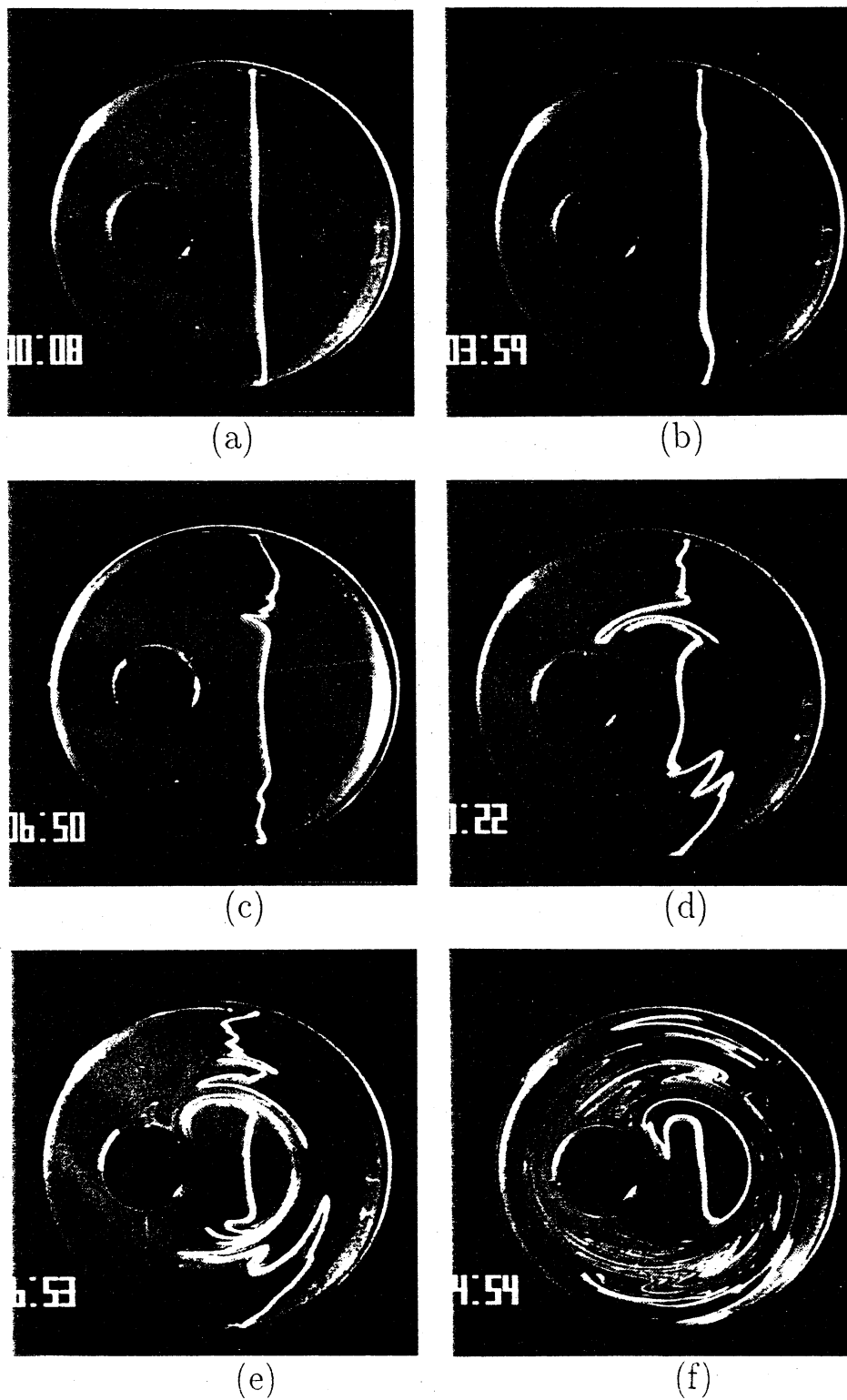


図4 戻り実験における色素の様子. $\alpha = 0.24, \epsilon = 0.5, T_1 = T_2 = 0.5$.

(a) 初期状態, (b) $N = 1$, (c) 2, (d) 3, (e) 5, (f) 20.

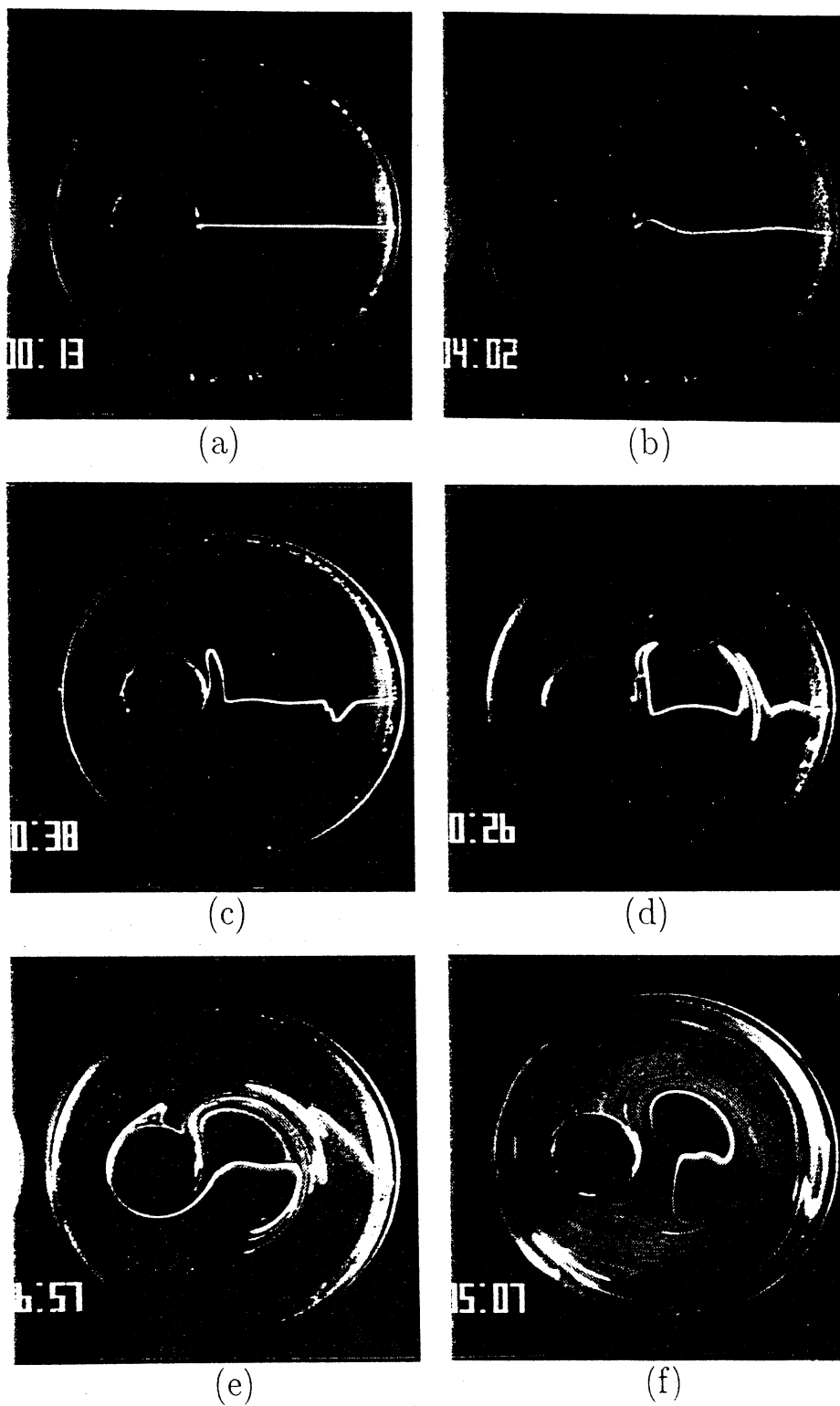


図5 戻り実験における色素の様子. $\alpha = 0.24, \epsilon = 0.5, T_1 = T_2 = 0.5$.
 (a) 初期状態, (b) $N = 1$, (c) 2, (d) 3, (e) 5, (f) 20.

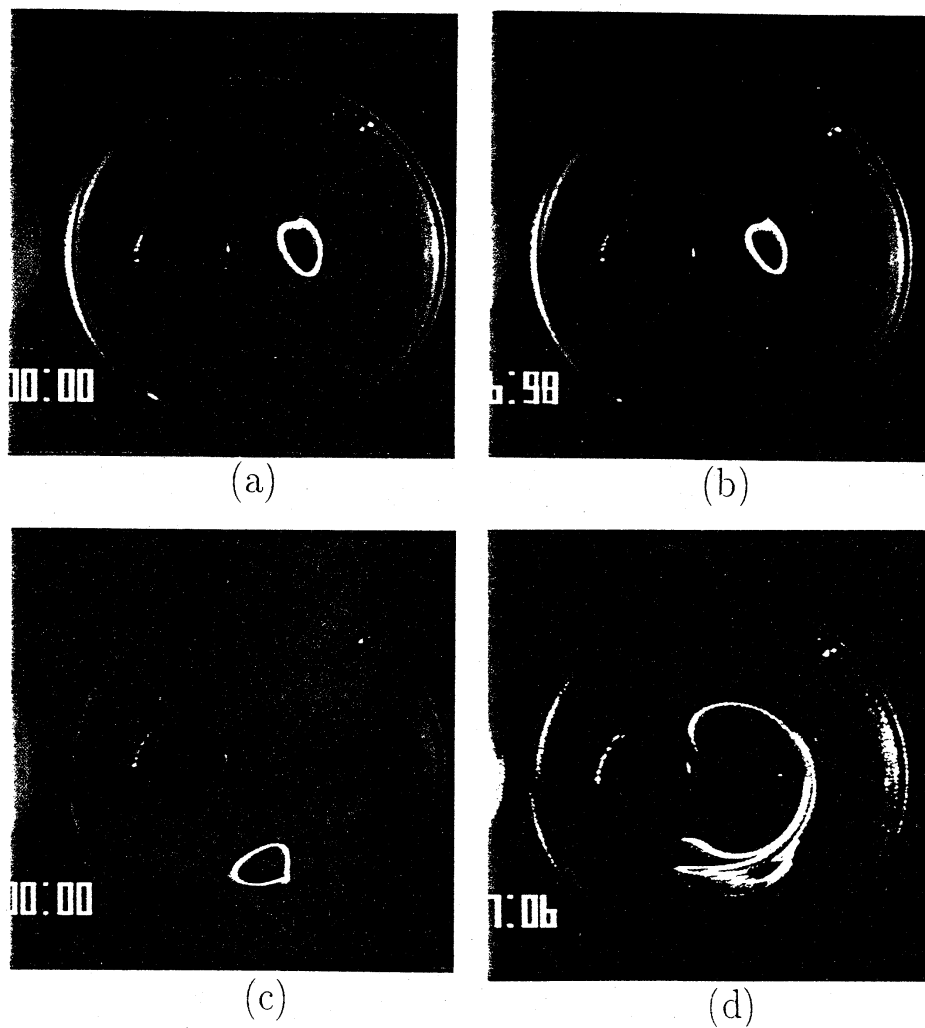


図6 $N = 3$ の戻り実験における色素の様子. (a),(c) 初期状態, (b),(d) 最終状態. (a),(b) は色素を島状領域内に注入した場合. (c),(d) はカオス領域内に注入した場合.

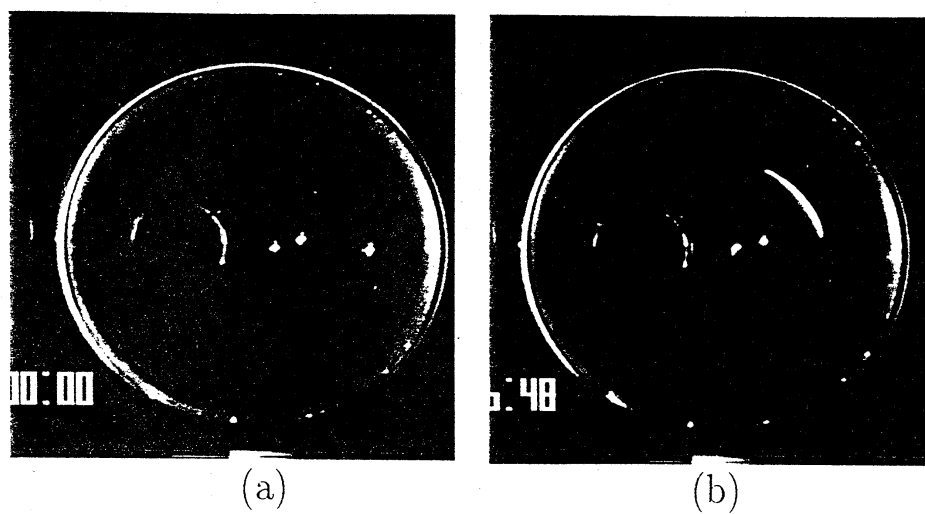


図7 $N = 3$ の戻り実験における色素の様子. (a) 初期状態, (b) 最終状態. 左の二つは規則領域（島状領域）内に、また右はカオス領域内に注入したスポット状の色素.

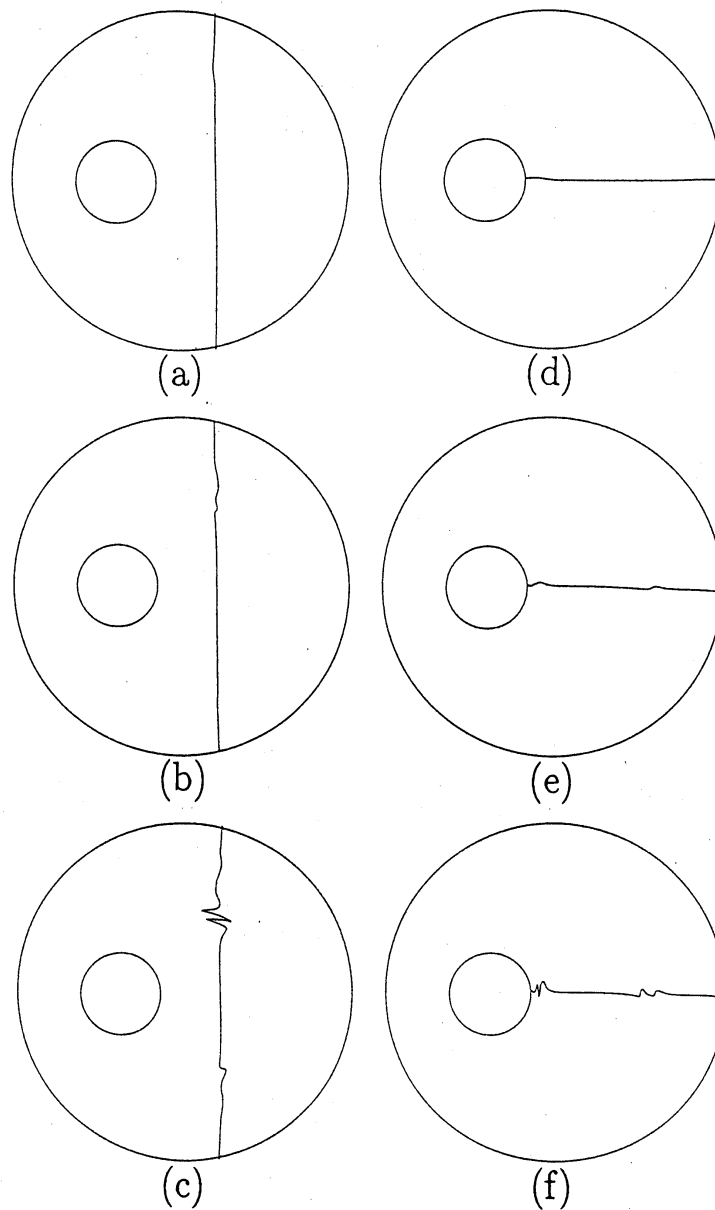


図 8 直線状に並べられた 1000 点の初期点に対する戻り実験の数値計算による再現. (a)–(c) はそれぞれ 図 4 (b)–(d) に対応. (d)–(f) はそれぞれ 図 5 (b)–(d) に対応. わずかに変動する回転量は, それぞれ対応する実験での実際の値を用いた.

このように円筒の回転量のゆらぎだけを考慮した数値計算は実験結果と定性的には合うが定量的には合わない。したがって戻り実験における色素の初期位置からのずれは、回転量のゆらぎだけではなく、慣性や三次元性などの様々な実験条件の誤差からの影響によって生じているものと考えられる。そしてそのずれの大きさは、規則領域内では実験条件の誤差そのものの程度におさまるが、カオス領域では流体粒子の運動の軌道不安定性を反映して、そのずれが指数関数的に増大するものと考えられる。

そこで次章では、流体粒子の運動の軌道不安定性とラグランジアンカオスとの関係を調べるため、局所リアプノフ指数を定義して数値計算をおこない、これまで得られた結果と比較する。

4 軌道不安定性

4.1 局所リアプノフ指数

戻り実験における色素の初期位置からのずれは、流体粒子の運動の軌道不安定性と密接に関係していると考えられるが、この軌道不安定性の大きさを測るにはリアプノフ指数が有用である。しかし本研究のように数周期の時間発展しか考えないような場合は、通常のリアプノフ指数ではその定義の形から言ってもあまり正確な評価はできない。そこで本研究では次に示すような局所リアプノフ指数 λ_N を定義して戻り実験との対応を考える。

$$\lambda_N \equiv \max_{\theta, \hat{\theta}} \frac{1}{2Nt_p} \sum_{n=1}^N \left(\ln \frac{d_{n,\theta}^+}{d_0} + \ln \frac{d_{n,\hat{\theta}}^-}{d_0} \right). \quad (4.1)$$

ここで t_p は一周期の時間であり、 $d_{n,\theta}^+$ は戻り実験の前半部において、初期に着目する軌道から θ 方向に d_0 だけずらされた隣接軌道の n 周期後のずれの大きさを示す。また $d_{n,\hat{\theta}}^-$ は後半部においてその初期点（折り返し点）を、着目した軌道の折り返し点から $\hat{\theta}$ 方向に d_0 だけずらした隣接軌道の n 周期後のずれの大きさである。ここで前半、後半部それぞれの隣接軌道の出発点は、周期毎に着目した軌道からのずれベクトルの方向を保存したまま、大きさは d_0 になるように移される。この有限の時間発展における軌道間距離の成長率は一般に初期（折り返し点）においてずらした方向 θ ($\hat{\theta}$) に依存する。そこでこの λ_N は初期（折り返し点）において多くの θ ($\hat{\theta}$) の値について計算した軌道の中からもっともずれの大きかった軌道を選んで決める。また λ_N は十分大きな N に対しては一般のリアプノフ指数 λ の値に近付いていくべきものである。

本研究では、 d_0 として $10^{-4}R_1$ をとり、前半後半それぞれ 100 本の隣接軌道群（すなわち着目した軌道を中心とした半径 d_0 の円周上に、中心角 $2\pi/100$ で等間隔に並べられた初期点あるいは折り返し点を通る軌道群）を計算した。なお $10^{-7}R_1 \leq d_0$

$\leq 10^{-3}R_1$ の範囲のいくつかの d_0 に対しても λ_N を計算したが、結果にはほとんど変化がなかった。

4.2 計算結果

このように定義された λ_N の $N = 1, \dots, 5$ 及び $N = 100$ に対する値を示したのが図 9 である。これらの図は図中の水平線上に等間隔に並べられた 1000 点の初期点から出発した軌道に対する λ_N の値をプロットしたものである。これをみると、まず $N=1$ 、すなわち図 9 (a) において λ_N の値が内円筒付近でかなり大きくなっていることがわかる。これは外円筒の回転による流体の速度勾配が外円筒付近で小さいのに対し、内円筒の回転による速度勾配が内円筒付近で大きいことが原因であると考えられる。また図 9 (b)–(e) の $N = 2, \dots, 5$ に対する結果と図 1 のポアンカレ断面とを見比べると、 N の増加にともなって λ_N の値とカオス領域との対応がはっきりしてくることがわかる。この傾向は図 9 (f) の $N=100$ の場合にかかなり明確に現われ、ここではポアンカレ断面でのカオス（規則）領域と λ_N の大きな（小さな）部分がほぼ一致している。この結果は大きな N に対する局所リアプノフ指数の値 λ_N が最大リアプノフ指数 λ に漸近するという予想とも一致する。

これらの結果と図 5 (a)–(f) の実験における結果とを比較してみると、 λ_N の大きな部分と色素の初期位置からのずれの大きい部分とは定性的に合っていることがわかる。図 9 (a)–(e) からわかるように、内円筒付近のカオス領域における λ_N のピークは島状領域の右側の部分より大きく、またこの二つの部分のピークの差が N の増加とともに減少している。これらの結果は図 5 (b)–(e) に示された実験結果と矛盾しない。しかし図 9 における λ_N のピークの場所は、図 9 の対応する実験において色素のずれが局所的に大きくなっている部分と一致しない。この原因として、実際の実験が常になんらかの擾乱から影響を受けているのに対しては、 λ_N の計算では摂動としてのずれが前半の初期と後半の折り返し点でしか考慮されておらず、またその大きさもかなり小さいと仮定していることが考えられる。

次に図 9 における λ_N のピークの位置がどのようにして決まるのかを調べるために、初期に水平線状に並べられた流体粒子の N 周期後（周期 N の戻り実験での折り返し時）の位置を調べた。いくつかの N に対する初期と、 N 周期後の粒子の位置をプロットしたものが図 10 であり、それぞれ水平の直線と、曲線で表されている。図中の破線は外円筒のみの回転によって生ずる流れのセパトリックスを示している。またこの図における $\bullet$, $\circ$, $\square$ の印の対は、 N 周期後に上部のよどみ点近傍のセパトリックス上にあった流体粒子の初期位置と N 周期後の位置を示している（図 10 (d) では近接した三つの点を一つの $\circ$ で示している）。よどみ点近傍のこれらの点の近くでは、セパトリックスを挟んだ二つの流体粒子が次の外円筒の回転によって、よどみ点の方に移動しながらセパトリックスを挟んでそれぞれ反対の方向に流されることが予想される。したがって $N-1$ 周期後にこのよどみ点近傍のセパトリックス上にきた粒子に対しては、次の周期の回転によってその λ_N の値が増大することが期待される。図 9 (b)–(e) における $\bullet$, $\circ$, $\square$ の印は、図 10 (a)–(d) の水平線上の印の位置に置かれている。図 9 をみると、これらの印が

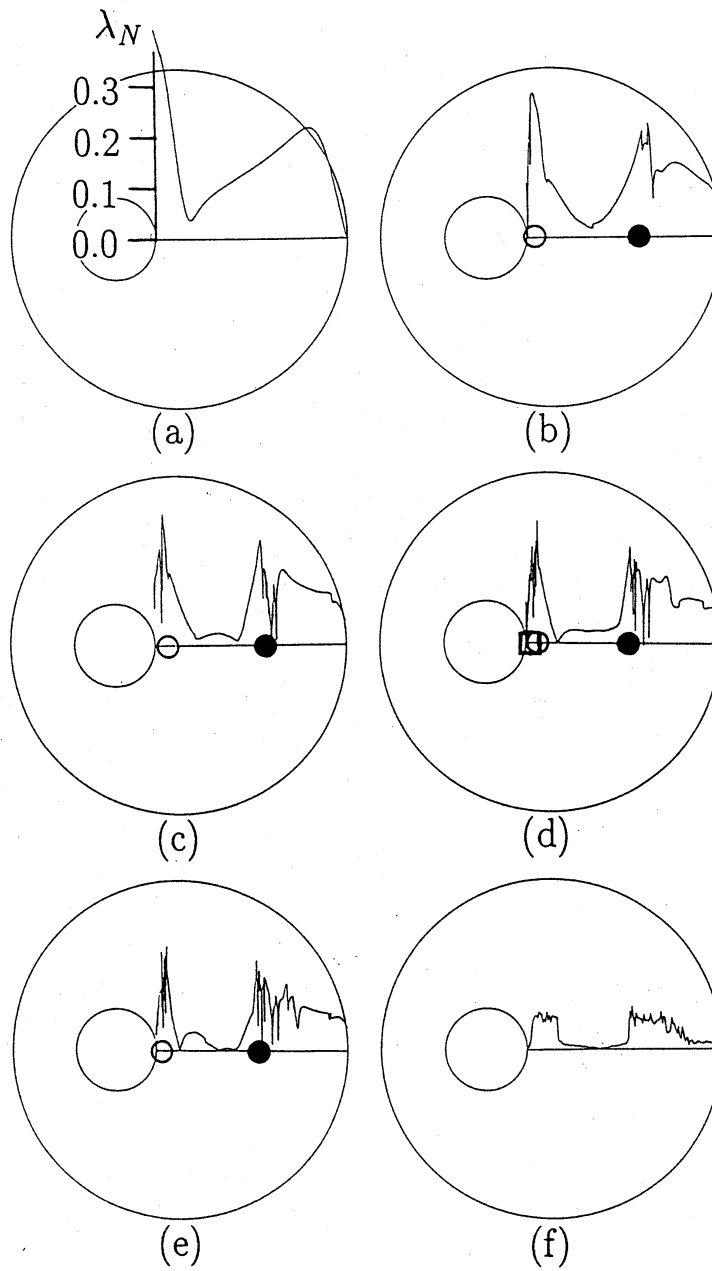


図9 水平線状に並べられた1000個((f)のみ150個)の初期点の局所リアプノフ指数 λ_N の値. $\alpha = 0.24, \epsilon = 0.50, T_1 = T_2 = 0.5$. (a) $N = 1$, (b) 2, (c) 3, (d) 4, (e) 5, (f) 100. (b)–(e)の中の印●, ○, □はそれぞれ図10中(a)–(d)の印に対応している.

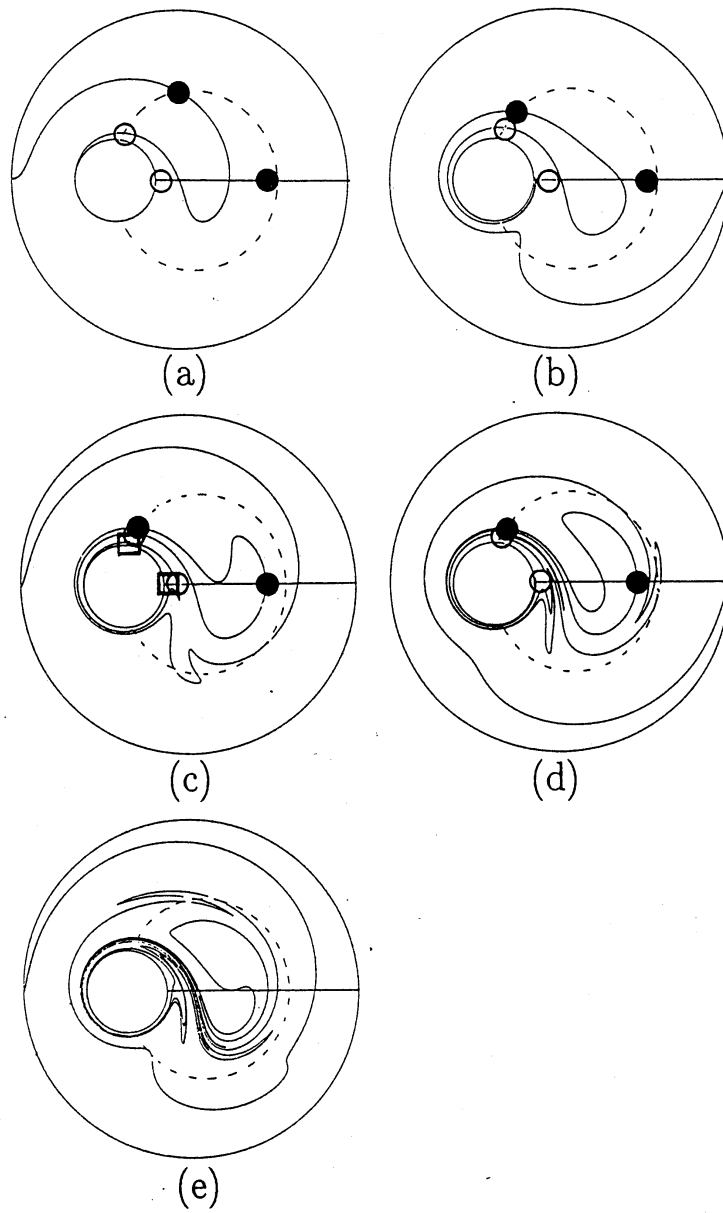


図 10 水平線状に並べられた 10000 個の初期点の N 周期後（戻り実験の折り返し時に相当）の様子. $\alpha = 0.24, \epsilon = 0.50, T_1 = T_2 = 0.5$. (a) $N = 1$, (b) 2, (c) 3, (d) 4, (e) 5. 破線は外円筒の単独回転による流線のセパトリクスを表わす. 対になった $\bullet$, $\circ$, $\square$ の印はそれぞれ流体粒子の初期位置と N 周期後の位置を示している.

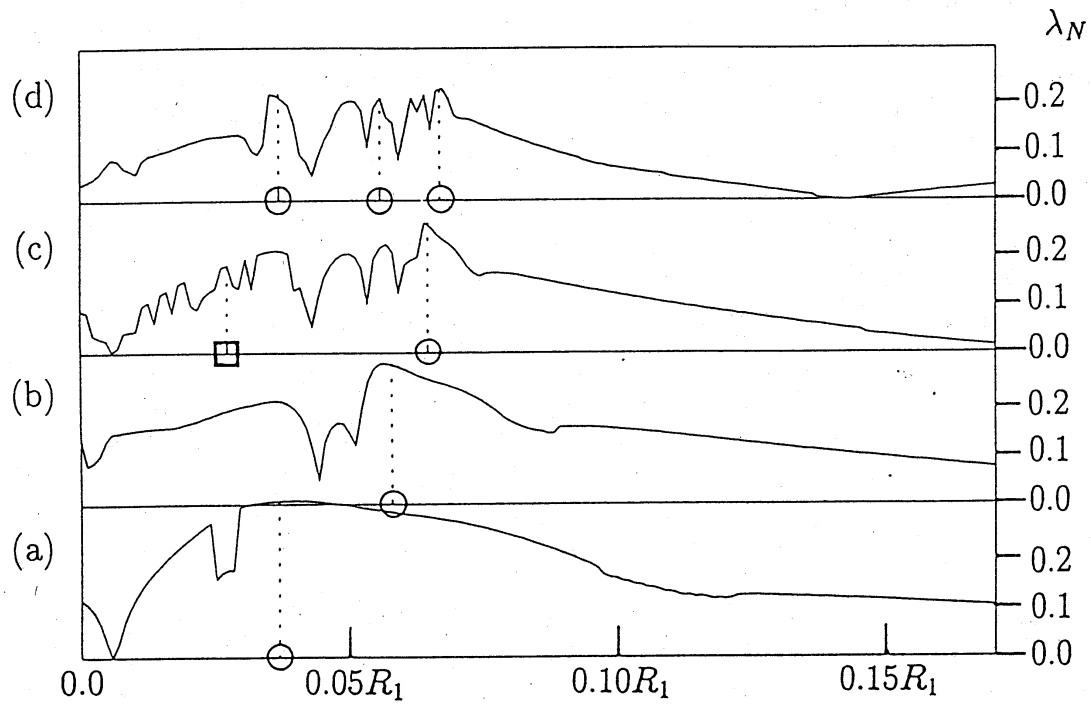


図 1 1 図 9 (b)–(e) の λ_N 曲線の内円筒付近の拡大図. (a) $N = 2$, (b) 3, (c) 4, (d) 5. 横軸は内円筒の右端からの距離を示す. (a)–(d) 中の印 $\circ$, $\square$ は 図 9 (b)–(e) の印に対応している ((d) 中の三つの $\circ$ は 図 9 (e) の一つの $\circ$ に対応).

λ_N のピークの位置に対応しているように思われる. このことをより明確にするために, 図 9 (b)–(e) の内円筒付近の λ_N の曲線を拡大して図 11 に示した. これにより, 図 4, 5 などにみられた色素の初期位置からのずれについて, その発生の要因として外円筒の回転による流れ場のよどみ点とそのセパトリックスの重要性が示唆される. しかしながら, よどみ点やそのセパトリックスと関係付けることができない λ_N のピークも存在し, 全ての λ_N のピークをこのことだけから説明することはできない.

ここで, よどみ点やそのセパトリックスからの λ_N に対する影響は, 外円筒の回転によるものからだけでなく, 内円筒の回転による流れ場におけるものからも当然考えられる. しかし本研究で扱ったパラメータにおいては, これらの影響は比較的小さいものと考えられる. なぜなら, 内円筒の回転によってそのセパトリックス上を運動する粒子の移動量は, 外円筒の回転による移動量と比べるとかなり小さいからである.

5 まとめ

本研究ではラグランジアンカオスと流体粒子の運動の軌道不安定性との関係性を調べるための実験と数値計算をおこなった. はじめに, 前半部において二円筒の交互の周期的回転を N 周期だけおこない, 後半部でその時間反転に対応するような回転を N 周期分させる戻り実験をおこない, 色素の初期位置からのずれをいくつかの N の値に対して調べた. その結果, ポアンカレ断面における規則領域内から出発した色素は, 比較的大きな N の値に対してもその初期位置へよく戻るのに対し, カオス領域内に注入された色素は初期位置からのずれが大きく, またその大きさは N の増加とともに急激に増大することがわかった. この初期位置からのずれは, カオス領域内の流体粒子の運動の軌道不安定性の反映であることを示唆する. これは実験における誤差, すなわち理想的なストークス近似が成り立つ二次元流からのずれをはじめとする様々な要因の影響を受けているものと考えられる.

次に戻り実験に相当する数値計算をおこなった. この計算では, 対応する実験の各周期において計られた二円筒の回転量のゆらぎを実験における誤差として用いた. その結果, この計算によって見出された初期状態と最終状態のずれは, その大きさは実験と比べてかなり小さいものの, 発生する場所やずれかたなどの特徴といった定性的な点で, 実験とよく一致した.

さらに比較的短い時間発展において定義される局所リアプノフ指数を新たに導入し, どのように軌道不安定性が発生するかを調べるために数値計算をおこなった. この計算によると, 戻り実験における色素のずれの大きいところと, 局所リアプノフ指数の大きな部分とがよく合うことが示された. また小さな N に対しては, 内円筒付近の局所リアプノフ指数の大きな部分が実験結果と一致することがわかった. 最後に軌道不安定性の発生に関しては, 外円筒の回転による流れ場におけるよどみ点とそのセパトリックスの重要性が示唆された.

参考文献

- 1) H.Aref : Stirring by chaotic advection, J. Fluid Mech. **143** (1984) 1.
- 2) H.Aref and S.Balachandar : Chaotic advection in a Stokes flow, Phys. Fluids **29** (1986) 3515.
- 3) J.Chaiken, R.Chevray, M.Tabor and Q.M.Tan : Experimental study of Lagrangian turbulence in a Stokes flow, Proc. R. Soc. Lond. A **408** (1986) 165.
- 4) J.Chaiken, C.K.Chu, M.Tabor and Q.M.Tan : Lagrangian turbulence and spatial complexity in a Stokes flow, Phys. Fluids **30** (1987) 687.
- 5) H.Aref and S.W.Jones : Enhanced separation of diffusing particles by chaotic advection, Phys. Fluids A **1** (1989) 470.
- 6) H.Aref : Stochastic particle motion in laminar flows, Phys. Fluids A **3** (1991) 1009.
- 7) P.D.Swanson and J.M.Ottino : A comparative computational and experimental study of chaotic mixing of viscous fluids, J. Fluid Mech. **213** (1990) 227.
- 8) F.J.Muzzio, P.D.Swanson and J.M.Ottino : The statistics of stretching and stirring in chaotic flows, Phys. Fluids A **3** (1991) 822.
- 9) T.Atoke and M.Funakoshi : Chaotic motion of fluid particles due to the alternate rotations of two eccentric cylinders, J.Phys.Soc.Japan **63** (1994) 1738-1753.
- 10) B.Y.Ballal and R.S.Rivlin : Flow of a Newtonian fluid between eccentric rotating cylinders : Inertial effects, Archs. Rat. Mech. Anal. **62** (1976) 237.