
講義ノート

ソリトン理論における直接法

広島大学 広 田 良 吾

§ 0. 講義の内容

- § 1. Solitary waves and Solitons.
- § 2. Dependent Variable Transformations.
- § 3. Direct Methods of Finding Exact Solitons.
- § 4. Bäcklund Transformations.
- § 5. Nonlinear Evolution Equations in Other Bilinear Forms.

各章はそれぞれ多くの節に分かれる。特に § 1 は、波動現象（ソリトンを含む）の直観的な理解をはかるために用意され、以後の数学的な議論を容易にするために重要な章である。

注 以下の内容からわかるように、この講義計画どうりには遂行されず、§ 4 は § 3 に含まれる形で述べられ、又 § 5 は省略された。各章の中でも、省略された節がある。これは広島大学での通年講義の目次でもある。

第一章は次の二節に分れる。

§ 1.1 Solitary Waves

- a. Nonlinear and dispersive waves.
 - a.1 Linear and non dispersive waves.
 - a.2 Linear and dispersive waves.
 - a.3 Nonlinear and non dispersive waves.
 - a.4 Nonlinear and dispersive waves.
- b. Exact Solutions.
 - b.1 Solitary waves.
 - b.2 Schock waves.

広田良吾

b.3 Exact solitary wave solution.

(1) Relation between dispersion relation and nonlinearity.

(2) Relation between amplitude and nonlinearity.

b.4 Periodic waves

§ 1.2 Physical pictures of solutions

a. (a.1 ~ a.4) Conservation of identity.

b. (b.1 ~ b.4) Nonlinear Superposition.

c. (c.1 ~ c.4) Physical Systems that exhibit solitons.

d. Possible applications to Engineering.

§ 1.1, § 1.2については、電子通信学会誌, 6/'72, p 778. に「ソリトン—粒子的に振舞うパルス波」と題して解説をしてある。§ 1.2は省略するつもりであるので、それを参考にして欲しい。

§ 1.1 Solitary Waves

a. Nonlinear and dispersive wave

ソリトン解を持つ波動方程式は、非線形性と分散性を併せ持っている。そこで、Solitary Waveを学ぶまえに、この非線形性と分散性が、波の振舞いにどのような影響を与えるのかということを調べてみよう。

a.1 Linear and nondispersive wave

このもっとも単純な型の波動の典型は、音波である。それは次の波動方程式で記述される。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \tilde{f}(t, x) = 0$$

この方程式は形式的に

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{f}(t, x) = 0$$

と分解されるところから、さらに簡単な次の方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x}\right) f(x, t) = 0$$

をみたす解を、その解として持つことがわかる。この解は、初めの方程式の左と右とに進行する波動解のうち、右方に進む波、

$$f(t, x) \equiv f(x - v_0 t)$$

にあたる。さて、この波を周期的な波とすると、もっとも基本的な解として、

$$f(t, x) \sim e^{i(\omega t - kx)}$$

となり、 ω と k の間の関係 (Dispersion relation) は、 $\omega = v_0 k$ と線形な関係となる。

Linear dispersion relation を持つ波動を non dispersive wave と呼ぶが、この種の波の特徴は、様々な波数の平面波を重ね合せて合成された初期のパルス波形がいつまでもその形を変えないことである。重ね合された成分の一つ一つが、皆同じ速さで進むからである。この波形を保つという性質をそなえた波は、通信手段として応用上きわめて重要である。ソリトンは non dispersive wave ではないが、波形が変わらないという性質を持っており、この点から見て、応用的価値を持っていると言える。

次に、線形であるが Dispersion relation は非線形となる波動方程式を考えてみよう。

a.2 Linear and dispersive waves

この種の波としては、非現実的な方程式と思えるが、a.1 の場合の拡張として次の方程式を挙げることができる。

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} + \delta \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^3 \right] f(t, x) = 0$$

解をやはり

$$f \sim e^{i(\omega t - kx)}$$

の形で求めると、dispersion relation は

$$\omega = v_0 k - \delta k^3$$

と非線形となる。このことから、この波は、a.1 の場合と異なり、波数によって位相速度 $\omega/k = v_0 - \delta k^2$ が違うことになる。従って、初期のパルス波形を構成する、平面波

広田良吾

の速度がそろわないことから、パルスは進行するにつれてその形を変えてしまう。Linear and dispersive wave は安定なパルス波形を保てないのである。

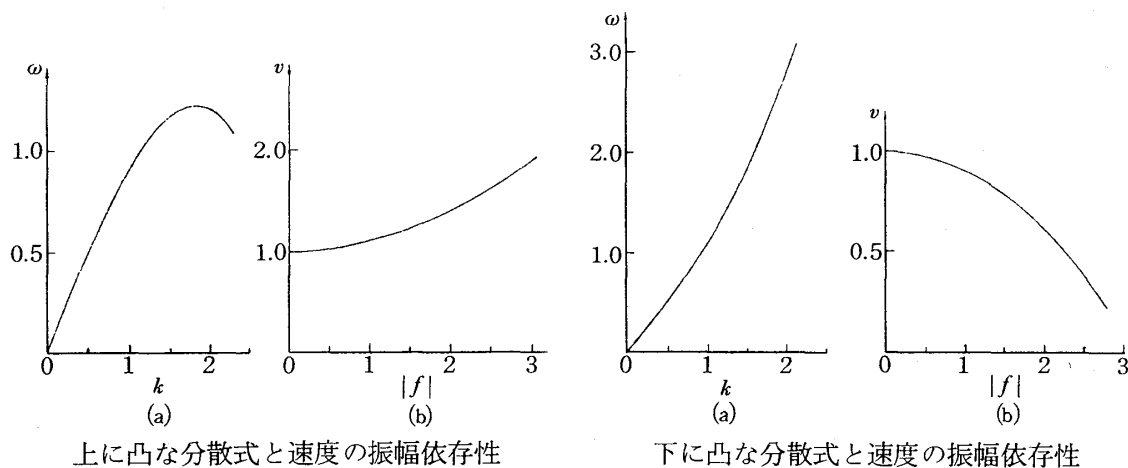


図1 分散式

今までの二例は、どちらも線形方程式であった。そこで、次に非線形性の影響を考えてみることにしよう。

a.3 Nonlinear and nondispersive wave

次の形で非線形項が含まれている方程式が重要である。

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v(f) \frac{\partial}{\partial x} \right] f(x, t) = 0$$

$$v(f) = v_0 + \alpha f^m$$

即ち、速度が波の振幅に依存するような波動方程式である。故に $\alpha > 0$, $m > 0$ であれば、振幅の大きい部分は、小さい部分より早く進み、図2のように、波の突立ちが起る。

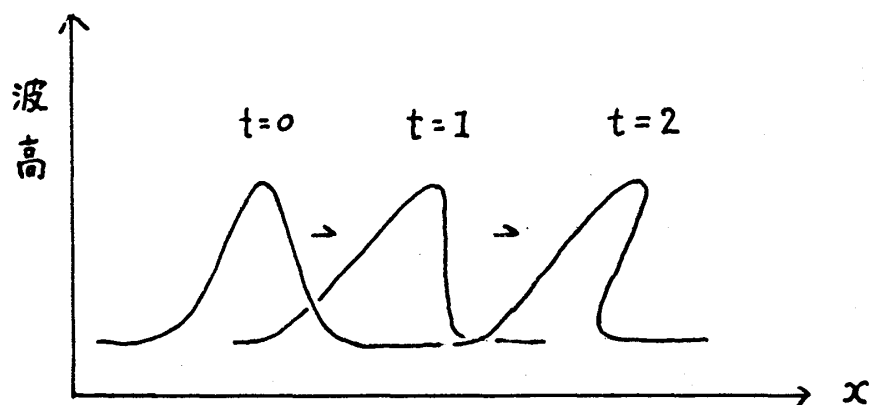


図2

最後には、非物理的な状態となるが、結局は波形が壊れてしまうのである。この方程式は形式的な解として

$$f(x, t) = f(x - v(f)t)$$

を持ち、また厳密解を持つような差分方程式に書き変えることができるので、数値計算を行なうことによって、 $t \rightarrow \infty$ での解の様子を知ることができる。

物理的には、彼の突立ち、崩壊が起きる前に、 $|\partial^n f / \partial x^n| \gg 1$ となるので、そもそもこの方程式は意味を持たず、次の方程式にとって替られるものとしなければならない。

a.4 Nonlinear and Nondispersive wave

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha f^m \frac{\partial}{\partial x} + \delta \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) f(t, x) = 0$$

この方程式は、soliton 解を持つことがわかっている。一見したところ、図3に示したパルス波形の頂点付近は $\partial^3 f / \partial x^3 \sim 0$,

すその近辺では、 $f \sim 0$ から、それぞれの波の部分は近似的に、

$$\text{頂点付近} \sim \left[\frac{\partial}{\partial t} + v(f) \frac{\partial}{\partial x} \right] f = 0$$

$$\text{すそ付近} \sim \left[\frac{\partial}{\partial t} + v_0 \frac{\partial}{\partial x} + \delta \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right] f = 0$$

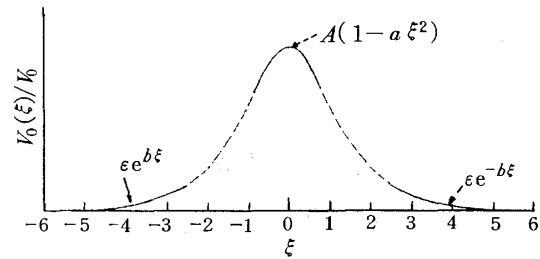


図3

を満たすはずである。そうすると、a.2, a.3で調べたことからわかるように、($\alpha > 0$ ならば) 頂点の速度 $v(f)$ は v_0 よりも大きく、すそ部分の速度は、

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = v_0 - \delta k^2$$

$$v_{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = v_0 - 3\delta k^2$$

から、位相速度、群速度ともに ($\delta > 0$ のとき) v_0 より遅い、ということになり、パルス波形は存在しないように思われる。実は、すその部分は、近似的には $e^{i(\omega t \pm kx)}$ ではなく、本当は

広田良吾

$$f \propto e^{-(\Omega t \pm px)}$$

$$\Omega = v_0 p + \delta p^3$$

で表わされなければならないのである。この形の解は、通常の線形波動理論では (x, t) $\pm\infty$ で発散して境界条件を満たさないで捨てられる解であるが、非線形波ではこの解を図3のようにつなぎあわせて全体の解をつくることができるのである。さて、頂点付近はさきと同じように考えて、すそ部分をこの指数関数的な解で表わすことにすると、この部分の速度は

$$\frac{\Omega}{p} = v_0 + \delta p^2$$

となる。これが頂点の速度と一致するためには、 A を頂点の高さとして

$$\alpha A^m = \delta p^2$$

となればよい。これは $\alpha \cdot \delta > 0$ でありさえすれば解を持つので、少なくともこのときにはパルス波形ができるということはいずれの話である。それに、 $\alpha \cdot \delta < 0$ のときでも、Schock wave ならば存在するのである。

ところで、以上のことから示唆されることは、この種の非線形波動方程式の解を摂動法によって求めようとするならば、第一次近似としては、 $e^{i(\omega t \pm kx)}$ ではなく、線型理論では採用されない $e^{-(\Omega t \pm px)}$ を選ばなければならないということである。つまり

$$f(x, t) = \epsilon e^\eta + O(\epsilon^2) e^{2\eta} + \dots$$

$$\eta = -(\Omega t \pm px)$$

の様に求めることである。とは言え、このままでは、 $\eta > 0$ でこの級数は発散してしまうので、Padé 近似の精神をくんで

$$f = \frac{G}{F}$$

の形でもとめることにしよう、というのが、本講義の題目となっている、「直接法」の根本的なアイデアなのである。

非線形項の形を具体的に知らなくても、直観的に解の大体の性質を知ることができたのであるが、それが厳密解とどの程度一致するのか調べておこう。

b.3 Exact solitary wave solution

a.4 の方程式のSolitary wave sol. は

$$f = A (\cosh \xi)^{-\lambda}$$

$$\xi = px - \Omega t + \text{const}$$

$$\Omega = v_0 p + \delta \lambda^2 p^3$$

$$A^m = (\delta/\alpha) (1+\lambda) (2+\lambda) p^2$$

$$\lambda = \frac{2}{m}$$

と、厳密に求められる。これからこの厳密解で $\lambda=1$ とおいたものが、直観的に得た結果に対応することがわかる。

この章でわかったことは、非線形性と、分散性は、それぞれ単独ではパルス波形を壊す働きをするが、二つ同時に存在すれば互いにつり合って、実質的にその効果を打ち消し合い、パルス波を形成することができる、ということである。

注. この章は、Modified Korteweg-de Vries 方程式のソリトン解について述べられているが、前述の「電子通信学会誌」には、K-dV はもちろん、Sine-Gordon eq.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = \sin \varphi$$

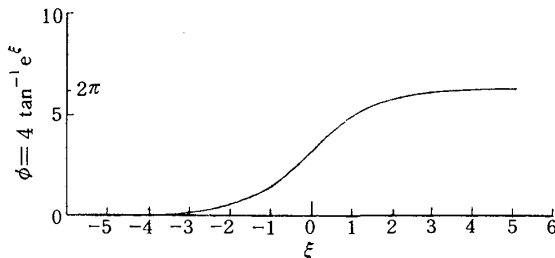
厳密解

$$\phi = 4 \tan^{-1} (\exp(\xi))$$

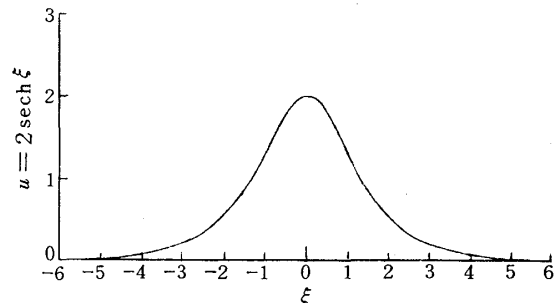
$$\xi = qx - \Omega t$$

$$q^2 - \Omega^2 = 1$$

(この場合の波形は Schock 形。図 4)



a) Sine-Gordon 方程式の解



b) Sine-Gordon 方程式のソリトン

図 4 a), b), $u = \frac{\partial}{\partial x} \phi$

広田良吾

Nonlinear Schrödinger eq.

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + g |\psi|^2 \psi$$

厳密解

$$\psi = A (\cosh \xi)^{-1} \exp(i\eta)$$

$$\xi = qx - \Omega t$$

$$\eta = kx - \omega t$$

$$\Omega = kq, \quad qA^2 = -q^2$$

$$\omega = (k^2 - q^2)/2$$

(この場合は, Envelope Soliton)

についても、同様の考察によって解の概略が知られることが述べられている。その他、定性的なソリトンの理解のしかたが述べられているが、物理関係の人々にとっては、入手しにくい雑誌であるので、そのうち一つだけ、読者の便宜のために、ソリトンの衝突の問題の部分引用する。

ソリトンは、波高が高いとき、その進行速度も早い。そこで、二つのソリトンを正面衝突させることも、追突させることもできる。ところが、前者の場合に際しては衝突時の波高値は、衝突前の二つのソリトンの波高値の和より大きくなるが、後者の場合では、高い方のパルスの波高値よりも小となる。この現象は、戸田格子を模した、はしご状非線形 LC 回路で目で見ることができる。この二つの場合の違いは次のように物理的に説明されている。

『二つのソリトンの波高値がほとんど等しく、波形も高さが1で幅が1の方形波を簡略化して考えます。図4,図5の追突の場合は、電圧波形も電流波形もほぼ等しいと考えると、二つのソリトンが離れているとき、全体のパワーは $1^2 + 1^2 = 2$ です。追突時に電圧が $1 + 1 = 2$ 、電流も $1 + 1 = 2$ になったと仮定すると全体のパワーは $2^2 = 4$ となり、これはパワーの保存則に反します。追突のとき山の高さが高くなれないのはパワーの保存則によるものです。つぎに二つのソリトンが逆方向に走るとき、順方向では電圧(波高値)も電流も+ですが、逆方向では電圧(波高値)は+でも電流は-になります。全体のパワーは0ですので、衝突時に電流が $1 - 1 = 0$ となれば、電圧(波高値)はどんな

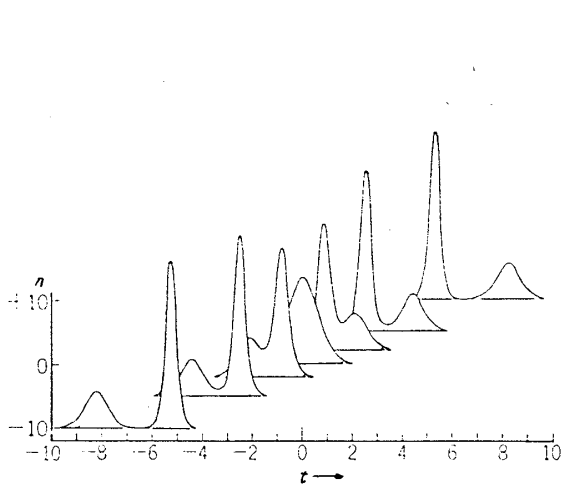


図 5. a 同じ方向に進む二つのソリトンの衝突を $n = -10, -5, -2, 0, 2, 5, 10$ 番目の容量間の電圧の時間変化で表示したもの、空間的に先に（後に）走っているソリトンは時間的には早く（遅く）観測されます。

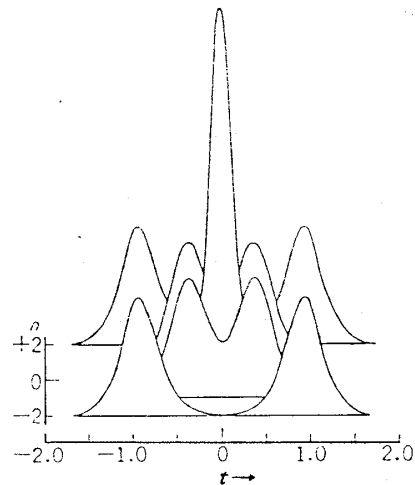


図 5. c 逆方向に走る高さの等しいソリトンの衝突を $n = -2, -1, 0, 1, 2$ 番目の容量間の電圧の時間変化で表示したもの。

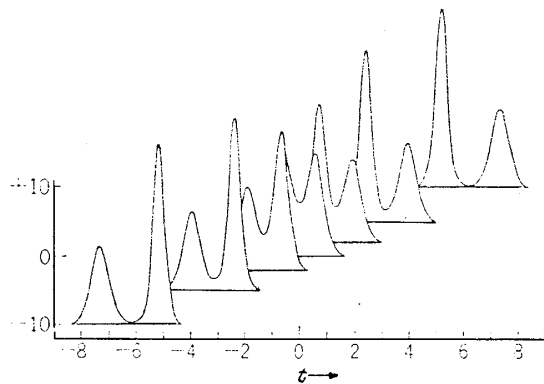


図 5. b 図 a と同じ、二つのソリトンの高さが比較的近い場合。

値になっても、パワーの保存則に反しません。しかしこのときには、エネルギー保存則が重要となります。二つのソリトンが離れているとき、全エネルギーは、電気的エネルギーと磁氣的エネルギーの和ですが、衝突時では、電流の和が 0 になるので、全エネルギーは電気的エネルギーだけになります。容量が電圧の減少関数なので、電気的エネルギーを保存するためには、衝突時の電圧は、それぞれの和 $1 + 1 = 2$ よりも大きくなる必要があるのです。』

広田良吾

II. Dependent Variable Transformations.

§ 2.1 Nonlinear Evolution Equations that reduces to Linear Equations.

- a. Riccati Equation
- b. Burgers Equation and Higher order Burgers Equation
- c. Two-wave Interaction
- d. Liouville Equation

§ 2.1

- a. Riccati Equation

$$\frac{d}{dt}u(t) = a(t) + 2b(t)u(t) + u(t)^2 \quad (2.1)$$

この型の微分方程式を Riccati 方程式というが、この微分方程式は一般に求積法だけではとけないことが知られている。しかしながら、もしこの方程式の特解が一つ得られれば、一般解を得ることは容易なのである。そこで、次のように、従属変数 u を

$$u \equiv g/f \quad (2.2)$$

の様に、変換して、特解を求めてみる。(2.2)の左・右辺を微分して、

$$u_t = \frac{g_t f - g f_t}{f^2} \quad (2.3)$$

を得る。これと、(2.2)を(2.1)に代入し、

$$g_t f - g f_t = a f^2 + 2 b g f + g^2 \dots \quad (2.4 a)$$

を導き、さらに次の様に変形することができる。

$$(g_t - a f - b g) f = (f_t + b g + g) \cdot g \quad (2.4 b)$$

ここで、 f , g はこの式の左右両辺を0として得られる二式によって決まるとする。これを、Decouple と呼ぶ。即ち

$$\begin{aligned} f_t &= -b f - g \\ g_t &= a f + b g \end{aligned} \quad (2.5)$$

この方程式は線形方程式だから、解を得ることは簡単である。それに、もし a, b が定数ならば、さらに容易なこととなる。Riccati 方程式が、非線形方程式にもかかわらず、従属変数を変換することによって等価な線形（連立）微分方程式に書換えられるという事情は、次の Burgers 方程式等についても見いだされる。

b.0 Burgers Equation.

Navier-Stokes Equation の一次元版とみなされる、Burgers 方程式、

$$u_t = u_{xx} + 2uu_x \quad (2.6)$$

$$\text{は, } u = f_x/f = (\log f)_x \quad (2.7)$$

なる、Cole-Hopf 変換によって

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f_t - f_{xx}}{f} \right) = 0 \quad (2.8a)$$

と書換えられる。そこで、 f を

$$f_t - f_{xx} = 0 \quad (2.8b)$$

を満たすものとすれば、結局 Burgers 方程式の解は

$$f(x, 0) = e^{\int^x u(x', 0) dx'} \quad (2.9)$$

を初期条件とする、線形拡散方程式の解を得ることによって求められることになる。

Burgers 方程式を拡張した次の方程式も同様である。

b.1 Higher Order Burgers Equation

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{\partial}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{\int^x u dx'} \right) e^{-\int^x u dx'} \right] \\ &= BH_n(u) \end{aligned} \quad (2.10)$$

で定義される微分方程式を、高階 Burgers 方程式と呼ぶ。 $n = 2$ のとき

$$BH_2(u) = u_{xx} + 2uu_x \quad (2.10a)$$

で b.0 の Burgers 方程式となる。 $n = 3$ では

$$BH_3 = \frac{\partial}{\partial x} [u_{xx} + 3uu_x + u^3] \quad (2.10b)$$

従って

$$\frac{\partial}{\partial t} u = u_{xxx} + 3uu_{xx} + 3u_x^2 + 3u^2u_x \quad (2.10c)$$

広田良吾

である。これとよく似た方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} u = u_{xxx} + 3uu_x + 3u^2u_x \quad (2.10d)$$

は、 N -ソリトン解を持っている。これは、非線形方程式は形の上では大変よく似た同士でも、解はまったく異なった性質をもつことを示唆している。非線形方程式を一般的に取扱うことができにくいということが、このことから理解されるだろう。

一般の n の場合で、b.0 で使った Cole-Hopf 変換によって、高階 Burgers 方程式は

$$f_t = \frac{\partial^n}{\partial x^n} f \quad (2.11)$$

と変換される。実を言うと、この単純な線形方程式から、逆に

$$f \equiv e^{\int^x u dx'} \quad (2.12)$$

と、 f から u を定義して、 u に対する方程式としてこの高階 Burgers 方程式を得たのである。

c. Two-wave interaction

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_1 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_1 &= -\phi_1 \phi_2 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_2 \frac{\partial}{\partial x} \right) \phi_2 &= \phi_1 \phi_2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

これは、移動する prey-predator 系のモデルとして、M. Yamaguchi によって提案され、(数理解析研究所講究録, 174, 130-163 '73) また、H. Hashimoto によって厳密解が求められている。(Proc. Japan. Acad., 50, 623-627, '74)。

まず、次の様に独立変数を変換する。

$$\begin{aligned} \xi &= t + v_1 x \\ \eta &= t + v_2 x \end{aligned} \quad (2.14)$$

ここで、 $v_1 \neq v_2$ を仮定する。 $v_1 = v_2$ のときは簡単に解けるからである。これによって、方程式 (2.13) は次の様に改められる。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial \xi} \phi_1 = -\phi_1 \phi_2 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \phi_2 = \phi_1 \phi_2 \end{cases} \quad (2.15)$$

さて今度は、 ϕ_1, ϕ_2 を次の様に変換しよう。

$$\begin{aligned} \phi_1 &\equiv -\frac{\partial}{\partial \eta} \log F = -\frac{F_\eta}{F} \\ \phi_2 &\equiv \frac{\partial}{\partial \xi} \log F = \frac{F_\xi}{F} \end{aligned} \quad (2.16)$$

これを式 (2.15) に代入すると、 F に対する方程式

$$F_{\xi\eta} = 0 \quad (2.17)$$

を得る。この方程式の一般解は

$$F(\xi, \eta) = \theta(\xi) + \chi(\eta) \quad (2.18)$$

の形で求まる。しかし、この解から得られる、 $\phi_1 = -\chi'(\eta)/(\theta(\xi) + \chi(\eta))$, $\phi_2 = \theta'(\xi)/(\theta(\xi) + \chi(\eta))$ は方程式 (2.15) の解としては、一般解ではないような気がして不満足である。なぜならば、従属変数変換が、一般性を破っている、ここで求めた解は特解にすぎないのではないかという恐れがあるからである。Burgers 方程式は Cole-Hopf 変換で初期値問題が解けるし、Riccati 方程式も一般解を得ることができる（実際には、従属変数変換で得られる解は特解であるが、一般解はそれから得られる。）ので、問題は起らないが、一般に Decouple を行なう際には任意定数が現われ、これをどのように与えたらよいか判らないことがある。今までのところは、そのところが面白い問題を提起しない限り深く追求されていない。

d. Liouville Equation

$$\varphi_{xt} = e^\varphi \quad (2.19a)$$

$$(\varphi_{tt} - \varphi_{xx} = e^\varphi) \quad (2.19b)$$

の Liouville 方程式を考えよう。

$$e^\varphi \equiv -2(\log F)_{xt} \quad (2.20)$$

広田良吾

と変換する。これは、方程式 (2.19a) から

$$\varphi_{xt} = -2 (\log F)_{xt} \quad (2.21)$$

となり、

$$\varphi = -2 \log F + \log f_1(x) + \log f_2(t) \quad (2.22)$$

即ち

$$e^\varphi = \frac{f_1(x)f_2(t)}{F^2} \quad (2.23)$$

と置くことを意味する。この式を (2.20) の左辺に代入し、右辺の微分を実行すると、

$$\frac{f_1(x)f_2(t)}{F^2} = -2 \frac{F_{xt}F - F_x F_t}{F^2} \quad (2.24)$$

これを

$$F_{xt} = 0 \quad (2.25)$$

$$F_x = \frac{1}{2} f_1(x), \quad F_t = f_2(t)$$

と Decouple する。 $f_1(x)$, $f_2(t)$ は任意関数である。従って、 $\theta(x) = \frac{1}{2} \int^x f_1(x') dx'$, $\chi(t) = \int^t f_2(t') dt'$ とすれば

$$F(x, t) = \theta(x) + \chi(t) \quad (2.26)$$

なる解が得られる。これより

$$e^\varphi = 2 \frac{\theta_x(x) \chi_t(t)}{[\theta(x) + \chi(t)]^2} \quad (2.27)$$

Two-wave Interaction とこの Liouville 方程式はよく似た構造をしている。

これら例で、Decouple にまつわる不定性をもう一度述べることにしよう。

$$\varphi_{xt} = 0 \quad (2.28)$$

の解は

$$\varphi(x, t) = \hat{\theta}(x) + \hat{\chi}(t) \quad (2.29)$$

$$(e^\varphi = e^{\hat{\theta}(x)} e^{\hat{\chi}(t)} \equiv \tilde{\theta}(x) \tilde{\chi}(t))$$

の形で求まる。一方、この方程式を、Liouville 方程式

$$\varphi_{x_t} = r e^\varphi \quad (2.30)$$

の、 $r \rightarrow 0$ の極限と考えて、解を求めるとすると、

$$e^\varphi = 2r^{-1} \frac{\theta_x(x) \chi_t(t)}{[\theta(x) + \chi(t)]^2} \quad (2.31a)$$

に於いて、 $r \rightarrow 0$ の極限を考えればよい。この極限がさきの解と同じ形となるためには $\theta(x) \rightarrow r\hat{\theta}(x)$ と置換え、 $r \rightarrow 0$ とすればよい。結果は、

$$e^\varphi = 2 \frac{\hat{\theta}_x(x) \chi_t(t)}{\chi(t)^2} \quad (2.31b)$$

となる。この解の形は、 $\hat{\theta}$ と χ の対称性が良くない。こんなところからも、Decouple 法は巧妙な方法であるが、一般解が得られるのかどうかははっきりしない印象を得るのである。例えば、実は

$$F = 1 + \theta(\xi) + \chi(\eta) + (1-\alpha) \theta(\xi) \chi(\eta) \quad (2.32)$$

の形の F も、Two-wave Interaction, Liouville 方程式の解となるのである。 $\alpha = 1$ という特別の場合のみ、前に我々が得た解となるのである。この解は今まで知られていなかった新しい解に思える。

注. この問題について、次章の途中で、訂正と補足がなされた。

§ 3. Direct Methods of Finding Exact Solutions to Nonlinear Evolution Equations.

§ 3.1 Preliminaries

§ 3.2 Properties of D-operator Formula (I)–(XV)

§ 3.3 Solutions to Bilinear Differential Equations

a N-soliton solutions to the KdV equation in the bilinear equation

広田良吾

- a.1 1-soliton solution
- a.2 2-soliton solution
- a.3 N-soliton solution
- b. N-soliton solutions to the K-dV-type equations
 - b.1 Forms for $F(D_t, D_X, D_Y \dots)$
 - (i) – (vii) known cases
 - b.2 Other forms for F
- c. N-soliton solutions Modified KdV equation
- d. Proof of the identity (ies)
 - (KdV について述べる。)
- e. Collisions of solitons
- f. Other solutions

f₁ Solitons + ripples

(この問題は、ソリトンの安定性を論ずることになる。たとえば外部雑音に対するソリトンのパルス波形の安定性は応用上重要だからである。ソリトン研究の頭初は、この目的のためには3-ソリトン解の性質がわかればよいと考えた。)

f₂ Rational (Polynomial) solution

(N-ソリトンの特殊な場合と言われるが、そうでもないようである。)

f₃ C-solitons

(CはContinuousのCである。N-ソリトンの $\sum_{n=1}^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int dk$ となったような解と言われている。)

f₄ Periodic Boundaries

(f₃, f₄の二つは難しいので、講義では触れない。参考文献を挙げておく。)

Direct Methods について、次の題名で私(広田)の論文がある。

「Direct Methods in Soliton Theory」 in 「Topics in Modern Physics」 ed.
by Bullough, Caudrey.

(注. 未出版とのこと)

講師注

f₃ C-ソリトンについては、H. Yamagata ; “On C-solitons” , Math. Japonica ,

22 (77) 193 大石進一 (早大, 理工): “双線形微分差分方程式のC-ソリトン解” プレプリント。があります。大石さんは今年の春の物理学会でC-ソリトン解を使ってKdV方程式の初期値問題が解ける事を示しました。これはDirect Methodにおける重要な進歩です。中身をよく知らないので断定的な事は云えませんが、彼の手法がKdVだけでなく他の方程式にも使えるのであれば、Direct Methodの方がInverse Methodよりも優れている事を意味します。

f₄ Periodic Boundaries については、ロシア人の Its and Mateev の論文をみた記憶があるのです。今の所みつかりません。この中で彼らはPeriodic Boundariesをもつ解がRiemanの θ 関数で表わされる事、その解で境界を無限大にすると、 θ 関数は僕の表現式

$$f = \sum_{\mu=0,1} \exp \left(\sum_{i>j}^{(N)} A_{ij} \mu_i \mu_j + \sum_{i=1}^N \eta_i \mu_i \right)$$

に帰着することを示していました。

§ 3.1 Preliminaries.

Korteweg de Vries equation に関して、直接法のあらましを述べることにする。KdV方程式

$$u_t + \alpha u u_x + \delta u_{xxx} = 0 \quad (3.1)$$

を $x \rightarrow \delta^{1/3} x$, $u \rightarrow 6\alpha^{-1}\delta^{1/2} u$ とスケールすると、

$$u_t + 6u u_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.2)$$

となる。この方程式のソリトン解を逆散乱法などによらないで求める方法としては、摂動法が考えられる。§ 1で触れたように、ソリトンのすその方を表わす解を摂動の最低次の近似解として、次々に高次の解を求めて厳密解を求めることを試みよう。 ε をsmall parameter と考えて、 u を次の形で求める。

$$u = \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3 + \cdots \quad (3.3)$$

これを式(3.2)に代入し、 ε の同次の項をそれぞれ、0と等置すると、

$$\varepsilon ; \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) u_1 = 0$$

広田良吾

$$\varepsilon^2 ; \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) u_2 = -6 u_1 u_{1x} \quad (3.4)$$

$$\varepsilon^3 ; \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) u_3 = -6 (u_2 u_{1x} + u_1 u_{2x})$$

を得る。 ε の次数の式から

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 e^\eta, \quad \eta = \Omega t + p x \\ \Omega + p^3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

ε^2 の次数の式から

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial^3}{\partial x^3} \right) u_2 &= -6 a_1^2 e^\eta p e^\eta \\ u_2 &= a_2 e^{2\eta} \\ a_2 &= -\frac{a_1^2}{p^2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

の様に次々に u_i ($i = 1, 2, \dots$,) を求めてゆくことができる。そして解は

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (\varepsilon e^\eta)^n \quad (3.7)$$

となるが、右辺は発散 ($\eta \rightarrow \text{大}$) するので、すべての η に対する解を求めるためには、このままの単純な摂動法では無理なことがわかる。一方、厳密な 1-soliton 解は

$$u = \frac{2p^2 e^\eta}{(1 + e^\eta)^2} \left(= \frac{p^2}{2} \frac{1}{\cosh^2(\eta/2)} \right) \quad (3.8)$$

であるから、 $u = G/F$ の形で求めることにして、 F, G を摂動計算で求めることにすればうまくゆくような気がする。Padé 近似を思い起してもらいたい。

$$\begin{aligned} u_t &= (G_t F - G F_t) / F^2 \\ u_x &= (G_x F - G F_x) / F^2 \\ u_{xxx} &= G_{xxx} / F - (3G_{xx} F_x + 3G_x F_{xxx} + G F_{xxx}) / F^3 \\ &\quad + 6 \{ (G_x F_x^2 + G F_{xx} F_x) / F^3 - G F_x^3 / F^4 \} \end{aligned} \quad (3.9)$$

を K-dV 方程式に代入すると、 F, G に対する方程式を得る。

$$(G_t F - G F_t) / F^2 + 6 (G/F) (G_x F - G F_x) / F^2$$

$$\begin{aligned}
& + (G_{xxx}F - 3G_{xx}F_x - 3G_xF_{xx} - GF_{xxx})/F^2 \\
& + 6(FG_xF_x^2 + FGF_{xx}F_x - GF_x^3)/F^4 = 0
\end{aligned} \tag{3.10}$$

この計算は、3-soliton 解を必死にもとめようとしていたとき出てきたものである。この種の面倒な計算は、何か強烈な、確固とした信念がないとできるものではないと思う。それはさておき、この F, G に対する複雑な方程式を、Decouple することによって解を求めることを考える。Decouple の一つの方法としては、 F^{-2} がかかる項と、 F^{-4} がかかる項をそれぞれ 0 とする方法を思いつくが、その場合は、1-ソリトンの厳密解に対応する、

$$\begin{aligned}
G &= 2p^2 e^\eta \\
F &= (1 + e^\eta)^2
\end{aligned} \tag{3.11}$$

を解にもたない方程式になってしまう。そこで、逆に考えて、解に持つには Decouple はどのようなものであれば良いかと考えてみると * の - が + であればよいことが判る。そこでこの sign を + にして、おつりは F^{-4} の項に繰込むことにする。即ち、(3.10) は

$$\begin{aligned}
& [G_t F - GF_t + G_{xxx}F - 3G_{xx}F_x + 3G_xF_{xx} - GF_{xxx}]/F^2 \\
& - 6[(G_xF - GF_x)/F^2][GF - (FF_{xx} - F_x^2)]/F^2 = 0
\end{aligned} \tag{3.12}$$

となる。これから、Decouple として

$$\begin{aligned}
G_t F - GF_t + G_{xxx}F - 3G_{xx}F_x + 3G_xF_{xx} - GF_{xxx} &= 0 \\
2GF &= (F_{xx}F - 2F_xF_x + F_{xx}F)
\end{aligned} \tag{3.13}$$

採用できることが知られる。この式は bilinear operator D_t, D_x ;

$$\begin{aligned}
D_t G \cdot F &\equiv G_t F - GF_t \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right) G(t) F(t') \Big|_{t'=t} \\
D_x^n G \cdot F &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^n G(x) F(x') \Big|_{x'=x}
\end{aligned}$$

広田良吾
を導入すれば,

$$\begin{aligned}(D_t + D_x^3)G \cdot F &= 0 \\ D_x^2 F \cdot F &= 2GF\end{aligned}\tag{3.14}$$

の形にまとめることができる。さらに、これは次節で詳しく述べるが、 $F = f^2$ とすれば、(3.14)の第二式から

$$G = D_x^2 f \cdot f\tag{3.15}$$

を得、これを第一式に代入することによって

$$(D_t + D_x^3)(D_x^2 f \cdot f) \cdot f^2 = 0\tag{3.16}$$

となる。この bilinear form の微分方程式は

$$D_x(D_t + D_x^3)f \cdot f = 0\tag{3.17}$$

を満足する f を解とすることが判かるので、結局、K-dV 方程式は bilinear form では、このような簡単な形となるのである。次節で bilinear operator の性質と、非線形波動方程式の直接解法で有用となる公式について述べたい。上記の変形の証明もそこで行なう。

次節に入る前に、補足訂正をしたい。Two-wave Interaction の問題で、従属変数変換で現われた F は、他の解をもつのではないかという疑問を提出した。しかし、その際新しい解といったのは誤りで、本質的に新しい解と言えるものではないことが判ったので、訂正する。二階の微分方程式は、任意関数は二つでよいのである。これは、Decouple するときに現われるあいまいさに由来している。別の言い方をすると、

$$u = \frac{G}{F} = \frac{G \cdot h}{F \cdot h}\tag{3.18}$$

$$G' = G \cdot h$$

$$F' = F \cdot h \quad h \text{ は任意関数}$$

より、 F, G と異なる方程式に従う F', G' なる解も無限に多くあるが、 u に直すと、皆同じになる。 h は言わばゲージ変換の一種である。前の例では第三項は、この h に対応するものであった。つまり、Two-wave Interaction に即せば

$$\begin{aligned}
e^\varphi &\equiv -2 (\log F)_{xt} \\
&= -2 (\log h(t)F(x,t))_{xt} \\
h(t) &\text{は任意関数}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

であり, 新しいと思われた解 $F(x, t, \alpha)$ は

$$\begin{aligned}
F &= 1 + \theta(x) + \chi(t) + (1 - \alpha) \theta(x) \chi(t) \\
&= \frac{1}{1 + (1 - \alpha) \chi(t)} \left[\theta(x) + \frac{1 + \chi(t)}{1 + (1 - \alpha) \chi(t)} \right] \\
&\equiv h(t) [\theta(x) + \tilde{\chi}(t)]
\end{aligned} \tag{3.20}$$

と書くことができるから, これは H. Hashimoto の解と本質的に同じものである。

§ 3.2 Properties of D -operator

D -operator の consistency など今はこのところ考慮しないことにし, 十分素直な関数空間の上で定義されとのみ言っておこう。 D -operator の定義は,

$$\begin{aligned}
D_x^m D_t^n a(x, t) \cdot b(x, t) \\
\equiv \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t'} \right)^n a(x, t) b(x', t') \Big|_{\substack{x'=x \\ t'=t}}
\end{aligned} \tag{3.21}$$

である。比較のために通常の微分を類似の形に書くと,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^n a(x, t) b(x, t) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial t'} \right)^n a(x, t) b(x', t') \Big|_{\substack{x'=x \\ t'=t}}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

である。簡単な例を挙げておこう。

$$\begin{aligned}
D_x a \cdot b &= a_x b - a b_x \\
D_x^2 a \cdot b &= a_{xx} b - 2 a_x b_x + a b_{xx} \\
D_x^3 a \cdot b &= a_{xxx} b - 3 a_{xx} b_x + 3 a_x b_{xx} - a b_{xxx}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

また, $[a, b] \equiv D_x a \cdot b$ とすると, Jacobi の恒等式

広田良吾

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0 \quad (3.24)$$

を満たす。これは、 D -operator を使って定義される次の演算子

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon D_x} (a \cdot b) &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^n (a \cdot b) \Big|_{x'=x} \\ &= a(x+\varepsilon) b(x-\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$c \cdot f \cdot e^{\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}} \cdot f(x) = f(x+\varepsilon)$$

について成立する恒等式、 $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると導びかれる。この $\exp[\varepsilon D_x]$ は差分演算子と考えることができ、微分方程式を差分方程式化する際に有用なことが判る。例えば、微分方程に現われる、 D_x を $2\varepsilon^{-1} \operatorname{sech} \frac{\varepsilon}{2} D_x$ で置換えればよいのである。 $\varepsilon \rightarrow 0$ で両者は一致する。これを、ソリトン解を持つ方程式に適用すれば、無限の運動の恒量を持つ、やはりソリトン解を持つ非線形差分方程式が得られる。これは重要な事である。

注. この差分化の問題は、末尾の談話会記録に載録してある。

さて、これらの演算子の間に成立する、公式を挙げてみよう。この公式は総て重要なもので、直接法に際して役に立つものばかりである。しかし、もしこの演算子の基本的な性質がつかまえられれば、もっと簡略な公式体系で十分となるかもしれない。この点にまだ不満が残っている。

$$\begin{aligned} (0) \quad D_x^m D_t^n (a \cdot b) &= D_t^n D_x^m (a \cdot b) \\ &= D_x^{m-1} D_t^n D_x (a \cdot b) \end{aligned}$$

$$(I) \quad D_x^m a \cdot 1 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^m a$$

$$(II) \quad D_x^m a \cdot b = (-1)^m D_x^m b \cdot a$$

$$(II.1) \quad D_x^m a \cdot a = 0 \quad \text{for odd } m$$

$$(II.2) \quad D_x a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = \text{const} \times b$$

さらに

$$\sinh \varepsilon D_x a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = \text{const} \times b$$

が言えるので

$$D_x^m a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = \text{const} \times b$$

も言えるかもしれないが、証明されていない。

$$\begin{aligned} \text{(III)} \quad D_x^m a \cdot b &= D_x^{m-1} D_x a \cdot b \\ &= D_x^{m-1} (a_x \cdot b - a \cdot b_x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(III. 1)} \quad D_x^m a \cdot a &= D_x^{m-1} D_x (a \cdot a) \\ &= D_x^{m-1} (a_x \cdot a - a \cdot a_x) \\ &= 2D_x^{m-1} a_x \cdot a, \text{ for even } m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(III. 2)} \quad D_x D_t a \cdot a &= 2D_x a_t \cdot a \\ &= 2D_t a_x \cdot a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(IV)} \quad D_x^m e^{p_1 x} \cdot e^{p_2 x} &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x'} \right)^m e^{p_1 x} \cdot e^{p_2 x'} \Big|_{x'=x} \\ &= (p_1 - p_2)^m e^{(p_1 + p_2)x} \end{aligned}$$

これは、摂動計算の時に使われ、重要な働きをする。また通常の微分法と比較すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^m e^{p_1 x} e^{p_2 x} = (p_1 + p_2)^m e^{(p_1 + p_2)x}$$

$$\text{(IV. 1)} \quad D_x^m e^{p x} \cdot e^{p x} = 0 \quad (m \neq 0)$$

今まで、 m は正整数と仮定したが、通常の微分には積分という逆変換がある。

$$\begin{array}{ccc} \frac{\partial}{\partial x} & \longleftrightarrow & \int dx \\ \parallel & & \parallel \\ p & & p^{-1} \end{array}$$

これは、 $m = -1$ の概念と思ってよいが D operator には、うまい逆演算子が定義できない。

『ミクシンスキー演算子法ではどうか。』

それはよく知らないが、二変数のときにはうまくゆかないのではないだろうか。

$$\text{(IV. 2)} \quad F(D_t, D_x, \dots); \text{ Polynomial of } D_t, D_x, \dots$$

広田良吾

$$\begin{aligned}
& F(D_t, D_x, \dots) e^{\Omega_1 t + p_1 x} \cdots e^{\Omega_2 t + p_2 x} \cdots \\
& = [F(\Omega_1 - \Omega_2, p_1 - p_2, \dots) / F(\Omega_1 + \Omega_2, p_1 + p_2, \dots)] \\
& \quad \times F\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \dots\right) e^{(\Omega_1 + \Omega_2)t + (p_1 + p_2)x + \cdots}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(V) \quad & e^{\varepsilon D_x + \delta D_t} a(x, t) \cdot b(x, t) \\
& = a(x + \varepsilon, t + \delta) b(x - \varepsilon, t - \delta)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(VI) \quad & e^{\varepsilon D_x} a b \cdot c d = [e^{\varepsilon D_x} a \cdot c] [e^{\varepsilon D_x} b \cdot d] \\
& = [e^{\varepsilon D_x} a \cdot d] [e^{\varepsilon D_x} b \cdot c]
\end{aligned}$$

Ⅶ の証明

$$\begin{aligned}
& e^{\varepsilon D_x} a(x) b(x) \cdot c(x) d(x) \\
& = a(x + \varepsilon) b(x + \varepsilon) c(x - \varepsilon) d(x - \varepsilon) \\
& = a(x + \varepsilon) c(x - \varepsilon) b(x + \varepsilon) d(x - \varepsilon) \\
& = (e^{\varepsilon D_x} a(x) \cdot c(x)) (e^{\varepsilon D_x} b(x) \cdot d(x))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(Ⅶ. 1) \quad & D_x a b \cdot c = a_x b c + a D_x b \cdot c \\
2 \quad & D_x^2 a b \cdot c = a_{xx} b c + 2 a_x D_x b \cdot c + a D_x^2 b \cdot c \\
3 \quad & D_x^2 a b \cdot c d = (D_x^2 a \cdot c) b d + 2 (D_x a \cdot c) (D_x b \cdot d) + a c (D_x^2 b \cdot d) \\
4 \quad & D_x^3 a c \cdot b c = (D_x^3 a \cdot b) c^2 + 3 (D_x a \cdot b) (D_x^2 c \cdot c) \\
5 \quad & D_x^m e^{px} a(x) \cdot e^{px} b(x) \\
& = e^{2px} D_x^m a(x) \cdot b(x)
\end{aligned}$$

これらは (Ⅶ) の ε の各次を等置し, a, b, c, d を適当に選べば証明できる。5 は $a \rightarrow e^{px} a, b \rightarrow e^{px} b$, という Guage 変換をしても, bilinear form の微分方程式は不変となることを示唆する。

次の公式は Bäcklund 変換を導びくときに, 絶大な偉力を発揮する公式である。

“Exchange Formula” と呼ぶ。

$$\text{Ⅶ.} \quad e^{D_1} (e^{D_2} a \cdot b) \cdot (e^{D_3} c \cdot d)$$

$$= e^{\frac{1}{2}(D_2-D_3)} \left[e^{\frac{1}{2}(D_2+D_3)+D_1} a \cdot d \right] \\ \times \left[e^{\frac{1}{2}(D_2+D_3)-D_1} c \cdot b \right]$$

$$D_i \equiv \varepsilon_i D_x + \delta_i D_t$$

b と d とが入れ替っていることに注意。後で見るように, Bäcklund 変換とは単に, “入れ替え” にすぎないということが判る。簡単すぎてかえって, Bäcklund 変換の意味が判らなくなってしまうぐらいである。

VII の証明

$$e^{\varepsilon_1 D_x} (e^{\varepsilon_2 D_x} a \cdot b) \cdot (e^{\varepsilon_3 D_x} c \cdot d) \\ = e^{\varepsilon_1 D_x} [(a(x+\varepsilon_2) b(x-\varepsilon_2))] \cdot [c(x+\varepsilon_3) d(x-\varepsilon_3)] \\ = a(x+\varepsilon_1+\varepsilon_2) d(x-\varepsilon_1-\varepsilon_3) b(x+\varepsilon_1-\varepsilon_2) c(x-\varepsilon_1+\varepsilon_3) \\ = e^{\alpha_1 D_x} (e^{\alpha_2 D_x} a \cdot d) \cdot (e^{\alpha_3 D_x} b \cdot c) \\ = a(x+\alpha_1+\alpha_2) d(x+\alpha_1-\alpha_2) b(x-\alpha_1+\alpha_3) c(x-\alpha_1-\alpha_2)$$

となるように, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ を決めると,

$$\alpha_1 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{2}, \quad \alpha_2 = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2} \\ \alpha_3 = \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2} - \varepsilon_1$$

となるが, これで証明できた。

(VII 1.1)

$$D_t (D_x^2 f \cdot f) \cdot f^2 = D_x (D_x D_t f \cdot f) \cdot f^2$$

(VII 1.2)

$$D_x^3 (D_x^2 f \cdot f) \cdot f^2 = D_x (D_x^4 f \cdot f) \cdot f^2$$

(VII 1.3)

$$D_x^2 f^2 \cdot f^2 = 2 (D_x^2 f \cdot f) f^2$$

広田良吾

(VII 2.1)

$$(D_x D_t f' \cdot f') ff - f' f' (D_x D_t f \cdot f) = 2 D_x (D_t f' \cdot f) \cdot f f'$$

(VII 2.2)

$$(D_x^2 f' \cdot f') ff - f' f' (D_x^2 f \cdot f) = 2 D_x (D_x f' \cdot f) \cdot f f'$$

(VII 2.3)

$$\begin{aligned} (D_x^4 f' \cdot f') ff - f' f' (D_x^4 f \cdot f) &= 2 D_x (D_x^3 f' \cdot f) \cdot f f' \\ &+ 6 D_x (D_x^2 f' \cdot f) \cdot (D_x f \cdot f') \end{aligned}$$

$$(VIII) \quad (D_x^2 a \cdot b) cd - ab (D_x^2 c \cdot d)$$

$$= D_x [(D_x a \cdot d) \cdot c b + ad \cdot (D_x c \cdot b)]$$

$$\text{c.f.} \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [p(x) \frac{\partial y_1}{\partial x}] \right\} y_2 - y_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} [p(x) \frac{\partial y_2}{\partial x}] \right\}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ p(x) \left[\left(\frac{\partial y_1}{\partial x} \right) y_2 - y_1 \left(\frac{\partial y_2}{\partial x} \right) \right] \right\}$$

$a = p^{1/2} y_1$, $c = p^{1/2} y_2$, $b = d = 1$ とすればVIIIは, この式と一致する。

これらの公式の外に, 通常の微分方程式を bilinear form に変形するのに便利な公式があるが, それを述べる前にこれまでに示した公式を使う例を示してみよう。

最初の例。Schrödinger 方程式を bilinear form に書換えると次の形の連立方程式になる。

$$\psi_{xx} + V(x)\psi = \lambda\psi$$

$$\begin{cases} D_x^2 f' \cdot f = \lambda f' f \\ V(x) = \frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2} = (\log f)_{xx} \end{cases} \quad (3.26)$$

なぜならば, $f' = \psi f$ とすると,

$$D_x^2 f' \cdot f = D_x^2 \psi f \cdot f = \psi_{xx} f^2 + \psi D_x^2 f \cdot f$$

ここで公式(II. 1)と(VI. 1, 2)を使った。結局

$$\psi_{xx} f^2 + \psi D_x^2 f \cdot f = \lambda \psi f f$$

即ち

$$\psi_{xx} + \left(\frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2} \right) \psi = \lambda \psi \quad (3.27)$$

となるからである。

また, K-dV の bilinear form の微分方程式は

$$\begin{cases} (D_t + D_x^3) G \cdot F = 0 \\ D_x^2 F \cdot F = 2GF \end{cases} \quad (3.28)$$

の連立方程式となることは前に述べた。さらに, $F = f^2$ と仮定すると, (Ⅶ. 1, 3) より

$$\begin{aligned} D_x^2 f f \cdot f f &= 2 (D_x^2 f \cdot f) f^2 \\ &= 2 G f^2 \end{aligned} \quad (3.29)$$

となるから, $G = D_x^2 (f \cdot f)$ となる。この F, G を, 連立式の第一式に代入すると, (Ⅶ. 1, 1, 2) より

$$\begin{aligned} &(D_t + D_x^3) (D_x^2 f \cdot f) \cdot f^2 \\ &= D_x [D_x (D_t + D_x^3) f \cdot f] \cdot f^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

ここで (Ⅱ. 2) を使うと α を任意定数として

$$D_x (D_t + D_x^3) f \cdot f = \alpha f^2 \quad (3.31)$$

となる。従って特別に $\alpha = 0$ と置いた方程式の解を求めれば, K-dV 方程式の特解を得ることができる。

次に, Bäcklund 変換を bilinear form で見てみよう。Bäcklund 変換の一般に広く認められた定義というものはないようであるが, 我々が今問題にしている bilinear form に即して言えば,

$$F(D) f \cdot f = 0 \quad (3.32)$$

なる方程式のある解と, 同じ方程式の別の解, 又は異なる方程式の解を結びつける関係式と言ってよい。即ち, ここでは Bäcklund 変換とは

広田良吾

$$\begin{aligned} F(D)f' \cdot f' &= 0 \\ (\widetilde{F}(D)f' \cdot f' &= 0) \end{aligned} \quad (3.33)$$

をみたす $f' (\neq f)$ と f との間に成立する

$$\begin{aligned} F_1(D)f \cdot f' &= 0 \\ F_2(D)f \cdot f' &= 0 \end{aligned} \quad (3.34)$$

の関係式ということになる。Bäcklund 変換を知ることができれば、一つの特解 f から次々に他の特解を知ることができる。例えば 1-ソリトン解から 2-ソリトン解、等々がこの変換によって求まるのである。

この Bäcklund 変換は、

$$F(D)f \cdot f = 0, \quad F(D)f' \cdot f' = 0 \text{ から, 恒等式}$$

$$[F(D)f \cdot f]f'f' - ff[F(D)f' \cdot f'] = 0$$

を今までの公式を利用して変形し、

$$\begin{aligned} F_1(D)f \cdot f' &= 0 \\ F_2(D)f \cdot f' &= 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

を得るのである。例えば K-dV 型方程式 $F(D) \equiv D_x(D_t + c_0 D_x + D_x^3)$ のとき、この手続きを実行してみる。

$$\begin{aligned} 0 &= [D_x(D_t + c_0 D_x + D_x^3)f \cdot f]f'f' \\ &\quad - ff[D_x(D_t + c_0 D_x + D_x^3)f' \cdot f'] \\ &= 2D_x[(D_t + c_0 D_x + D_x^3)f' \cdot f] \cdot ff' + 6D_x(D_x^2 f' \cdot f) \cdot (D_x f \cdot f') \quad (3.36) \\ &= 2D_x[\{D_t + (c_0 + 3\lambda)D_x + D_x^3\}f' \cdot f] \cdot ff' \\ &\quad + 6D_x[(D_x^2 - \mu D_x - \lambda)f' \cdot f] \cdot (D_x f \cdot f') \end{aligned}$$

公式 (Ⅶ 2.1 ~ 2.3) を適用した。 λ, μ は任意定数である。これから次の二つの関係式が Bäcklund 変換の変換式として採用できる。

$$[D_t + (c_0 + 3\lambda)D_x + D_x^3]f' \cdot f = 0 \quad (3.37)$$

$$(D_x^2 - \mu D_x \cdot) f' \cdot f = \lambda f' f \quad (3.38)$$

$c_0 = 0$, $\mu = 0$ の場合は普通の K-dV 方程式の Bäcklund 変換である。

この変換は他方では、適当な従属変数変換によって、 N -ソリトン解を持つ非線形波動方程式の bilinear form となりうるし、逆散乱法形式の K-dV 方程式の表示にもなる。またこの bilinear form での Bäcklund 変換から、通常の形の Bäcklund 変換は容易に得られる (P.T.P 52, 1498-1512, '74)

ii) $\lambda = 0$, μ ; imaginary の場合

$f = \hat{f} + i\hat{g}$, $f' = \bar{f} = \hat{f} - i\hat{g}$, とし, $c_0 = 0$, $\mu = i\alpha\beta^{-1/2}$ ($\beta > 0$) と置く。さらに

$$\begin{aligned} u &= i\beta^{-1/2}\phi_x, \\ \phi &= \log(\hat{f} + i\hat{g})/(\hat{f} - i\hat{g}) \end{aligned} \quad (3.39)$$

と変換すると、式 (3.37) は Modified K-dV 方程式の一つ

$$u_t + 6\alpha u_x + 6\beta u^2 u_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.40)$$

に変形される。

iii) $\lambda = 0$, μ ; real の場合

$c_0 = -6$, $\mu = -2$, $\tau = -t$ とすると

$$\begin{aligned} V &= 1 + \phi_x \\ \phi &= \log(f'/f) \end{aligned} \quad (3.41)$$

の変換で

$$V_\tau + 6V^2 V_x - V_{xxx} = 0 \quad (3.42)$$

なる shock-wave 型の解を持つ、Modified K-dV 方程式の一種になる。

iv) $c_0 = \mu = 0$ の場合

$$\begin{aligned} \psi &= f'/f \\ u &= 2(\log f)_{xx} \end{aligned} \quad (3.43)$$

と置くと、(3.37)(3.38)式はそれぞれ

広田良吾

$$\begin{aligned}\psi_t + 3\lambda\psi_x + \psi_{xxx} + 3u\psi_x &= 0 \\ \psi_{xx} + u\psi &= \lambda\psi\end{aligned}\tag{3.44}$$

となる。この二式は K-dV 方程式の逆散乱法形式の表示である。

V) $\mu = \lambda = c_0 = 0$ の場合

$$\begin{aligned}u &= 2(\log f)_{xx} = \frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2} \\ v &= (1/2i) [\log(f'/f)]_x\end{aligned}\tag{3.45}$$

とすると、(3.38)の $D_x^2 f' \cdot f = 0$ から

$$u = (2v)^2 - 2iv_x\tag{3.46}$$

なる関係が得られる。ここで v は、Modified K-dV 方程式の一種

$$V_t + 24V^2V_x + V_{xxx} = 0\tag{3.47}$$

を満す。 u を K-dV 方程式の解と考えると、(3.46) はこれを、Modified K-dV 方程式と結びつける関係と言える。これは Miura 変換である。

次に Lamb's diagram について触れる。Bäcklund 変換は、一つのパラメータと一つの積分定数に依って、ある一つの解から他の解への変換を定める。そして、この積分定数を適当に選ぶと Bäcklund 変換は可換となる。この事情を図示したものが Lamb's diagram と呼ばれるものである。(図 k_1, k_2 は変換のパラメーターである。 k_1 による変換により ϕ_0 なる解が ϕ_1 に、さらに k_2 による変換により移った ϕ_3 は、 k_2 による後に k_1 の変換で得られる結果と一致せしめ得ることを示している。

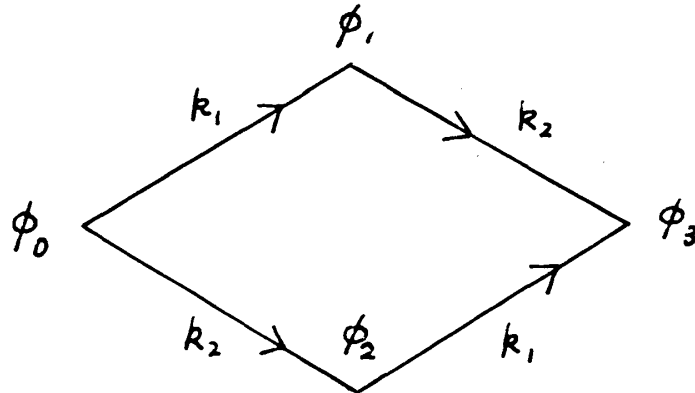


図 6 a)

K-dV, MK-dV, Toda 格子は皆この構造を持っている。この性質から Bäcklund 変換の加法定理と呼ばれる公式が得られる。それは

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = \sin \phi \quad (3.48)$$

の Sine-Gordon 方程式については

$$\tan \frac{1}{4} (\phi_3 - \phi_0) = \frac{k_1 + k_2}{k_1 - k_2} \tan \frac{1}{4} (\phi_1 - \phi_2) \quad (3.49)$$

となる。この公式から、 ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 から、 ϕ_3 を代数的に得ることができるのである。

さて、この Bäcklund 変換の可換性を示す Lamb's diagram は我々の f -space でも成立する。

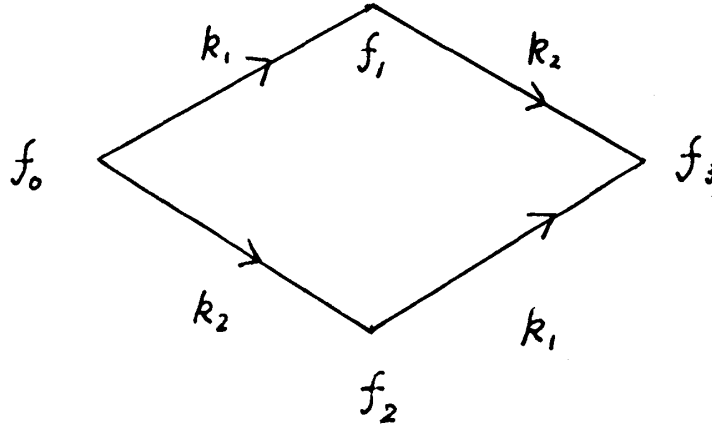


図 6 b)

この時、加法定理に対応する公式は

$$\begin{aligned} f_1 f_2 &\propto D_x f_0 \cdot f_3 \\ f_0 f_3 &\propto D_x f_1 \cdot f_2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

となる。証明は次のとおりである。例えば、K-dV の Bäcklund 変換の一方、 $D_x f' \cdot f = k^2 f' f$ を考えると、 $f_0 \rightarrow f_1$ は $D_x^2 f_0 \cdot f_1 = k_1^2 f_0 f_1$ で移り、 $f_0 \rightarrow f_2$ は $D_x^2 f_0 \cdot f_2 = k_2^2 f_0 f_2$ 等で移る。そこで

$$\begin{aligned} 0 &= (D_x^2 f_0 \cdot f_1) f_2 f_3 - f_0 f_1 (D_x^2 f_2 \cdot f_3) \\ &= D_x [(D_x f_0 \cdot f_3) \cdot f_1 f_2 - f_0 f_3 \cdot (D_x f_1 \cdot f_2)] \end{aligned} \quad (3.51 a)$$

広田良吾

$$\begin{aligned} 0 &= (D_x^2 f_1 \cdot f_3) f_1 f_2 - f_1 f_3 (D_x^2 f_0 f_2) \\ &= D_x [(D_x f_1 \cdot f_2) \cdot f_0 f_3 + f_1 f_2 \cdot (D_x f_0 \cdot f_3)] \end{aligned}$$

この二つの恒等式から,

$$\begin{aligned} D_x (D_x f_0 \cdot f_3) \cdot f_1 f_2 &= 0 \\ D_x (D_x f_1 \cdot f_2) \cdot f_0 f_3 &= 0 \end{aligned} \quad (3.51b)$$

を得るが, これから公式 (Ⅱ. 2) により

$$\begin{aligned} f_1 f_2 &\propto D_x f_0 \cdot f_3 \\ f_0 f_3 &\propto D_x f_1 \cdot f_2 \end{aligned} \quad (3.52)$$

が証明できた。

今までは D -operator の持つ性質について述べてきたが, 次に通常の偏微分方程式を D -operator で書替えるときに有用な公式を述べよう。

$$\text{viii)} \quad \frac{\partial^3}{\partial x^3} \left(\frac{a}{b} \right) = \frac{D_x^3 a \cdot b}{b^2} - 3 \left(\frac{D_x a \cdot b}{b^2} \right) \frac{D_x^2 b \cdot b}{b^2}$$

K-dV 方程式では従属変換により $\partial^3 / \partial x^3 (b/a)$ の項が現われるのでこの公式が使われる。この項は $e^{\varepsilon(\partial/\partial x)} a(x)/b(x)$ の ε^3 の項に対応するので, 証明するには次のことが利用できる。

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon(\partial/\partial x)} \cdot a(x)/b(x) &= \frac{a(x+\varepsilon)}{b(x+\varepsilon)} \cdot \frac{b(x-\varepsilon)}{b(x-\varepsilon)} \\ &= \frac{e^{\varepsilon D_x} a \cdot b}{e^{\varepsilon D_x} b \cdot b} = \frac{e^{\varepsilon D_x} a \cdot b}{(\cosh \frac{\varepsilon}{2} D_x) b \cdot b} \\ &= \frac{(1 + \varepsilon D_x + \frac{1}{2} \varepsilon^2 D_x^2 + \frac{1}{3!} \varepsilon^3 D_x^3 + \dots) a \cdot b}{b^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} D_x^2 b \cdot b + \frac{\varepsilon^4}{4!} D_x^4 b \cdot b + \dots} \end{aligned} \quad (3.53)$$

これにより例えば, ε^1 , ε^2 の各 order を等置すると,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{b} \right) = \frac{D_x a \cdot b}{b^2} \quad (3.54)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{a}{b} \right) = \frac{D_x^2 a \cdot b}{b^2} - \frac{a}{b} \frac{D_x^2 b \cdot b}{b^2}$$

を得, ϵ^3 では前述の公式を得るのである。

$$\text{ix. } 2 \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \log f = (D_x^{2n} f \cdot f, \dots)$$

証明

$$\begin{aligned} 2 \cosh \left(\epsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \log f &= \log [\cosh (\epsilon D_x) f \cdot f] \\ \therefore \left(e^{\epsilon \frac{\partial}{\partial x}} + e^{-\epsilon \frac{\partial}{\partial x}} \right) \log f &= \log [f(x+\epsilon) f(x-\epsilon)] \\ &= \log [e^{\epsilon D_x} f \cdot f] \end{aligned}$$

の両辺の ϵ の同じ order の項を等置すればよい。良く使われるものでは,

$$\begin{aligned} n=1, \quad 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log f &= \frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2} \\ n=2, \quad 2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} \log f &= \frac{D_x^4 f \cdot f}{f^2} - 3 \left(\frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2} \right)^2 \\ n=3, \quad 2 \frac{\partial^6}{\partial x^6} \log f &= \frac{D_x^6 f \cdot f}{f^2} - 15 \left(\frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2} \right) \left(\frac{D_x^4 f \cdot f}{f^2} \right) \\ &\quad + 30 \left(\frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2} \right)^3 \end{aligned} \quad (3.55)$$

この公式は

三次の K-dV に対しては $n=2$ まで, 五次の K-dV に対しては $n=3$ まで使われる。また $\partial^2 / \partial x \partial t (\log f)$ の変換も必要となるが, このときは, $\epsilon \partial / \partial x \rightarrow \epsilon \frac{\partial}{\partial x} + \delta \frac{\partial}{\partial t}$, $\epsilon D_x \rightarrow \epsilon D_x + \delta D_t$ として, 両辺 δ の一次までとればよいのである。

Note.1

以上の公式を使うと, K-dV 方程式を bilinear form に前とは別の方法で書替えられる。

$$u_t + 6 u u_x + u_{xxx} = 0 \quad (3.56)$$

は, $u = w_x$, $u = 2 \partial^2 / \partial x^2 \log f$, $w = 2 \frac{\partial}{\partial x} \log f$ の変数変換により一回積分できて

$$w_t + 3 (w_x)^2 + w_{xxx} = 0 \quad (3.57)$$

広田良吾

となる。ここで公式を適用すると

$$\frac{D_x D_t f \cdot f}{f^2} + 3 \left(\frac{D_x f \cdot f}{f^2} \right)^2 + \frac{D_x^4 f \cdot f}{f^2} - 3 \left(\frac{D_x f \cdot f}{f^2} \right)^2 = 0$$

$$\therefore D_x (D_t + D_x^3) f \cdot f = 0 \quad (3.58)$$

となる。第二項と第四項が打ち消しあう。即ち bilinear form では 非線形項が分散項の一部と打ち消しあってあたかも $\partial/\partial t + \partial^3/\partial x^3$ の dispersion を持つ線形方程式のように見える。 $\partial_x \rightarrow D_x$ で非線形項は消えるのである。もちろん $D_x \rightarrow \partial_x$ で再出現するが、このことから逆に

$$F(D_t, D_x, \dots) f \cdot f = 0$$

として $D_t, D_x \rightarrow \partial_t, \partial_x$ の space に戻るとソリトン解を持つ非線形偏微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \times) \quad \frac{\partial^n}{\partial x^n} \log \left(\frac{a}{b} \right) &= (D_x^n a \cdot b \dots) \\ 2 \sinh \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) \log \left(\frac{a}{b} \right) & \quad (3.59a) \\ &= \log (e^{\varepsilon D_x} a \cdot b) - \log (e^{-\varepsilon D_x} a \cdot b) \end{aligned}$$

を利用すると、両辺の ε の各次数の項を比較して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \log \left(\frac{a}{b} \right) &= \frac{D_x a \cdot b}{a b} \\ \frac{\partial^3}{\partial x^3} \log \left(\frac{a}{b} \right) &= \frac{D_x^3 a \cdot b}{a b} - 3 \left(\frac{D_x^2 a \cdot b}{a b} \right) \left(\frac{D_x a \cdot b}{a b} \right) + 2 \left(\frac{D_x a \cdot b}{a b} \right)^3 \quad (3.59b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2 \cosh \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) \log \left(\frac{a}{b} \right) & \\ = \log [\cosh (\varepsilon D_x) a \cdot b] - \log [\cosh (\varepsilon D_x) b \cdot b] & \quad (3.60a) \end{aligned}$$

より

$$2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \left(\frac{a}{b} \right) = \frac{D_x^2 a \cdot a}{a^2} - \frac{D_x^2 b \cdot b}{b^2}$$

$$2 \frac{\partial^2}{\partial x^4} \log \left(\frac{a}{b} \right) = \frac{D_x^2 a \cdot a}{a^2} - 3 \left(\frac{D_x^2 a \cdot a}{a^2} \right)^2 - \frac{D_x^4 b \cdot b}{b^2} + 3 \left(\frac{D_x^2 b \cdot b}{b^2} \right)^2 \quad (3.60b)$$

Note.2 Sine-Gordon 方程式

$$\phi_{xx} - \phi_{tt} = \sin \phi$$

$$\text{は, } \phi = -2i \log \frac{f+ig}{f-ig} = 4 \tan^{-1} \left(\frac{g}{f} \right) \quad (3.61)$$

なる従属変数変換で Decouple することができる。上述の公式はこの種の変換の際に利用できる。Sine-Gordon 方程式では ϕ は位相を表わすので、 $a = b^*$ とした、 $\log(a/b)$ の形の変換を考えるのは理解できるだろう。他方、振幅に対応する、 $\log(ab)$ 形の変換に対しては、同様にして、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log(ab) &= \frac{D_x^2 a \cdot b}{ab} - \left(\frac{D_x^2 a \cdot b}{ab} \right)^2 \\ \frac{\partial^4}{\partial x^4} \log(ab) &= \frac{D_x^4 a \cdot b}{ab} - 4 \left(\frac{D_x^3 a \cdot b}{ab} \right) \left(\frac{D_x a \cdot b}{ab} \right) - 3 \left(\frac{D_x^2 a \cdot b}{ab} \right)^2 \\ &\quad + 12 \left(\frac{D_x^2 a \cdot b}{ab} \right) \left(\frac{D_x a \cdot b}{ab} \right)^2 - 6 \left(\frac{D_x a \cdot b}{ab} \right)^4 \end{aligned} \quad (3.62a)$$

三次の微分はうまい方法がないので

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3} (\log ab) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \log ab \right) \quad (3.62b)$$

として計算しなくてはならない。

次は bilinear form を通常のに直す際に有用な公式である。

$$\text{XII. } e^{\epsilon D_x a \cdot b} = \left\{ \exp \left[2 \cosh \left(\epsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) \log b \right] \right\} e^{\epsilon \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{b} \right)}$$

これから、次の公式が得られる。

$$\psi = \frac{a}{b}, \quad u = 2 (\log b)_{xx}$$

$$\frac{D_x a \cdot b}{b^2} = \psi_x$$

広田良吾

$$\begin{aligned}\frac{D_x^2 a \cdot b}{b^2} &= \psi_{xx} + u\psi \\ \frac{D_x^3 a \cdot b}{b^2} &= \psi_{xxx} + 3u\psi_x\end{aligned}\tag{3.63}$$

$$\text{XII. } \cosh(\varepsilon D_x) f \cdot f = \exp \left[2 \cosh \left(\varepsilon \frac{\partial}{\partial x} \right) \log f \right]$$

なる関係より, $u = 2(\log f)_{xx}$ とすると,

$$\begin{aligned}\frac{D_x^2 f \cdot f}{f^2} &= u \\ \frac{D_x^4 f \cdot f}{f^2} &= u_{xx} + 3u^2\end{aligned}\tag{3.64}$$

これは K-dV 方程式 $D_x(D_t + D_x^3) f \cdot f = 0$ で使われる。

$$\frac{D_x^6 f \cdot f}{f^2} = u_{xxxx} + 15u u_{xx} + 15u^3\tag{3.65}$$

これは, $D_x(D_t + D_x^5) f \cdot f = 0$ の五次の K-dV 方程式で使われる。

$$\begin{aligned}\text{XIII. } \exp(\varepsilon D_x) a \cdot b \\ = \exp \left[\sinh(\varepsilon \partial / \partial x) \log(a/b) + \cosh(\varepsilon \partial / \partial x) \log(ab) \right]\end{aligned}$$

一般に bilinear form では同じでも, 変換が異なれば別の方程式になることがある。

$$\begin{aligned}\phi &= \log(a/b) \\ \rho &= \log(ab)\end{aligned}\tag{3.66}$$

とすると, 例えば

$$\begin{aligned}\frac{D_x a \cdot b}{ab} &= \phi_x \\ \frac{D_x^2 a \cdot b}{ab} &= \rho_{xx} + (\phi_x)^2 \\ \frac{D_x^3 a \cdot b}{ab} &= \phi_{xxx} + 3\phi_x \rho_{xx} + (\phi_x)^3\end{aligned}\tag{3.67}$$

の公式が得られる。これは M-KdV で使われる。

XIV. Hilbert transformation

$$H[f(x)] \equiv \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(Z)}{Z-x} dZ$$

とすると,

$$H[i \partial/\partial x \log(f'/f)] = -\frac{\partial}{\partial x} \log(f'/f)$$

の公式が得られる。但し, f' の pole と f の pole は実軸の上下に分離していなくてはならない。(図 7)

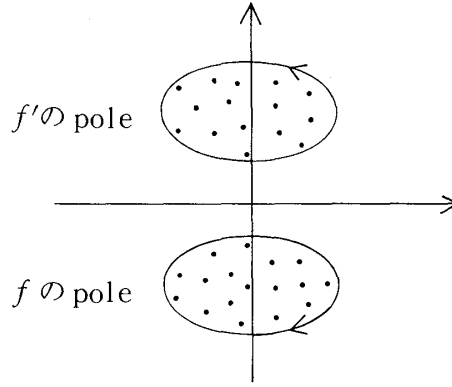


図 7

この公式を利用すると, Benjamin-Ono 方程式

$$u_t + 2uu_t + \partial^2/\partial x^2 H[u] = 0 \quad (3.68)$$

は $u = i \partial/\partial x \log(f'/f)$, f' と f は複素共役とすると,

$$(i D_t + D_x^2) f' \cdot f = 0 \quad (3.69)$$

となる。

$$\begin{aligned} \text{(XIV)} \quad & e^{\epsilon D_x} a b \cdot c d \\ &= (e^{\epsilon D_x} a \cdot b) (e^{\epsilon D_x} c \cdot d) + (e^{\epsilon D_x} a \cdot d) [2 \sinh(\epsilon D_x) b \cdot c] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(XVI)} \quad & [\sinh(\epsilon D_x) a \cdot b] (e^{\epsilon D_x} c \cdot d) \\ &+ [\sinh(\epsilon D_x) b \cdot c] (e^{\epsilon D_x} a \cdot d) \\ &+ [\sinh(\epsilon D_x) c \cdot a] (e^{\epsilon D_x} b \cdot d) = 0 \end{aligned}$$

広田良吾

(XVII) Jacobi Identity

$$\sum_{\begin{smallmatrix} a \rightarrow b \\ \downarrow \\ c \end{smallmatrix}} \sinh(\varepsilon D_x) [\sinh(\varepsilon D_x) a \cdot b] \cdot [\cosh(\varepsilon D_x) c \cdot d] = 0$$

和は a, b, c を cyclic に移した項をすべて加えることを意味する。ここで $\varepsilon \rightarrow 0$ とするとこの節の冒頭の Jacobi の恒等式が説明できる。

$$\begin{aligned} \text{(XVIII)} \quad & D_x^N \prod_{i=1}^M a_i(x) \cdot \prod_{i=1}^N b_i(x) \\ &= \sum_{\sum_{i=1}^M n_i = N} \frac{N!}{\prod_{i=1}^M n_i!} \prod_{i=1}^M [D_x^{n_i} a_i(x) \cdot b_i(x)] \\ &\quad (D_1 + \dots + D_M)^N \\ &= \sum \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_M!} D_1^{n_1} \dots D_M^{n_M} \end{aligned}$$

§ 3.3 Solutions to Bilinear Differential Equation

一般的に bilinear form の微分方程式を解く。

$$F(D_t, D_x, D_y, \dots) f \cdot f = 0$$

この方程式が log-変換によって導びかれた場合は、形式的に解 f を

$$f = 1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots \quad (3.70)$$

と展開する。初項を 1 としたのは、普通

$$\tilde{f} = e^{\alpha x + \beta t + \gamma y + \dots} f \quad (3.71)$$

としたとき $\tilde{f}$ も解となるからである。 $F(0, 0, 0) = 0$, $F(D_t, D_x, D_y, \dots) = F(-D_t, -D_x, -D_y, \dots)$ とする。

$$F(D_t, D_x, D_y, \dots) (1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots) (1 + \varepsilon f_1 + \varepsilon^2 f_2 + \dots) = 0 \quad (3.72)$$

$$\varepsilon^1 F(D) (f_1 \cdot 1 + 1 \cdot f_1) = 0$$

$$\varepsilon^2 F(D) (f_2 \cdot 1 + f_1 \cdot f_1 + 1 \cdot f_2) = 0 \quad (3.73)$$

ϵ^1 の式から, K-dV 方程式に対しては

$$\begin{cases} f_1 = a e^{\Omega t + p x + q y + \dots} \\ F(\Omega, p, q, \dots) = 0 \end{cases} \quad (3.74)$$

が解として考えられる。下の式は分散式である。 ϵ^2 の式からは,

$$2 F(\partial) f_2 = -F(D) f_1 \cdot f_1 = 0 \quad (3.75)$$

となるから, 特解として $f_2 = 0$ を選べる。最後の等号は

$$F(D) e^{\Omega t + p x} \cdot e^{\Omega t + p x} = 0 \quad (3.76)$$

なる性質を使った。さらに高次の f_i も同様にして, すべて 0 とすることができる。ここで $F(\partial)$ は $D_t, D_x \rightarrow \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}$ としたものを意味する。公式 (I) 参照。こうして得られた解が厳密な 1-ソリトン解である。即ち

$$\begin{cases} f = 1 + a e^{\Omega t + p x + q y + \dots} \\ F(\Omega, p, q) = 0 \end{cases} \quad (3.77)$$

である。2-ソリトン解は f_1 を

$$f_1 = e^{\Omega_1 t + p_1 x + \dots + \delta_1} + e^{\Omega_2 t + p_2 x + \dots + \delta_2} \quad (3.78)$$

とすれば得られる。但し, ϵ^1 の方程式を満すために $F(\Omega_1, p_1, \dots) = F(\Omega_2, p_2, \dots) = 0$ でなければならない。このとき, ϵ^2 の方程式は

$$\begin{aligned} 2 F(\partial) f_2 &= -F(D) [e^{\eta_1} + e^{\eta_2}] \cdot [e^{\eta_1} + e^{\eta_2}] \\ &\equiv -F(D) [e^{\eta_1} \cdot e^{\eta_2} + e^{\eta_2} \cdot e^{\eta_1}] \\ &= -2 \frac{F(\Omega_1 - \Omega_2, p_1 - p_2, \dots)}{F(\Omega_1 + \Omega_2, p_1 + p_2, \dots)} F(\partial) e^{\eta_1 + \eta_2} \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\eta_i = \Omega_i t + p_i x + q_i y + \dots$$

となる。公式 (IV 1, 2) を使った。これを解くと

広田良吾

$$f_2 = - \frac{F(\Omega_1 - \Omega_2, p_1 - p_2, \dots)}{F(\Omega_1 + \Omega_2, p_1 + p_2, \dots)} e^{\Omega_1 t + p_1 x + \dots + \Omega_2 t + p_2 x + \dots} \quad (3.80)$$

となる。 f_3 以上は 0 とすることができるので、結局厳密な 2-ソリトン解は

$$\begin{aligned} f &= 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{a_{12} + \eta_1 + \eta_2} \\ \eta_i &= \Omega_i t + p_i x + q_i y + \dots \\ e^{a_{ij}} &= - \frac{F(\Omega_i - \Omega_j, p_i - p_j, \dots)}{F(\Omega_i + \Omega_j, p_i + p_j, \dots)} \\ F(\Omega_i, p_i, q_i, \dots) &= 0 \end{aligned} \quad (3.81)$$

となる。3-ソリトン解は

$$\begin{aligned} f &= 1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + e^{a_{12} + \eta_1 + \eta_2} + \dots \\ &\quad \dots + e^{a_{12} + a_{23} + a_{13} + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3} \end{aligned} \quad (3.82)$$

一般に N -ソリトン解は

$$f = \sum_{\substack{\mu_i = 0,1 \\ \text{for all } i}} \exp \left(\sum_{i < j}^N a_{ij} \mu_i \mu_j + \sum_{i=1}^N \mu_i \eta_i \right) \quad (3.83)$$

と書ける。但し、

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma=\pm 1} F \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i \Omega_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i p_i, \dots \right) \\ &\times \prod_{i < j}^n F \left(\sigma_i \Omega_i - \sigma_j \Omega_j, \sigma_i p_i - \sigma_j p_j, \dots \right) \sigma_i \sigma_j = 0 \end{aligned} \quad (3.84)$$

$\{(\Omega_i, p_i, q_i) \text{ は } F(\Omega_i, p_i, q_i, \dots) = 0 \text{ を満す。}\}$ が $n = 1, 2, \dots, N$ に対して恒等的に 0 となるものとする。即ちこの条件が満されているとき

$$F(D_t, D_x, D_y, \dots) f \cdot f = 0 \quad (3.85)$$

は N -ソリトン解を持つことが証明できる。

最後に、ソリトン解を持つ方程式としてよく知られた非線形方程式の bilinear form を列挙して、本講義を終えることにしよう。

i) Boussinesque 方程式

$$\begin{aligned}
u_{tt} - u_{xx} &= (3u^2)_{xx} + u_{xxxx} \\
u &= 2(\log f)_{xx} \text{ の変換で} \\
(D_t^2 - D_x^2 - D_x^4)f \cdot f &= 0
\end{aligned} \tag{3.86}$$

ii) 2-D K-dV 方程式

$$\begin{aligned}
u_{tx} + 6(uu_x)_x + u_{xxxx} \pm u_{yy} &= 0 \\
u &= 2(\log f)_{xx} \text{ の変換で} \\
(D_t D_x + D_x^4 \pm D_y^2)f \cdot f &= 0
\end{aligned} \tag{3.87}$$

iii) Model eq. for shallow water

$$\begin{aligned}
\text{a) } u_t - u_{xxt} - 3uu_t + 3u_x \int_x^\infty u_t dx' + u_x &= 0 \\
u &= 2(\log f)_{xx} \text{ の変換で}
\end{aligned} \tag{3.88}$$

$$D_x(D_t - D_t D_x^2 + D_x)f \cdot f = 0$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } u_t - u_{xxt} - 4uu_t + 2u_x \int_x^\infty u_t dx' + u_x &= 0 \\
u &= 2(\log f)_{xx} \text{ の変換で}
\end{aligned} \tag{3.89}$$

$$\begin{cases} [D_x(D_t - D_t D_x^2 + D_x) + \frac{1}{3}D_t(D_\tau + D_x^3)]f \cdot f = 0 \\ D_x(D_\tau + D_x^3)f \cdot f = 0 \end{cases}$$

τ は助変数

iv) Higher Order KdV 方程式

$$\begin{aligned}
u_t + 45u^2u_x + 15(uu_{xx})_x + u_{xxxxx} &= 0 \\
u &= 2(\log f)_{xx}
\end{aligned} \tag{3.90}$$

$$D_x(D_t + D_x^5)f \cdot f = 0$$

$$\text{b) } u_t + 30u^2u_x + 5(u_x^2)_x + 10(uu_{xx})_x + u_{xxxxx} = 0$$

広田良吾

$u = 2(\log f)_{xx}$ の変換で

$$\begin{cases} [D_x(D_t + D_x^5) - \frac{5}{3}D_\tau(D_\tau + D_x^3)] f \cdot f = 0 \\ D_x(D_\tau + D_x^3) f \cdot f = 0 \end{cases} \quad (3.91)$$

τ は助変数。

Difference Analogues of Soliton Equations

於 物理教室談話会

1. 空間時間の差分化

空間の差分化は、例えば結晶格子を考えれば現実的な意味を持つ。それに対して、時間を差分化することの物理的な意味は判っていない。しかし、数値計算に於いては、差分スキームは重要な問題である。最近、差分スキームのうちには、“chaos”を導びくものがあることが判ったし、また、Soliton 解を持つ非線形方程式も差分化して数値計算すると、時としてはソリトン解が得られないことが知られているからである。ここでは、この種の方程式に適当な差分スキームを紹介する。

2. 力学系の差分化の考え方は、古くニュートンが遠心力を求める際に用いられたことにまでさかのぼれるが、現在では、例えば

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q) \delta_n(t/T)$$

(ここで、 $\delta_n(t/T)$ は週期的な δ -関数

$$\delta_n(t/T) = 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \cos(2\pi k t/T)$$

である。) の Hamiltonian で定義される力学系は

$$p_{k+1} = p_k - T \left(\frac{\partial V}{\partial q} \right)_{q=q_k}$$

$$q_{k+1} = q_k + T (p_{k+1}/m)$$

の差分方程式になるが、この様な差分方程式によって、力学系の Stochastic な性質が調べられている。(i) Discrete Mechanics (G.Ford.et al.) Stochastic behavior of dynamical system) この種の問題を論ずるには、この簡単な方程式で十分だからである。

3. 数値計算の差分の問題に移ると、微分方程式を差分化する場合に、例えば Hamilton 系など保存量を持つ力学系に於いては差分化に際してこの保存則が壊されないようにすることは重要なことである。[Discrete Models (D.Greenspan)] その様な差分スキームの例として、Greenspan のスキームがある。

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q)$$

の、Hamiltonian を保存するとは

$$\Delta H(t) = H_{t+1} - H_t = 0$$

となることである。微分では、

$$\frac{d}{dt} H(p(t), q(t)) = \frac{dp}{dt} \cdot \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{dq}{dt} \cdot \frac{\partial H}{\partial q} = 0$$

は、正準方程式

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}$$

から言えるが、これに対応する差分化した式

$$\begin{aligned} \Delta_t H(p, q) &= [\Delta_t p] \{ \Delta_p \square_q H(p, q) \} \\ &\quad + [\Delta_t q] \{ \square_p \Delta_q H(p, q) \} \end{aligned}$$

$$\Delta_t p(t) = \delta^{-1} [p(t + \frac{\delta}{2}) - p(t - \frac{\delta}{2})]$$

$$\square_t p(t) = \frac{1}{2} [p(t + \frac{\delta}{2}) + p(t - \frac{\delta}{2})]$$

から、

$$\Delta_t p = -\square_p \Delta_q H(p, q)$$

$$\Delta_t q = \square_q \Delta_p H(p, q)$$

なる差分スキームが示唆される。一般にこれは、

広田良吾

$$(q_{t+1} - q_t) / \Delta t = (p_{t+1} + p_t) / 2m$$

$$(p_{t+1} - p_t) / \Delta t = F(q_{t+1}, q_t)$$

の Implicit スキームになるが、 H は保存する。少し話しは違うが、次の例は上の例と事情がよく似ている。

$$\frac{d}{dt} N = (\varepsilon - \lambda N) N$$

の解は $N(t_0) = N$

$$N(t) = \frac{\varepsilon N_0 e^{\varepsilon(t-t_0)}}{\varepsilon + \lambda N_0 (e^{\varepsilon(t-t_0)} - 1)}$$

となるが、これを Euler 法で差分化すると、

$$N_{n+1} - N_n = \Delta t [\varepsilon - \lambda N_n] N_n$$

となる。この差分方程式はある Δt に対して、chaos を生じる。一方、

$$N_{n+1} - N_n = \tau N_n [\varepsilon - \lambda N_{n+1}]$$

の Implicit スキームは τ が如何様な値でも、解の性質は保存する。もちろん $\tau \rightarrow 0$ で厳密解に一致する。

ここでは、非線形方程式の保存量を保つような、新しい systematic に得られる差分スキームを紹介する。例として、prey-predator 系を記述する、Volterra 方程式を考えることにする。

$$\frac{d}{dt} x = (\alpha - y) x$$

$$\frac{d}{dt} y = -(\beta - x) y$$

は保存量

$$x + y - \beta \log x - \alpha \log y$$

を持つ。 $\{x, y\}$ を変数変換して、この方程式を bilinear form に書替えると、

$$x = \frac{g}{f}, \quad y = \frac{h}{f}$$

$$D_t g \cdot f = \alpha g f - g h$$

$$D_t h \cdot f = -\beta h f + g h$$

となる。この空間で差分化することを試みる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow \delta^{-1} [f(t + \frac{\delta}{2}) - f(t - \frac{\delta}{2})]$$

と置換える差分スキームは

$$\frac{\partial}{\partial t} \longrightarrow 2\delta^{-1} \sinh\left(\frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

とすることと同じであることから、 D_t も

$$D_t \longrightarrow 2\delta^{-1} \sinh\left(\frac{\delta}{2} D_t\right)$$

と置換えることにする。さらに

$$1 \longrightarrow (1 - \varepsilon) e^{\frac{\delta}{2} D_t} + \varepsilon e^{-\frac{\delta}{2} D_t}$$

と置換える。 ε は適当な数、例えば簡単には $1/2$ としてよい。 1 を **1-operator** の一種と見たのである。それは

$$\Delta_t = 2\delta^{-1} \sinh\left(\frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

$$1_t = \cosh\left(\frac{\delta}{2} \frac{\partial}{\partial t}\right)$$

の平均化差分スキームでは

$$\Delta_t f g = \Delta_t f \cdot (1_t g) + (1_t f) \Delta_t g$$

の様に、 $\Delta_t, 1_t$ が対になって現われることから自然な導入と思われる。

さて、この処法によって差分化し、 $g = xf$, $h = yf$ として $\{x, y\}$ に戻ると

$$\begin{cases} x_{t+1} - x_t = \delta (\alpha x_t - x_{t+1} y_t) \\ y_{t+1} - y_t = \delta (-\beta y_{t+1} + x_{t+1} y_t) \end{cases}$$

広田良吾

なる差分方程式が得られる。このスキームが先の保存量を依持するかどうか証明はできていないが、数値計算では、 10^{-8} の精度で保存することが判っている。Euler スキームでは保存しない。またこの性質は δ によらない。

この方法を、ソリトンを持つ非線形方程式に応用すると、ソリトン解を持つ差分方程式が得られると考えられる。即ち

$$F(D_t, D_x, D_y, \dots) f \cdot f = 0$$

$$D_i \longrightarrow 2\delta^{-1} \sinh\left(\frac{\delta}{2} D_i\right)$$

$$1 \longrightarrow \sum (1 - \varepsilon_i) \exp\left(\frac{\delta}{2} D_i\right) + \varepsilon_i \exp\left(-\frac{\delta}{2} D_i\right)$$

として、従属変数変換によって、もとの変数に戻った差分方程式を得ればよいのである。

例として、

Higgs 方程式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) \varphi = -\alpha \varphi + \beta \varphi^3, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

について、この手続きを行なってみよう。

$$\varphi = g/f$$

と変換すると、

$$(D_x^2 - D_t^2) g \cdot f = 0$$

$$(D_x^2 - D_t^2 - \alpha) f \cdot f + \beta g^2 = 0$$

の bilinear form に直る。差分化すると、

$$2\delta^{-2} [\cosh(\delta D_x) - \cosh(\delta D_t)] g \cdot f = 0$$

$$\{ 2\delta^{-2} [\cosh(\delta D_x) - \cosh(\delta D_t)] - \alpha \frac{1}{2} [\cosh(\delta D_x) + \cosh(\delta D_t)] \} f \cdot f$$

$$+ \frac{1}{2} \beta [\cosh(\delta D_x) + \cosh(\delta D_t)] g \cdot g = 0$$

となる。そこで $g(x, t) = \varphi(x, t) f(x, t)$ として、 φ だけの方程式にしてみると

$$\delta^{-2} [\varphi(x+\delta, t) + \varphi(x-\delta, t) - \varphi(x, t+\delta) - \varphi(x, t-\delta)]$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4}\alpha [\varphi(x+\delta, t) + \varphi(x-\delta, t) + \varphi(x, t+\delta) + \varphi(x, t-\delta)] \\
&\quad + \frac{1}{4}\beta \{ [\varphi(x+\delta, t) + \varphi(x-\delta, t)] \varphi(x, t+\delta) \varphi(x, t-\delta) \\
&\quad + [\varphi(x, t+\delta) + \varphi(x, t-\delta)] \varphi(x+\delta, t) \varphi(x-\delta, t) \}
\end{aligned}$$

となる。この差分方程式は、厳密にソリトン解を持つ。

付記. この講義録は、昭和五十四年二月一日から二月三日まで、京大理学部物理教室に於いて、大学院生に向けてなされた講義の内容である。注はノート製作者によるし、若干、整理した部分もあるが、広田教授に原稿の段階で御一読をお願いした。

(記録 京大・理 木立英行)